

Mechanika Budowli

Ćwiczenia audytoryjne nr 3

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

olga.szylko-bigus@pwr.edu.pl



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Istotę metody przemieszczeń, najwygodniej jest przedstawić przez porównanie jej do metody sił, którą wcześniej już poznaliśmy i przy użyciu której jesteśmy w stanie policzyć przemieszczenia i rozkład sił wewnętrznych układów statycznie niewyznaczalnych.

Tok obliczeń matematycznych jest podobny, jednak sens fizyczny wielkości występujących w równaniach jest odmienny.

Podstawowe różnice pomiędzy tymi metodami zestawiono w poniższej tabeli.

Porównanie metody sił z metodą przemieszczeń

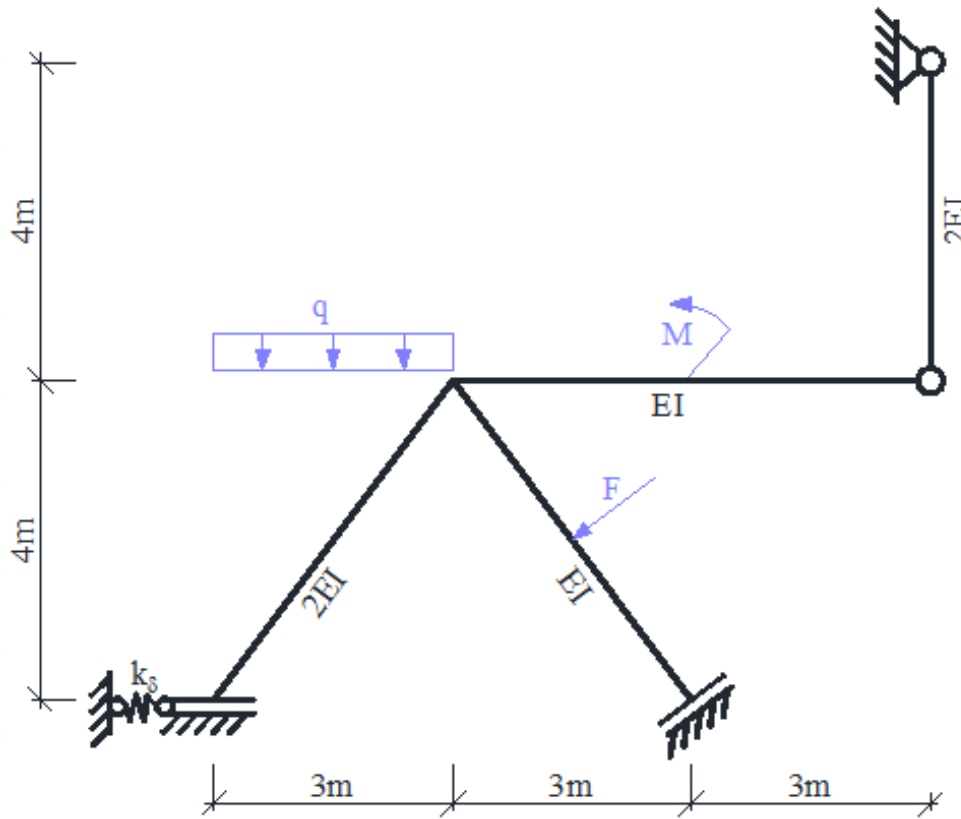
	<i>Metoda sił</i>	<i>Metoda przemieszczeń</i>
Niewiadomymi są:	nadliczbowe siły	przemieszczenia węzłów
Równania kanoniczne wyrażają:	przemieszczenia w miejscu odrzuconych więzów	reakcje w miejscu dołożonych więzów
O liczbie niewiadomych decyduje:	stopień statycznej niewyznaczalności (<i>SSN</i>). Jest to liczba więzów przesztynniających układ, które trzeba odrzucić.	stopień kinematycznej niewyznaczalności (<i>SKN</i>). Jest to liczba więzów, które trzeba wprowadzić aby układ usztynnić.

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..

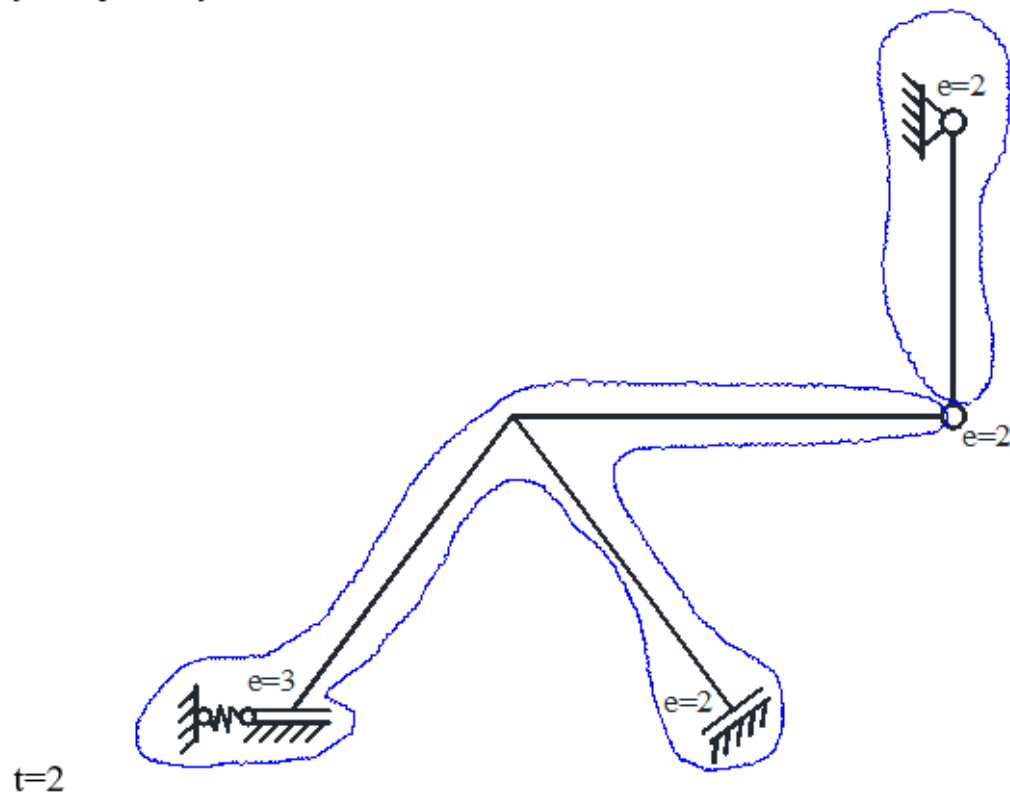
Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$;
 $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 20 \text{ kN m}$;
 $k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3$,



Rys. 1. Schemat statyczny

SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Stopień statycznej niewyznaczalności



Tarcze i więzi

$$t = 2, e = 9, \quad n_h = 9 - 3 \cdot 2 = 3$$

Układ składa się z dwóch tarcz połączonych z ostoją siedzioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 6 niezbieżnych. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ






WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$	$d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ



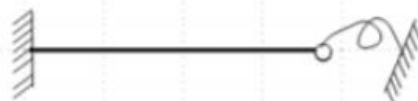
(sz-sz)



(sz-sz)



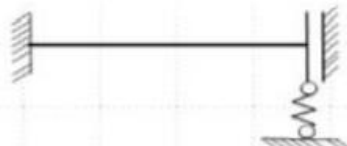
(sz-sz)



(sz-tyż)



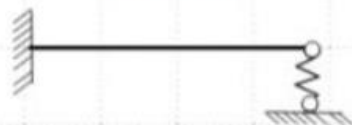
(sz-przeg) lub (sz-tyż)



(sz-sz)



(sz-sz)



(sz-przeg)



(sz-przeg)

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Stopień geometrycznej niewyznaczalności jest sumą niezależnych składowych przemieszczeń: obrotów węzłów n_φ i składowych przesunięć węzłów n_δ , które w pełni określają warunki brzegowe prętów na które został podzielony układ.

$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

n_φ - liczba niezależnych współrzędnych rotacyjnych (liczba niezależnych obrotów węzłów)

n_δ - liczba niezależnych współrzędnych translacyjnych (liczba niezależnych składowych przesuwów węzłów)

PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE






WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

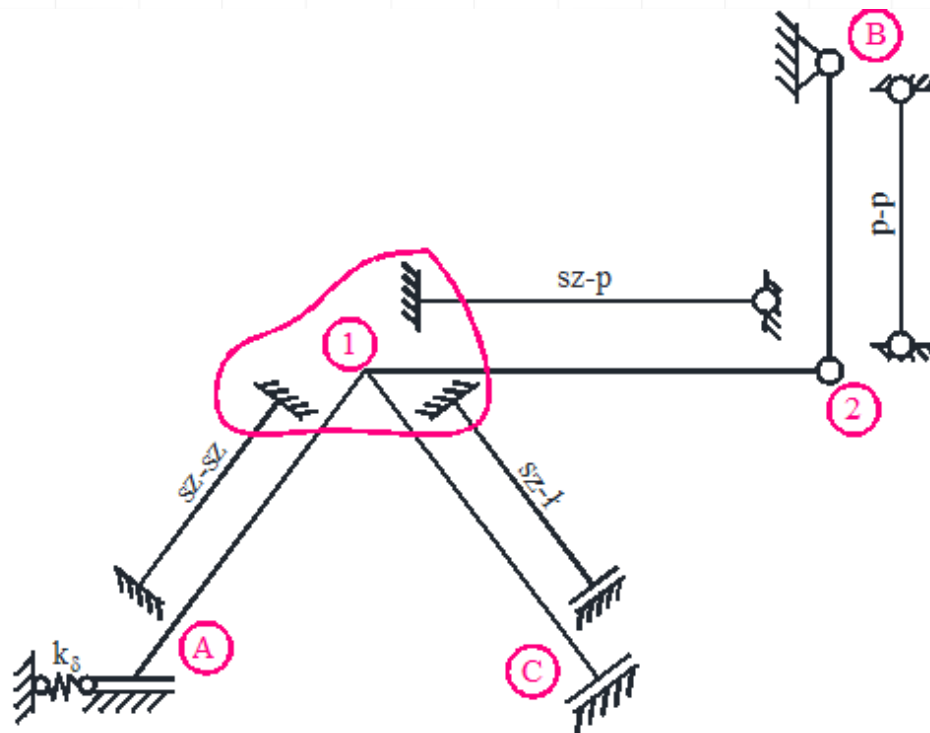
gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$	$d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW

i	j



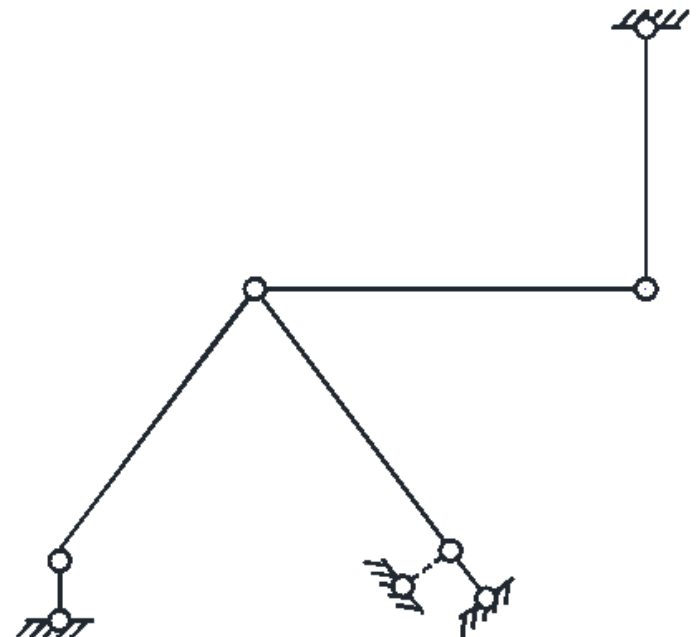
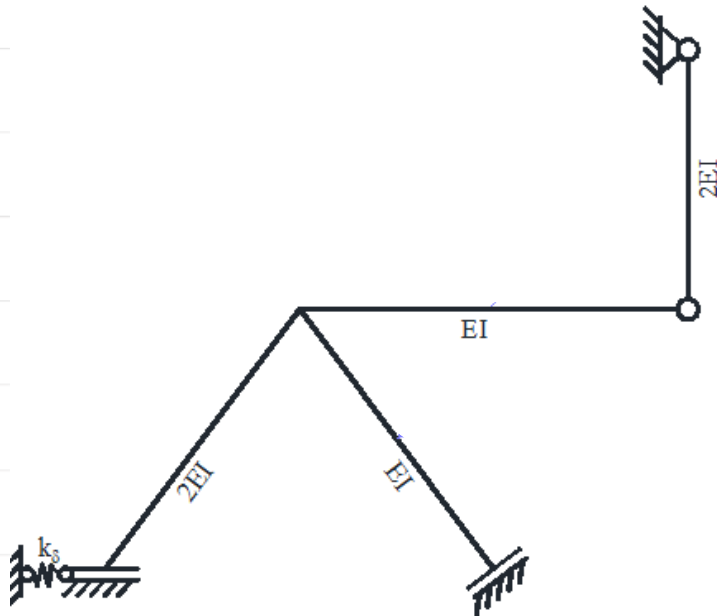
Rys. 3. Numeracja węzłów i typy prętów

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 1$.

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym, a prawym utwierdzonym z przesuwarem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



Rys. 4. Model przegubowy

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwności węzłów

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r =$$

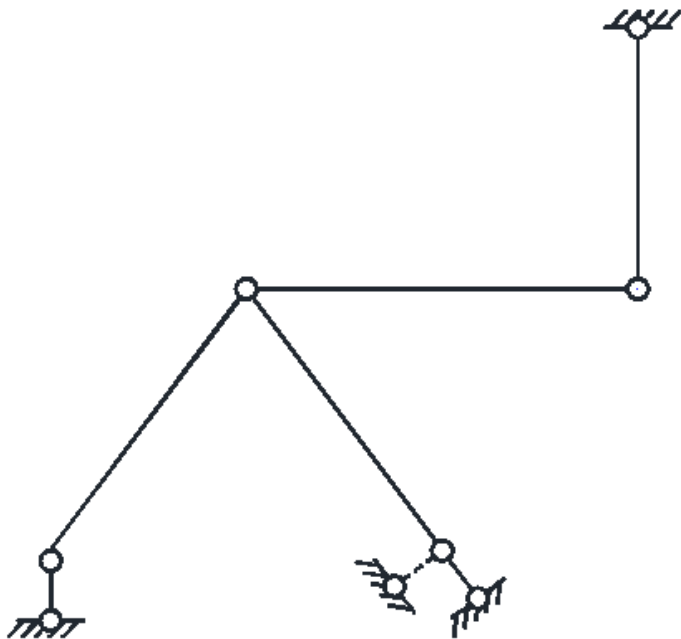
gdzie: $w =$ - liczba węzłów modelu,

$p =$ - liczba prętów w modelu,

$r =$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych

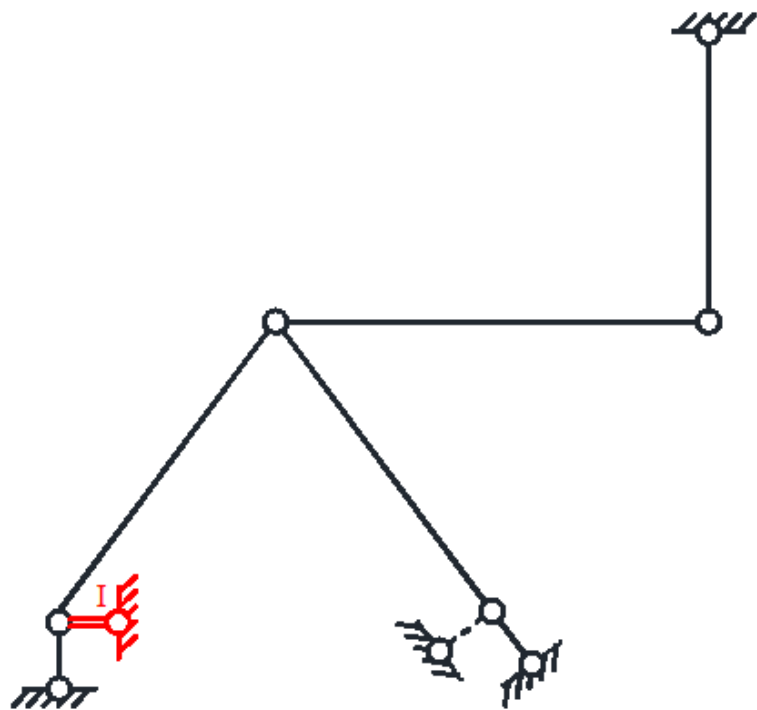
był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 4. Model przegubowy

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 2 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwności węzłów $n_s =$



Rys. 5. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

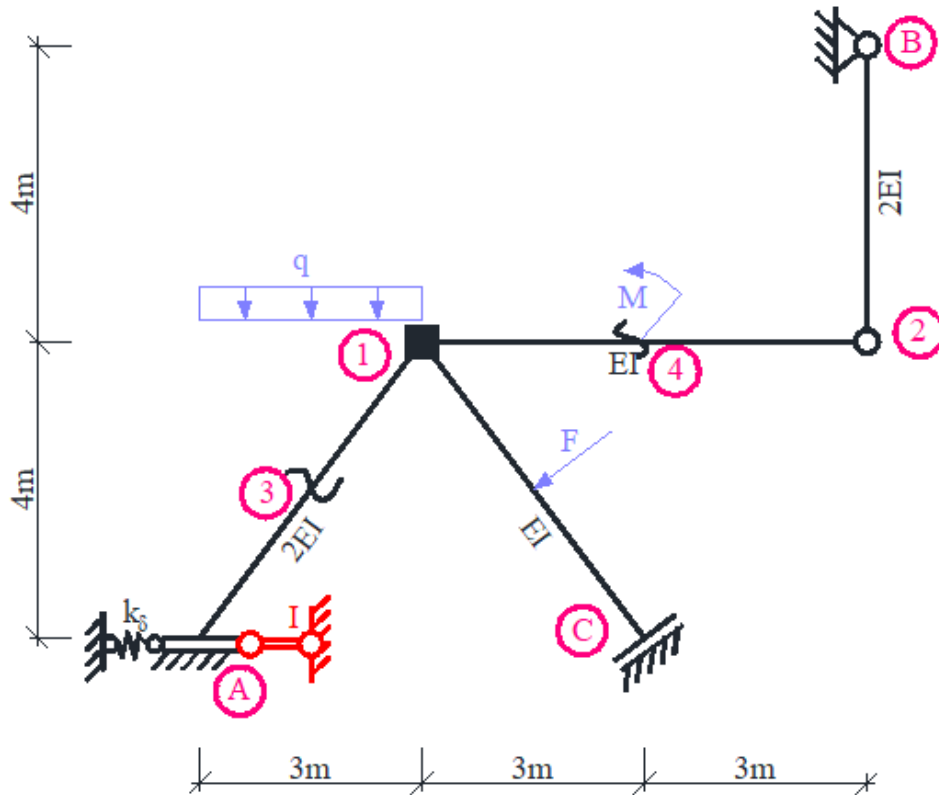
STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIETYCZALNOŚCI UKŁADU

Stożek geometrycznej nietyczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 2 = 4.$$

UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_ϕ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rysunku jest geometrycznie wyznaczalny.

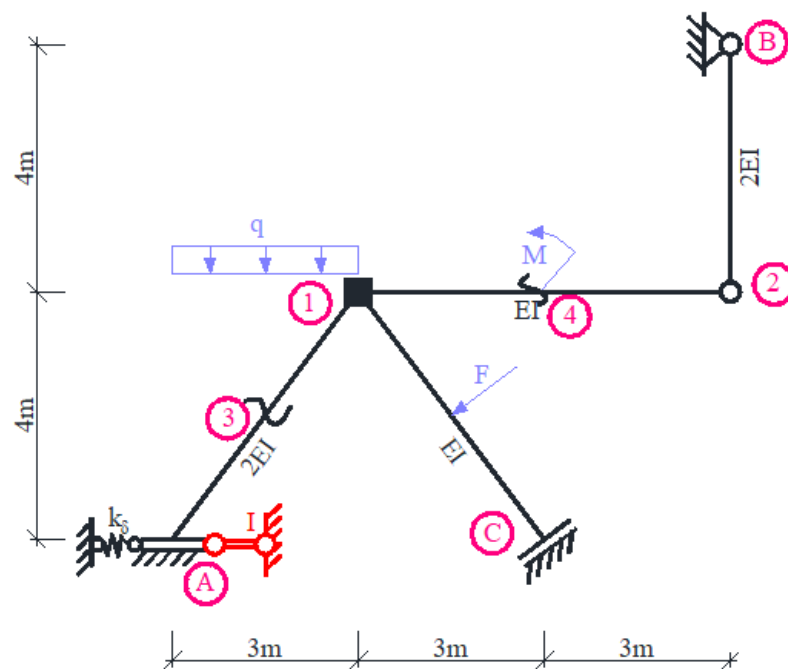
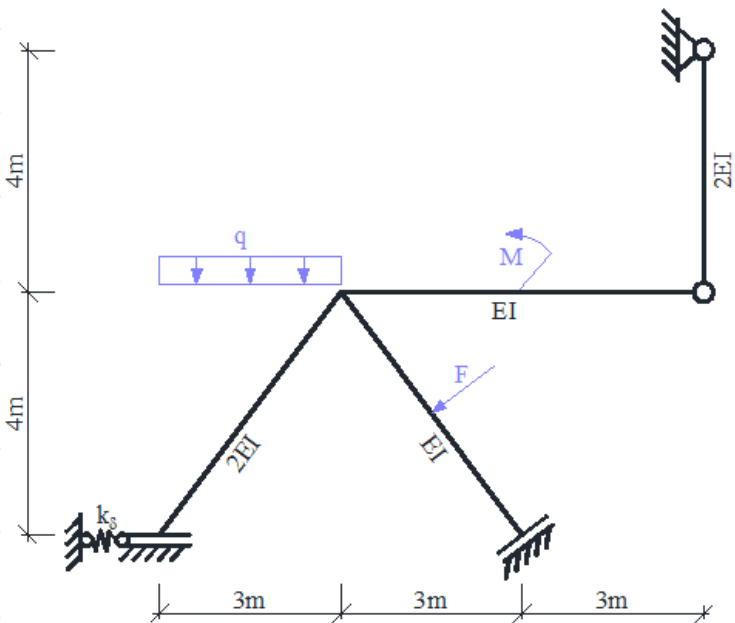


$$n_g = n_\phi + n_\delta = 2 + 2 = 4$$

Rys. 6. Układ podstawowy metody przemieszczeń

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku., dla której dobrano układ podstawowy metody przemieszczeń. Obliczyć współczynniki i wyrazy wolne układu równań metody przemieszczeń

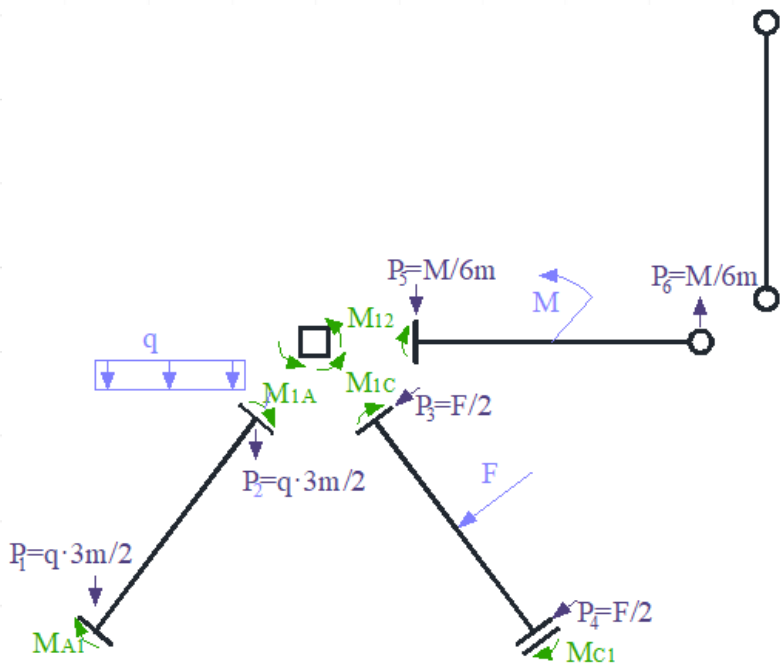


$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 1 = 2$$

Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$;
 $M = 20 \text{ kN m}$; $k_\delta = 8 \text{ EI/m}^3$,

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \delta_I = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -qL^2/12$ $V_{ij} = qL/2$		$M_{ji} = qL^2/12$ $V_{ji} = -qL/2$

$$M_{A1}^0 = -qL^2/12 = -\frac{4 \text{ kN/m} \cdot (3\text{m})^2}{12} = -3 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

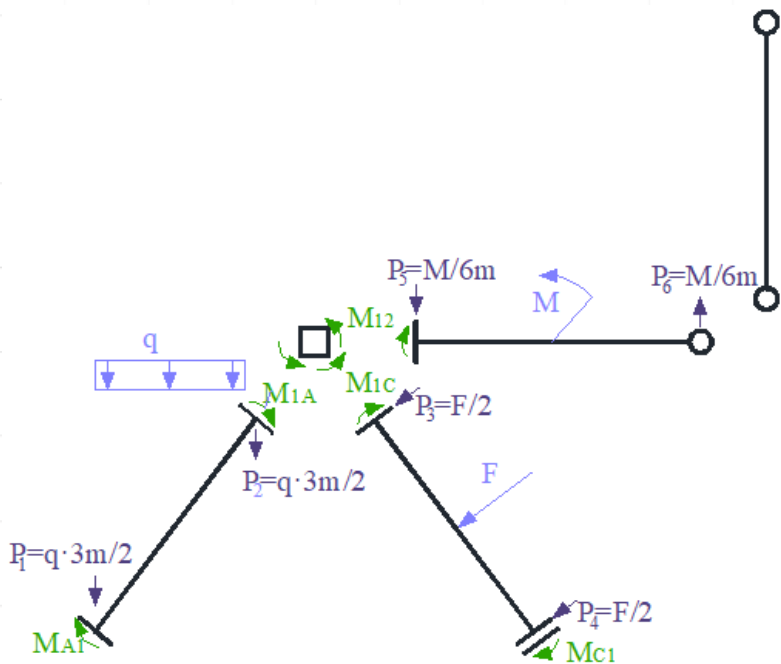
$$M_{L4}^0 = qL^2/12 = \frac{4 \text{ kN/m} \cdot (3\text{m})^2}{12} = 3 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$;

$M = 20 \text{ kN m}$; $k_\delta = 8 \text{ EI/m}^3$,

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_l = \delta_l = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



M_{ij} V_{ij}		M_{ji}
$M_{ij} = -3FL/8$		$M_{ji} = -FL/8$
$V_{ij} = F$		

$$M_{1C}^o = -3FL/8 = -\frac{3 \cdot 8 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}}{8} = -15 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

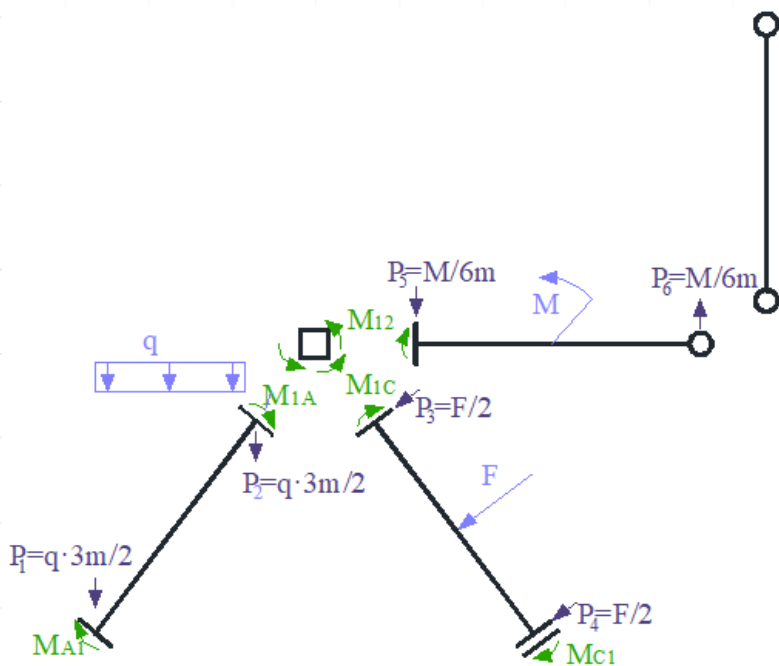
$$M_{C1}^o = -FL/8 = -\frac{8 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}}{8} = -5 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

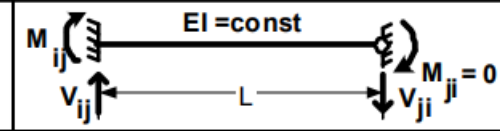


Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$;

$M = 20 \text{ kN m}$; $k_\delta = 8 \text{ EI/m}^3$,

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \delta_1 = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



M_{ij}		V_{ji}
V_{ij}		$M_{ji} = 0$
$M_{ij} = M/8$		$V_{ji} = -(9/8)M/L$
$V_{ij} = -(9/8)M/L$		

$$M_{12}^O = -M/8 = -\frac{24 \text{ kN} \cdot \text{m}}{8} = -3 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

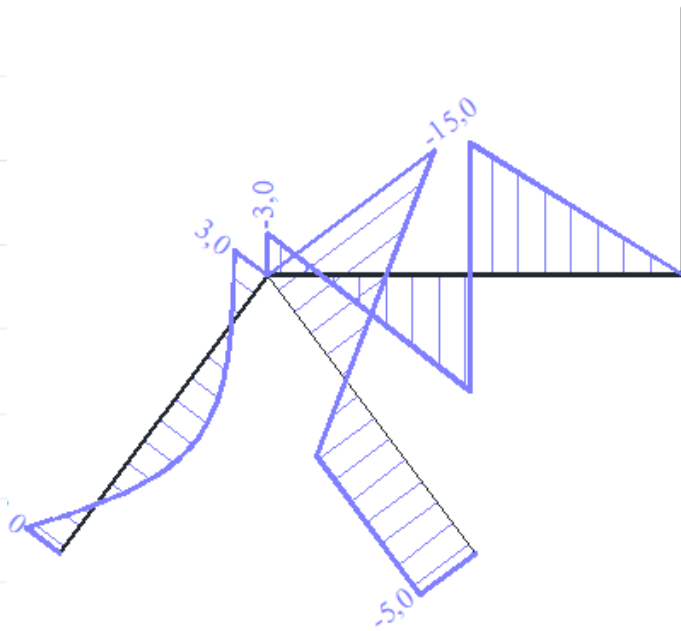
$$M_{21}^O = M_{2B}^O = M_{B2}^O = 0.$$

Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$;

$M = 20 \text{ kN m}$; $k_\delta = 8 \text{ EI/m}^3$,

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \delta_I = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



Wykres momentów M^O w $kN \cdot m$.

$$M_{14}^O = qL^2 / 12 = \frac{4kN / m \cdot (3m)^2}{12} = 3kN \cdot m,$$

$$M_{1c}^O = -3FL / 8 = -\frac{3 \cdot 8kN \cdot 5m}{8} = -15kN \cdot m,$$

$$M_{c1}^O = -FL / 8 = -\frac{8kN \cdot 5m}{8} = -5kN \cdot m,$$

$$M_{12}^O = -M / 8 = -\frac{24kN \cdot m}{8} = -3kN \cdot m,$$

$$M_{21}^O = M_{2B}^O = M_{B2}^O = 0.$$

Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

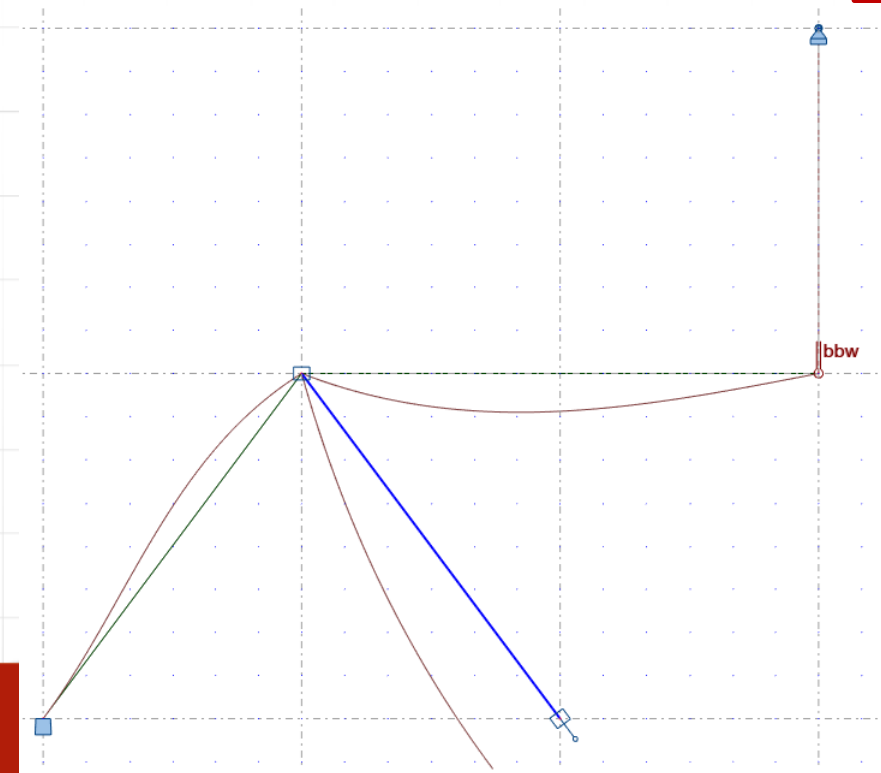
W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o,$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$



Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) =$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) =$$

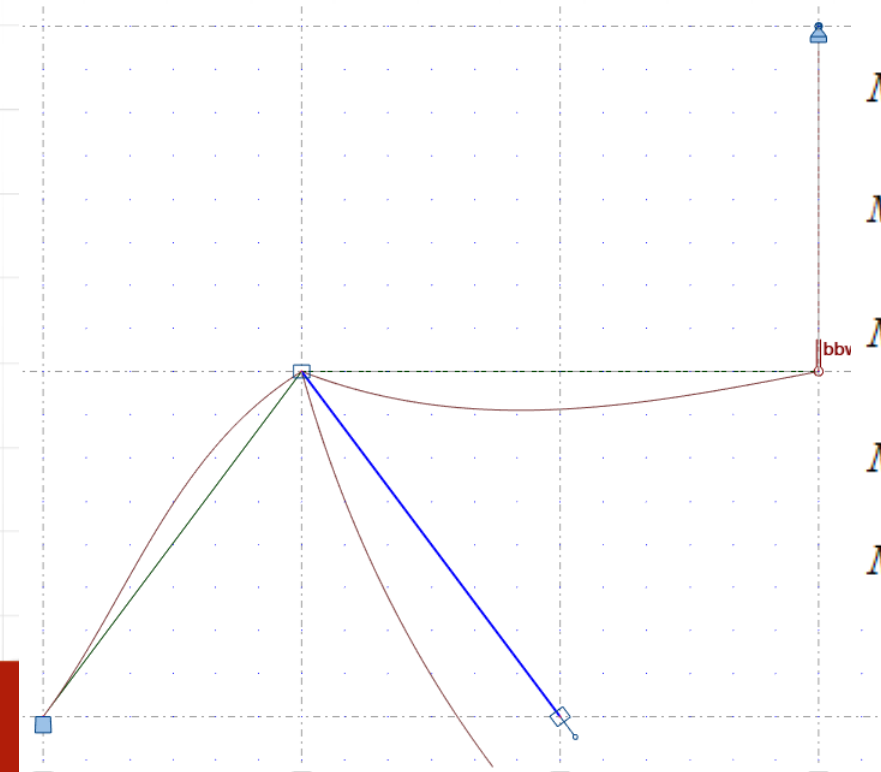
$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) =$$

$$M_{C1}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C}) =$$

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) =$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) =$$

$$M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$
		4	4	2
		3	0	0
		1	1	-1
		0	0	0
		0	0	0

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) =$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) =$$

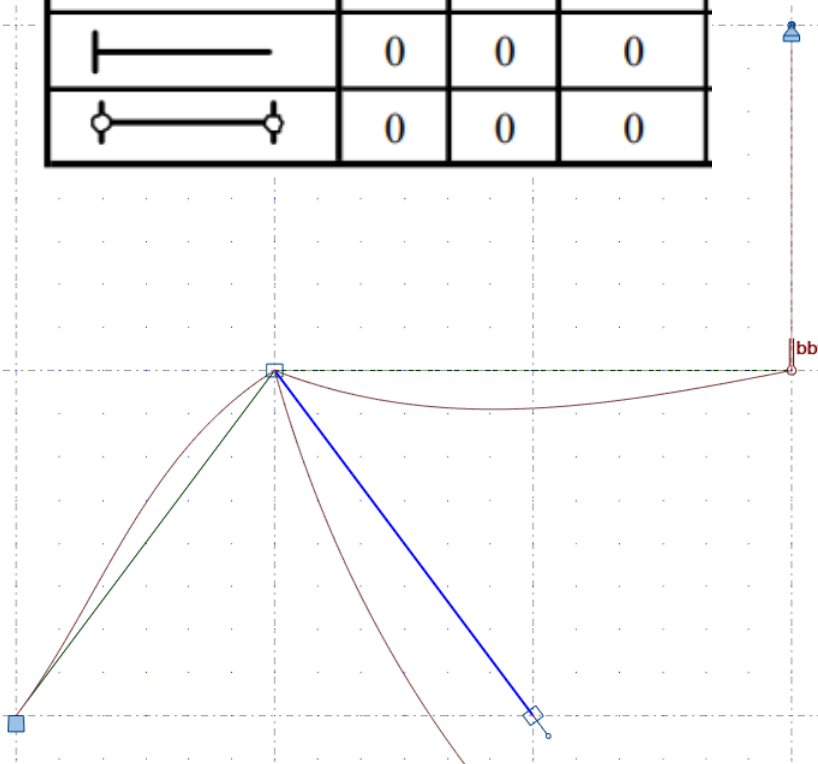
$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) =$$

$$M_{C1}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C}) =$$

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) =$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) =$$

$$M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{5m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{8EI}{5m},$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{5m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{4EI}{5m},$$

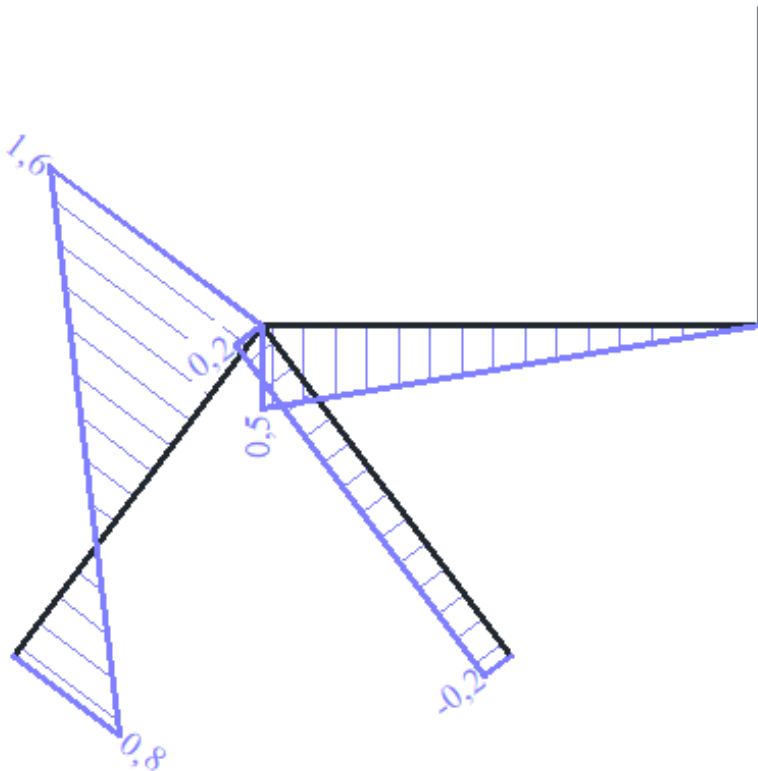
$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1EI}{5m},$$

$$M_{C1}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C}) = \frac{EI}{5m} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1EI}{5m},$$

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{1EI}{2m}$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{2EI}{5m} (4 \cdot 0 + 0) = 0$$

$$M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



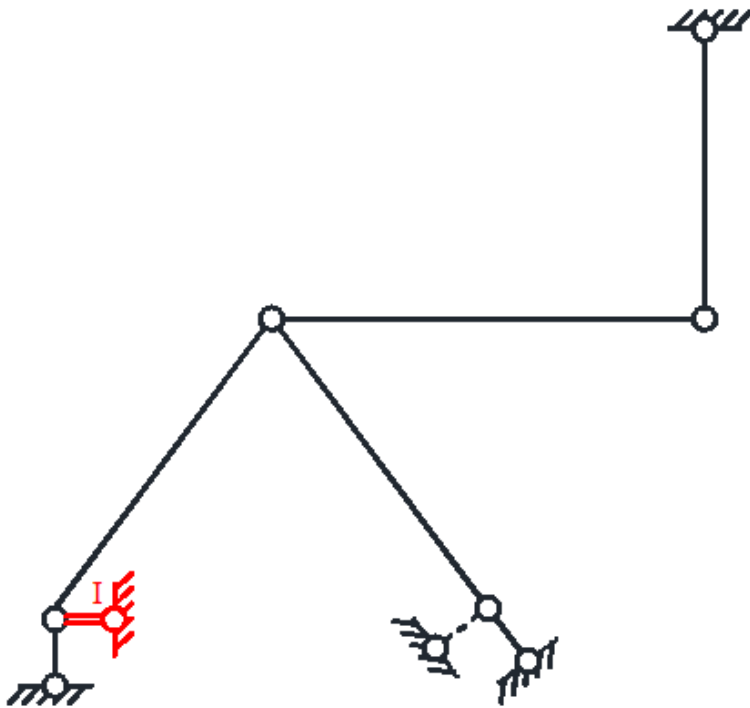
Wykres momentów M^I w EI/m .

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_1 = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

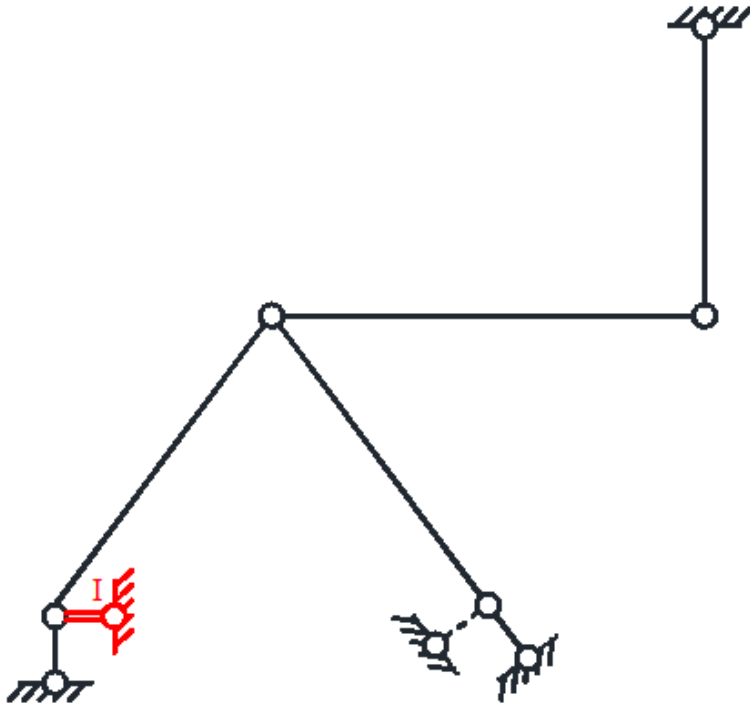
$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



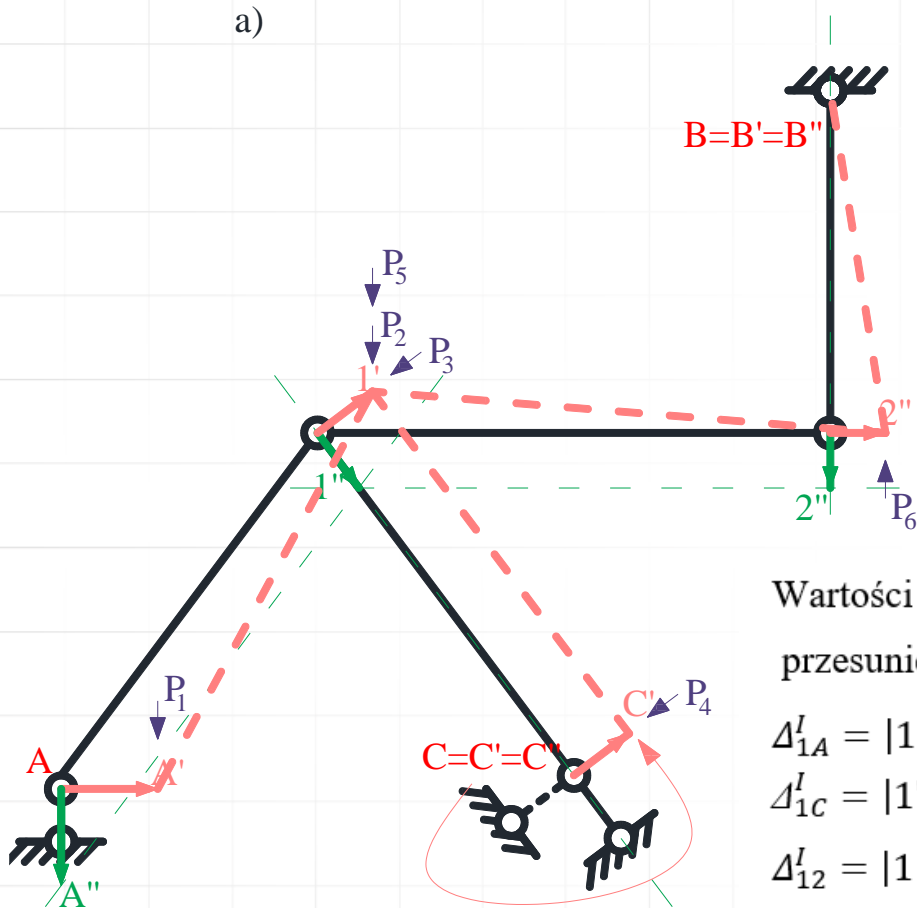
Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_1 = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

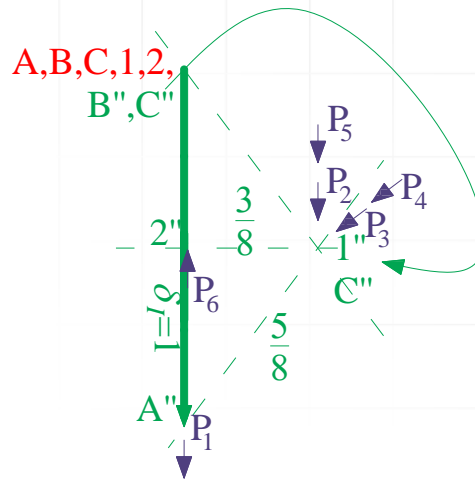


Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

a)



b)



Wartości wzajemnych

przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{1A}^I = |1''A''| = -\frac{5}{8},$$

$$\Delta_{1C}^I = |1''C''| = 0,$$

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = \frac{3}{8},$$

$$\Delta_{2B}^I = |2''B''| = -\frac{1}{2}.$$

Kąty obrotów cięćw

wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{0}{5m} = 0,$$

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$

Ćwiczenia audytoryjne nr 3

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

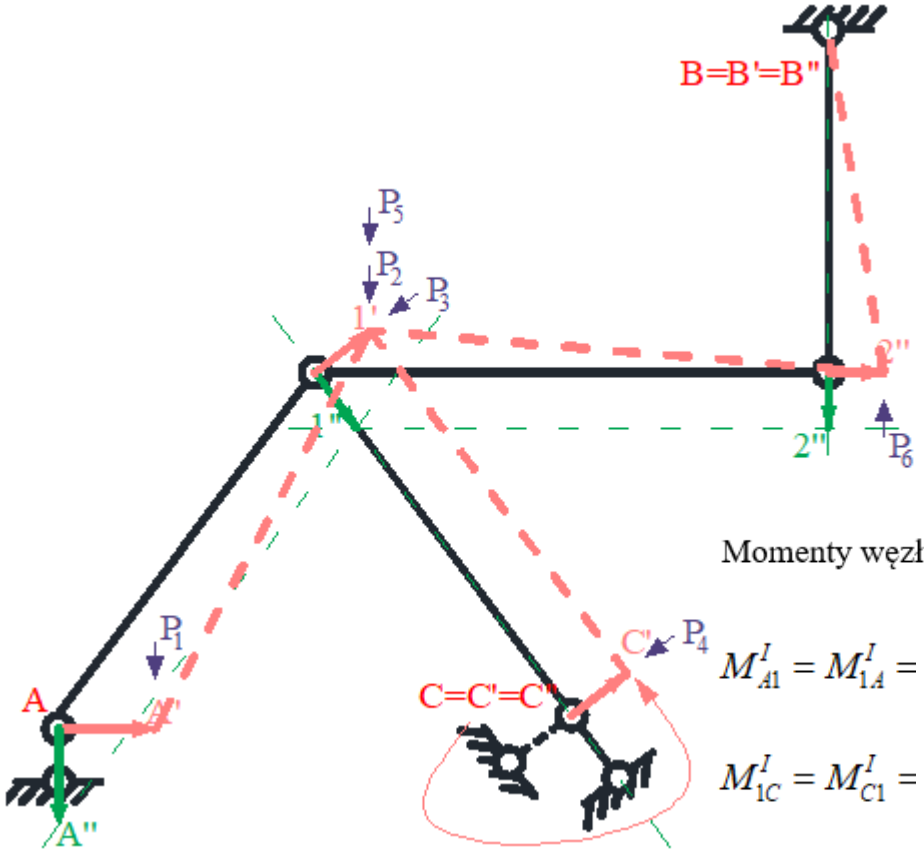
$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{0}{5m} = 0,$$

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$

i	j	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
┌───┐	┌───┐	6
┌───┐	○	3
┌───┐		0
┌───┐	┌───┐	0
○	○	0



Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{A1}^I = M_{1A}^I =$$

$$M_{1C}^I = M_{C1}^I =$$

$$M_{12}^I =$$

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{21}^I =$$

$$M_{2B}^I =$$

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

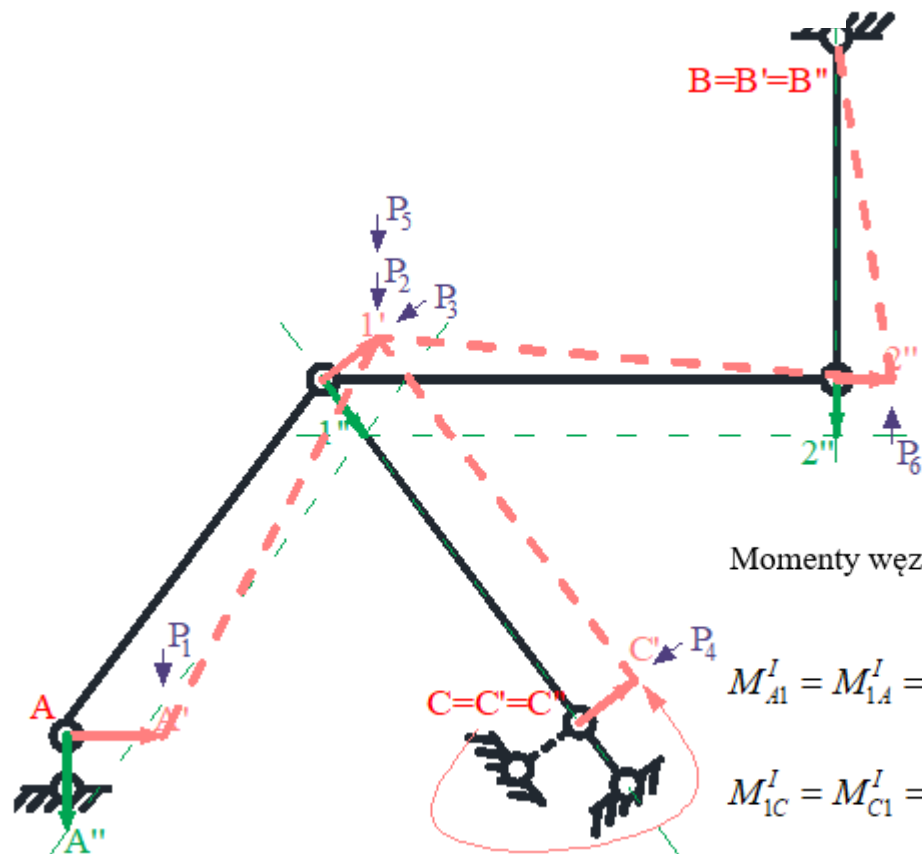
$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{0}{5m} = 0,$$

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$



Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_i wynoszą:

$$M_{A1}^I = M_{1A}^I = -\frac{EI_{1A}}{L_{1A}} \cdot c_{A1} \cdot \psi_{1A}^I = -\frac{2EI}{5m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) = \frac{3}{10} \frac{EI}{m^2},$$

$$M_{1C}^I = M_{C1}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$M_{12}^I = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^I = -\frac{EI}{6m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{16m} = -\frac{1}{32} \frac{EI}{m^2},$$

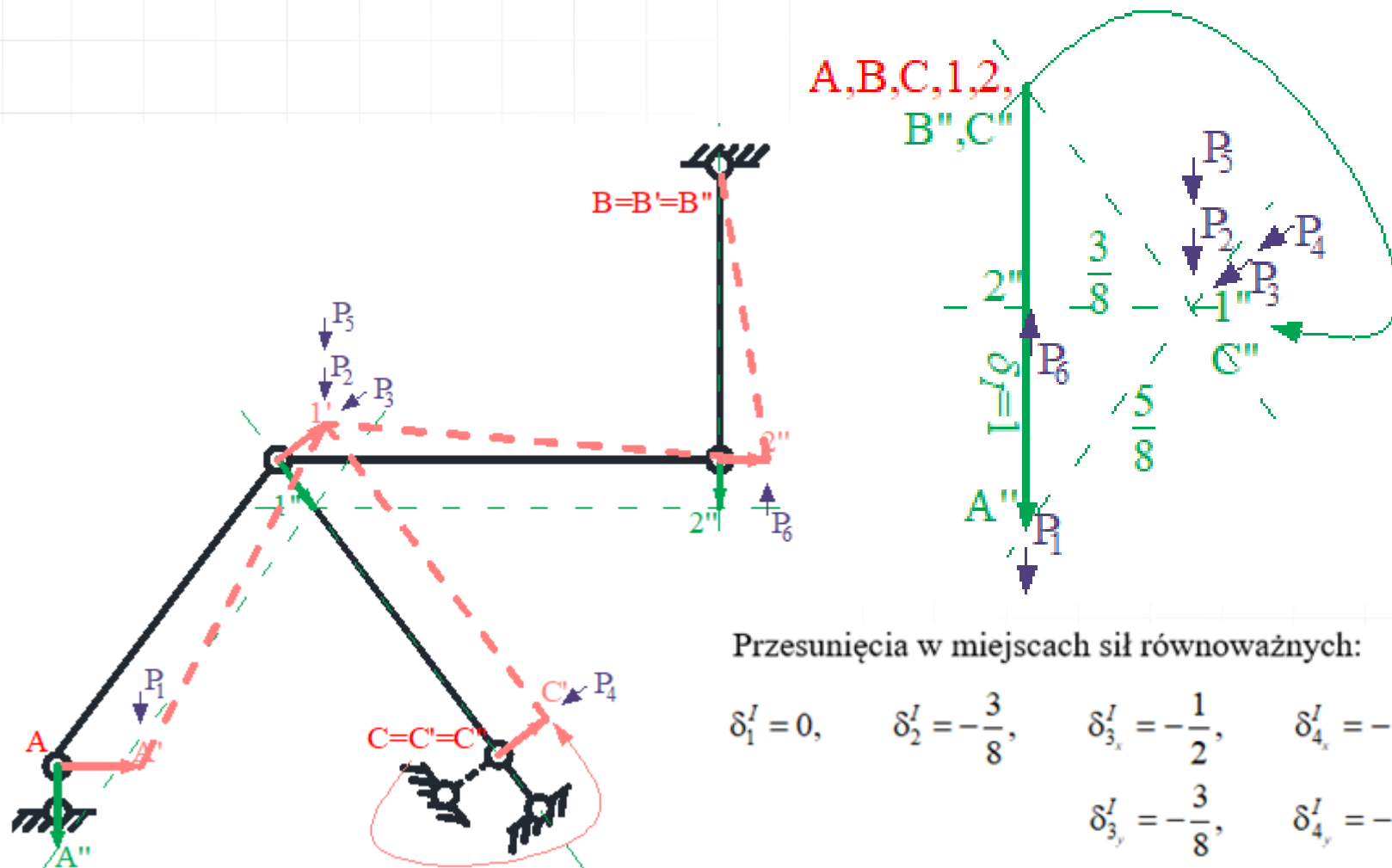
$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I,$$

$$M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

$$M_{21}^I = 0,$$

$$M_{2B}^I = M_{B2}^I = 0.$$

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego



Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^I = 0, \quad \delta_2^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_{3_x}^I = -\frac{1}{2}, \quad \delta_{4_x}^I = -\frac{1}{2}, \quad \delta_5^I = -\frac{3}{8},$$

$$\delta_{3_y}^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_{4_y}^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_6^I = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_3}^I = 1$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta'} = k_3 \cdot \Delta L_{k_3}^I = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 8 \frac{EI}{m^3}$

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

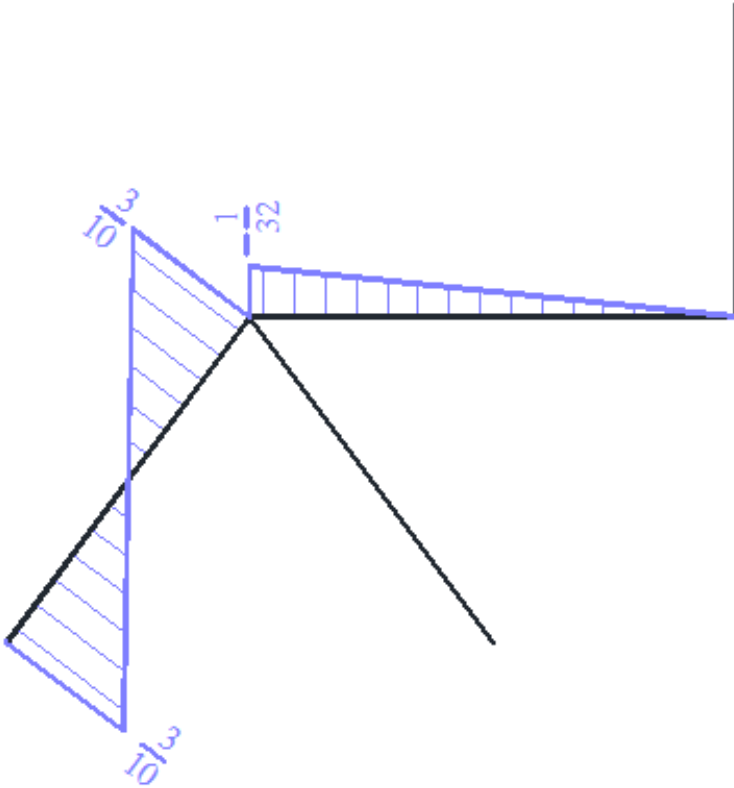
$$M_{A1}^I = M_{1A}^I = -\frac{EI_{1A}}{L_{1A}} \cdot c_{A1} \cdot \psi_{1A}^I = -\frac{2EI}{5m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) = \frac{3}{10} \frac{EI}{m^2},$$

$$M_{1C}^I = M_{C1}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$M_{12}^I = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^I = -\frac{EI}{6m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{16m} = -\frac{1}{32} \frac{EI}{m^2},$$

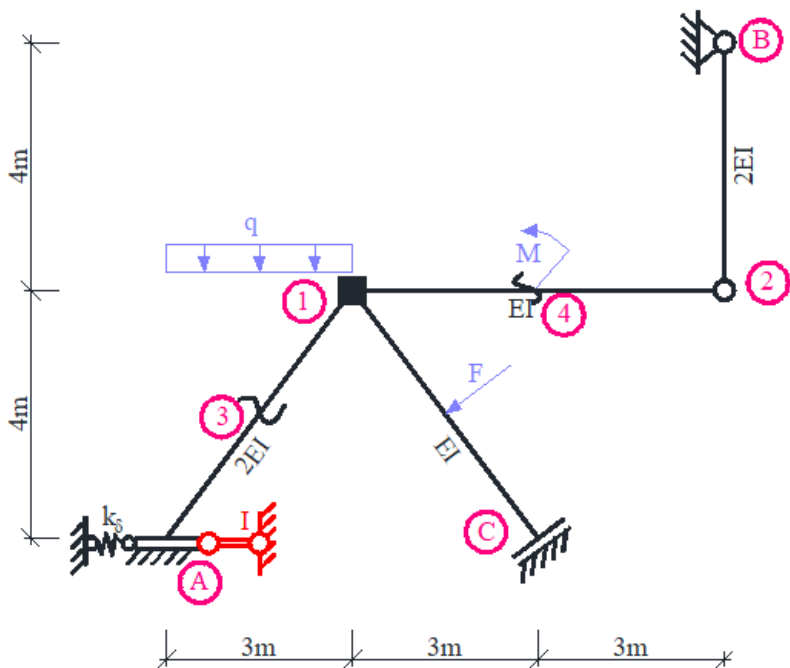
$$M_{21}^I = 0,$$

$$M_{2B}^I = M_{B2}^I = 0.$$



Wykres momentów M^I w EI/m^2 .

Postać ogólna układu równań metody przemieszczeń



$$\begin{bmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \dots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \dots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \dots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \dots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \dots & k_{In_\delta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \dots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \dots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n_\varphi} \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_{n_\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} \\ \vdots \\ k_{n_\varphi 0} \\ k_{I0} \\ \vdots \\ k_{n_\delta 0} \end{bmatrix} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi} & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi 0} \\ \mathbf{K}_{\delta 0} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_0 = 0$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}; \quad k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_i^\varphi = \sum_j a_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} + k_i^\varphi,$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\delta}; \quad k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^\beta = -\sum_j c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\beta$$

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{10} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I0} = 0$$

$$\mathbf{K}_{\delta 0}; \quad k_{i0} = \begin{cases} k_{iF} = \sum_j M_{ij}^{oF} - M_i^o \\ k_{i\Delta} = \sum_j M_{ij}^{o\Delta} \\ k_{i\Lambda} = \sum_j M_{ij}^{oT} \end{cases}$$

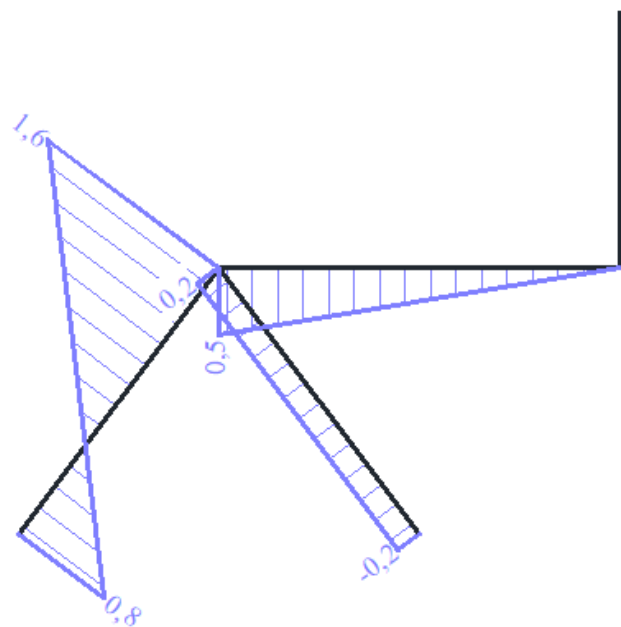
Ćwiczenia audytoryjne nr 3

Obliczenie współczynników układu równań

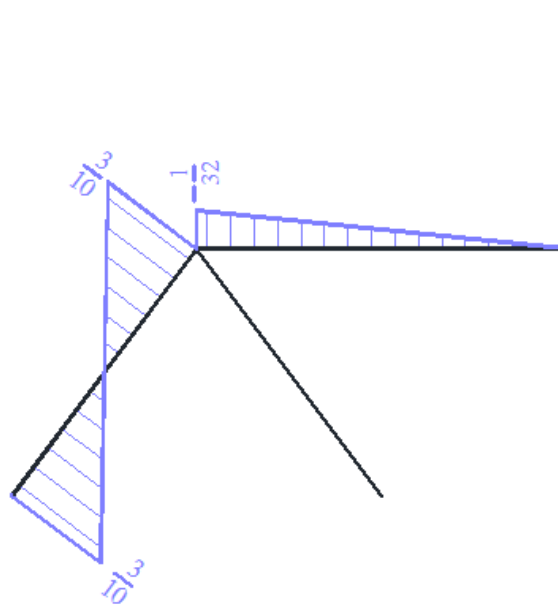
$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^\varphi = 0,5 \frac{EI}{m} + 1,6 \frac{EI}{m} + 0,2 \frac{EI}{m} = 2,3 \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = -0,0313 \frac{EI}{m^2} + 0,3 \frac{EI}{m^2} + 0 = 0,3313 \frac{EI}{m^2},$$

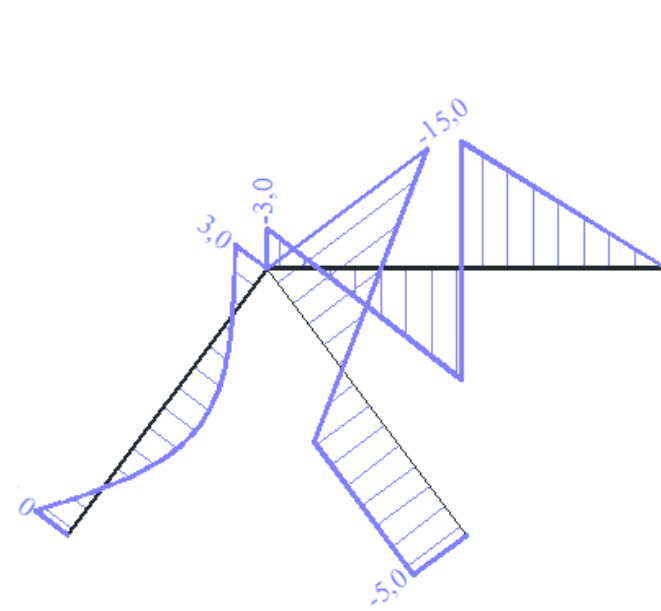
$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o - M = M_{12}^o + M_{1A}^o + M_{1C}^o = -3kN \cdot m + 3kN \cdot m - 15kN \cdot m = -15kN \cdot m,$$



Wykres momentów M^1 w EI/m .

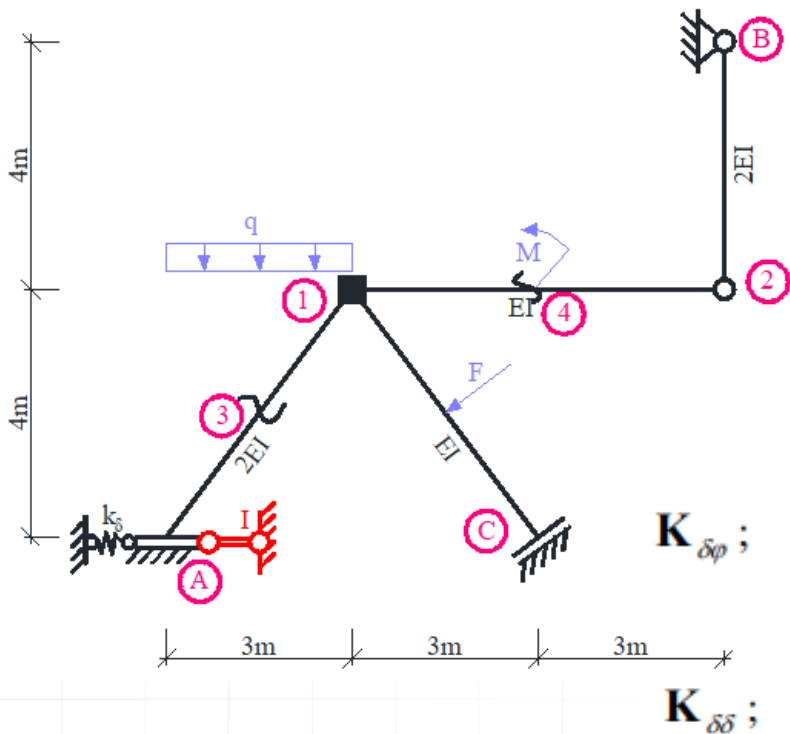


Wykres momentów M^I w EI/m^2 .



Wykres momentów M^o w $kN \cdot m$.

Postać ogólna układu równań metody przemieszczeń



$$\begin{bmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \dots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \dots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \dots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \dots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \dots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \dots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \dots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n_\varphi} \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_{n_\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} \\ \vdots \\ k_{n_\varphi 0} \\ k_{I0} \\ \vdots \\ k_{n_\delta 0} \end{bmatrix} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi} & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi 0} \\ \mathbf{K}_{\delta 0} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_o = 0$$

$$k_{\alpha\beta} = -\sum_j (M_{ij}^j + M_{ji}^j) \cdot \psi_{ij}^\alpha = -\sum_j c_{ji} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\alpha$$

$$k_{\alpha\beta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^\beta + M_{ji}^\beta) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta = \sum_{ij} d_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\alpha \cdot \psi_{ij}^\beta + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta$$

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{10} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I0} = 0$$

Ćwiczenia audytoryjne nr 3

Obliczenie współczynników układu równań

$$k_{I1} = -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I =$$

$$= -\left(0,5 \frac{EI}{m} + 0\right) \frac{1}{16m} - \left(1,6 \frac{EI}{m} + 0,8 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) - \left(0,2 \frac{EI}{m} - 0,2 \frac{EI}{m}\right) \cdot (0) - (0+0) \cdot (0) = 0,3313 \frac{EI}{m^2}$$

$$k_{I,I} = -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I -$$

$$-(M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I + k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I = \left(-0,0313 \frac{EI}{m^2} + 0\right) \frac{1}{16m} - \left(0,3 \frac{EI}{m^2} + 0,3 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) - (0+0) \cdot (0) -$$

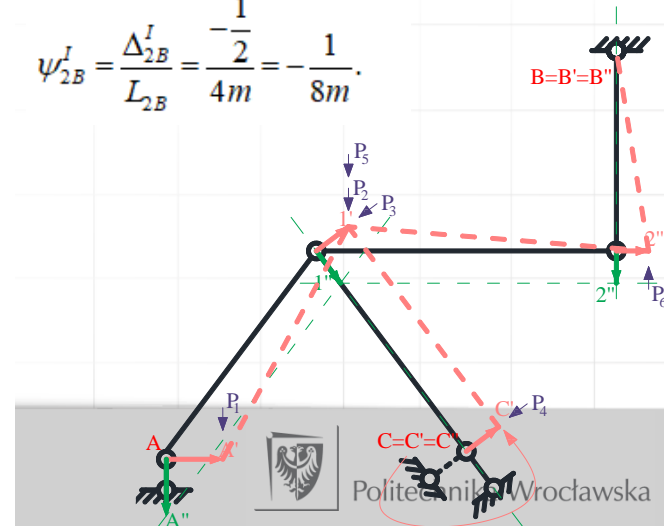
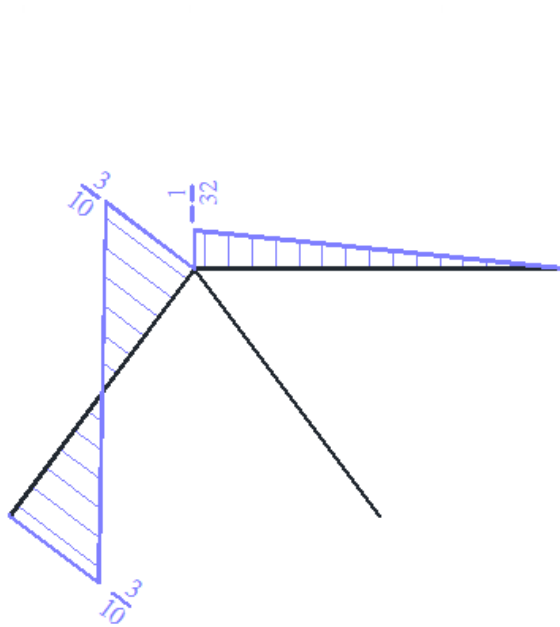
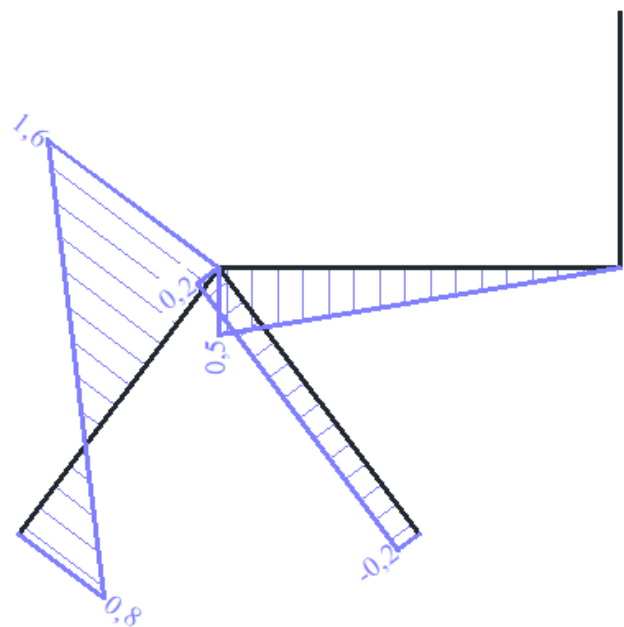
$$-(0+0) \cdot (0) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,0770 \frac{EI}{m^3},$$

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\Delta L_{k_s}^I = 1$$

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$

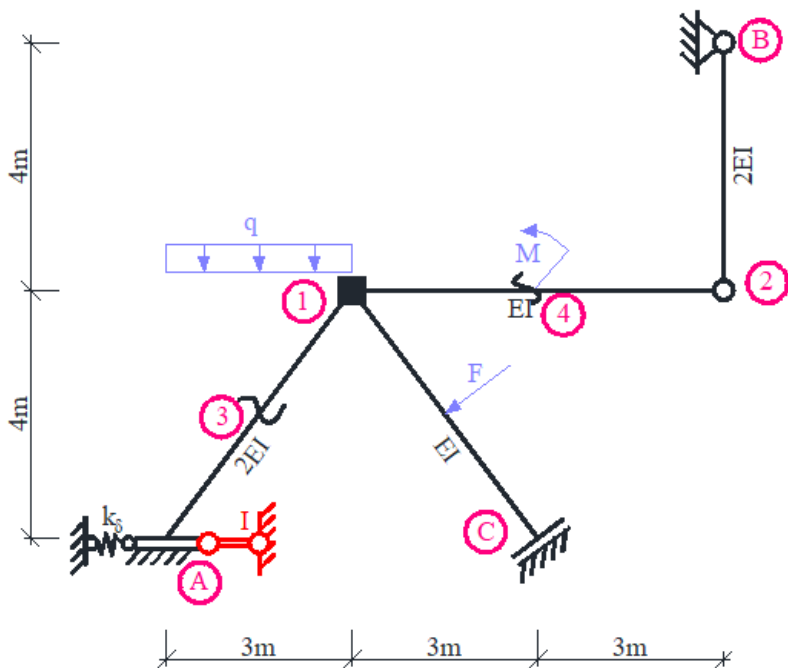


Rys. 5.2.1. Wykres momentów M^I w EI/m .

Rys. 5.3.2. Wykres momentów M^I w EI/m^2 .



Postać ogólna układu równań metody przemieszczeń



$$\begin{bmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \dots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \dots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \dots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \dots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \dots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \dots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \dots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n_\varphi} \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_{n_\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} \\ \vdots \\ k_{n_\varphi 0} \\ k_{I0} \\ \vdots \\ k_{n_\delta 0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi} & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi 0} \\ \mathbf{K}_{\delta 0} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$$

$\mathbf{K}_{\delta 0}$;

$$k_{\alpha\omega} = \begin{cases} k_{\alpha F} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oF} + M_{ji}^{oF}) \cdot \psi_{ij}^\alpha - \sum_f F_f \cdot \delta_f^\alpha \\ k_{\alpha\Delta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{o\Delta} + M_{ji}^{o\Delta}) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^{o\Delta} \\ k_{\alpha T} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oT} + M_{ji}^{oT}) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^{oT} \end{cases}$$

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{10} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I0} = 0$$

Obliczenie współczynników układu równań

$$\begin{aligned}
 k_{10} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I = -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^I - (M_{1A}^o + M_{A1}^o) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^o + M_{C1}^o) \psi_{1C}^I - \\
 &- (M_{2B}^o + M_{B2}^o) \psi_{2B}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - P_2 \cdot \delta_2^I - P_{3x} \cdot \delta_{3x}^I - P_{3y} \cdot \delta_{3y}^I - P_{4x} \cdot \delta_{4x}^I - P_{4y} \cdot \delta_{4y}^I - P_5 \cdot \delta_5^I - P_6 \cdot \delta_6^I = \\
 &= -(-3kN \cdot m + 0) \frac{1}{16m} - (3 - kN \cdot m + 3kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) - (-15kN \cdot m - 3kN \cdot m) \cdot (0) - (0 + 0) \cdot (0) - \\
 &- 3kN \cdot 0 - 3kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 3,2kN \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2,4kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 3,2kN \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2,4kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 4kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - \\
 &- 4kN \cdot 0 = 8,9375kN.
 \end{aligned}$$

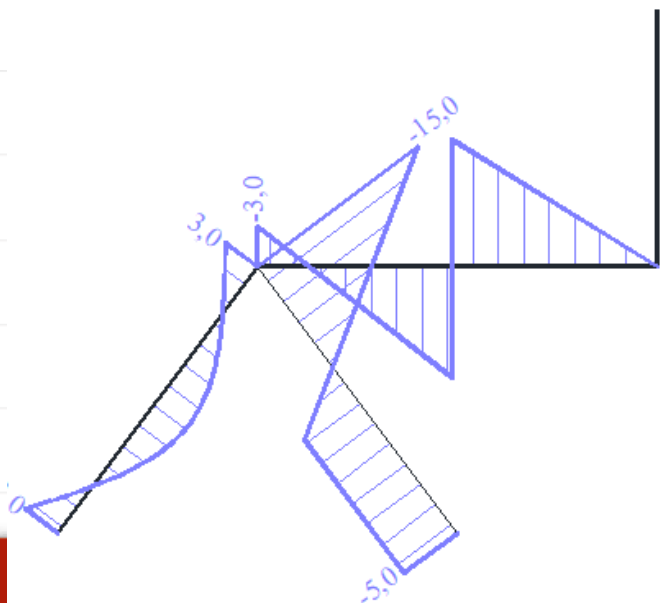
$$\delta_1^I = 0, \quad \delta_2^I = -\frac{3}{8}, \quad \psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\delta_{3x}^I = -\frac{1}{2}, \quad \delta_{4x}^I = -\frac{1}{2}, \quad \psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

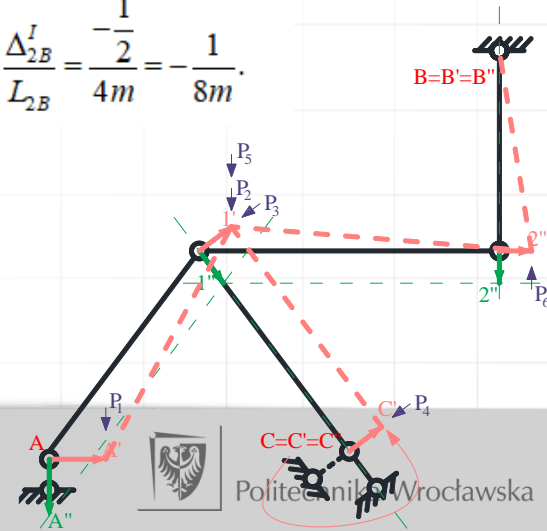
$$\delta_{3y}^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_{4y}^I = -\frac{3}{8}, \quad \psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$

$$\delta_5^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_6^I = 0.$$

$$\delta_5^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_6^I = 0.$$



Wykres momentów M^o w $kN \cdot m$.



Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń

$$2,3 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3313 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_1 - 15kN \cdot m = 0$$

$$0,3313 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 8,0770 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_1 + 8,9375kN = 0$$

$$\varphi_1 = 6,6770 \frac{kN \cdot m^2}{EI}, \quad \delta_1 = -1,3287 \frac{kN \cdot m^3}{EI}.$$

Obliczenie momentów brzegowych i sił w więziach sprężystych

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^o,$$

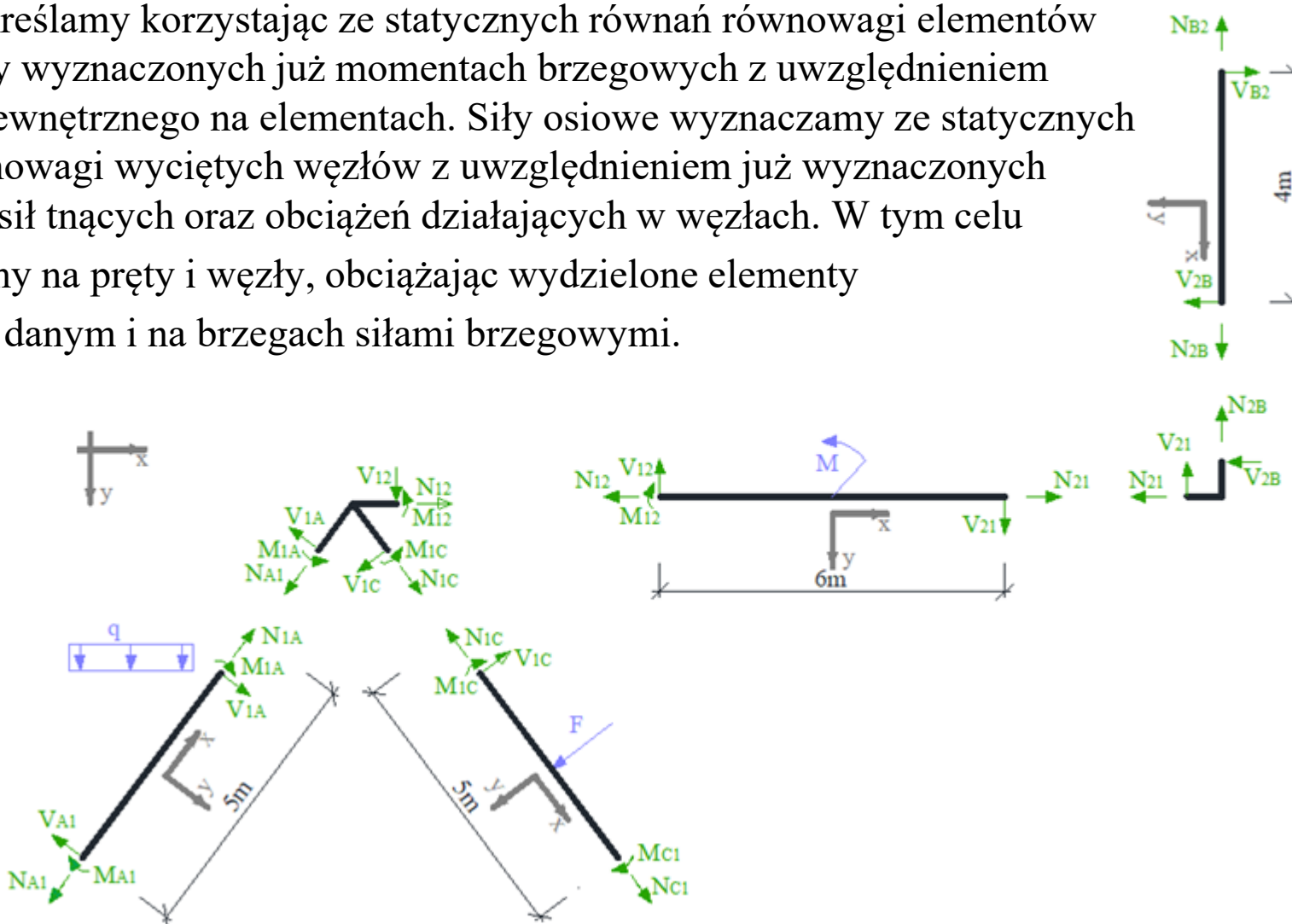
Pręt	Punkt	$\frac{M_{ij}^1}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^2}{m}$	$\frac{\varphi_1}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^2}{EI}$	$\frac{M_{ij}^I}{EI}$ $\frac{m^2}{m^2}$	$\frac{\delta_I}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^3}{EI}$	$\frac{M_{ij}^o}{kN \cdot m}$	$\frac{M_{ij}}{kN \cdot m}$
1A	A	0,8	6,6770	0,3	-1,3287	-3,0	1,9430
	1	1.6		0,3		3,0	13,2846
1C	1	0,2		0		-15,0	-13,6646
	C	-0,2		0		-5,0	-6,3354
12	1	0,5		-0,0313		-3,0	0,3800
	2	0		0		0	0
2B	2	0		0		0	0
	B	0		0		0	0

Siła więzi sprężystej:

$$S_\delta = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot (-1,3287) \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -10,6296 kN$$

Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



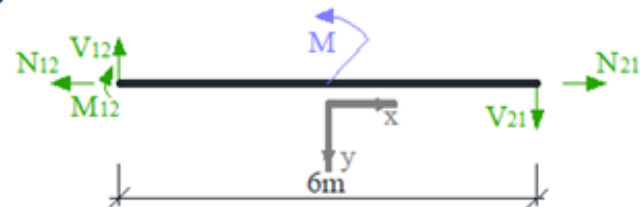
Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12} - M + V_{21} \cdot 6m = [0,3800 - 24 + V_{21} \cdot 6] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{21} = 3,936$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = [V_{12} - 3,9456] kN = 0 \Rightarrow V_{12} = 3,9367 kN$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}$$



Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C} + M_{C1} + V_{1C} \cdot 5m - F \cdot 2,5m = [-13,6646 - 6,3354 + V_{1C} \cdot 5 - 8 \cdot 2,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = 8 kN,$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + M_{C1} + F \cdot 2,5m = [-13,6646 - 6,3354 + 8 \cdot 2,5] kN \cdot m = 0,$$

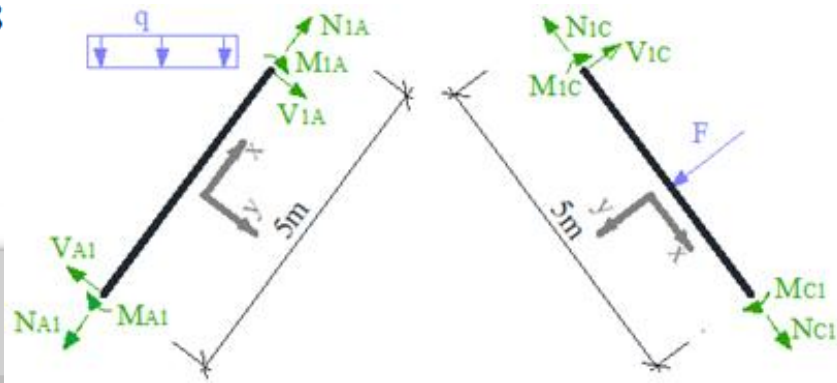
$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C}$$

Pręt 1-A

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m = [1,9430 + 13,2846 + V_{1A} \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1A} = -6,6455 kN,$$

$$\sum M_1 = M_{A1} + M_{1A} + V_{A1} \cdot 4m - q \cdot 3m \cdot 1,5m = [1,9430 + 13,2846 + V_{A1} \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{A1} = 0,5545 kN,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} + q \cdot 3m \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A} - 4 kN / m \cdot 3m \cdot 0,8$$



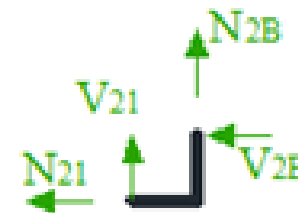
Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} = [0 + 0] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = [0 + N_{21}] kN = 0 \Rightarrow N_{21} = 0,$$

$$\sum Y = V_{21} + N_{2B} = [3,9367 + N_{2B}] kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = -3,9367 kN.$$



Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2} = N_{2B} = -3,9367 kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12} = N_{21} = 0$.

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1C} = [0,3800 + 13,2846 + (-13,6646)] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = N_{12} + N_{1C} \cdot 0,6 - V_{1C} \cdot 0,8 - N_{1A} \cdot 0,6 - V_{1A} \cdot 0,8 = [0 + N_{1C} \cdot 0,6 - 8 kN \cdot 0,8 - N_{1A} \cdot 0,6 - (-6,6455) \cdot 0,8] kN = 0$$

$$\sum Y = -V_{12} + N_{1C} \cdot 0,8 + V_{1C} \cdot 0,6 + N_{1A} \cdot 0,6 - V_{1A} \cdot 0,6 = [-3,9367 + N_{1C} \cdot 0,8 + 8 kN \cdot 0,6 + N_{1A} \cdot 0,8 - (-6,6455) \cdot 0,6] kN$$

$$\Rightarrow N_{1A} = -8,8555 kN, \quad N_{1C} = -7,0495 kN$$



Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Obliczenie momentów zginających

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = 1,9430 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = -13,2846 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = -13,6646 kN \cdot m,$$

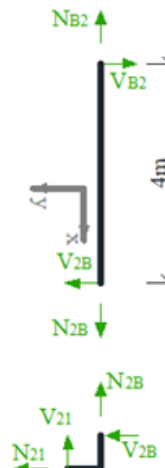
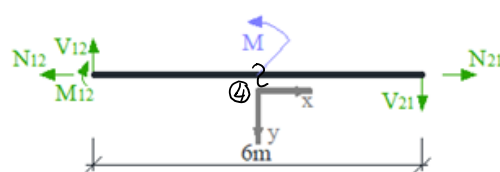
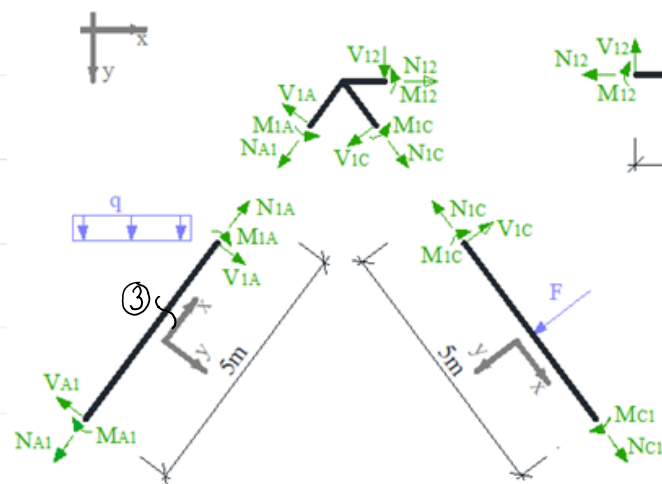
$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 6,3354$$

$$M_{zgin,21} = M_{21} = 0$$

$$M_{zgin,12} = M_{12} = 1,6034 kN \cdot m = 0,3800 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,B2} = M_{B2} = 0$$

$$M_{zgin,2B} = -M_{2B} = 0,$$

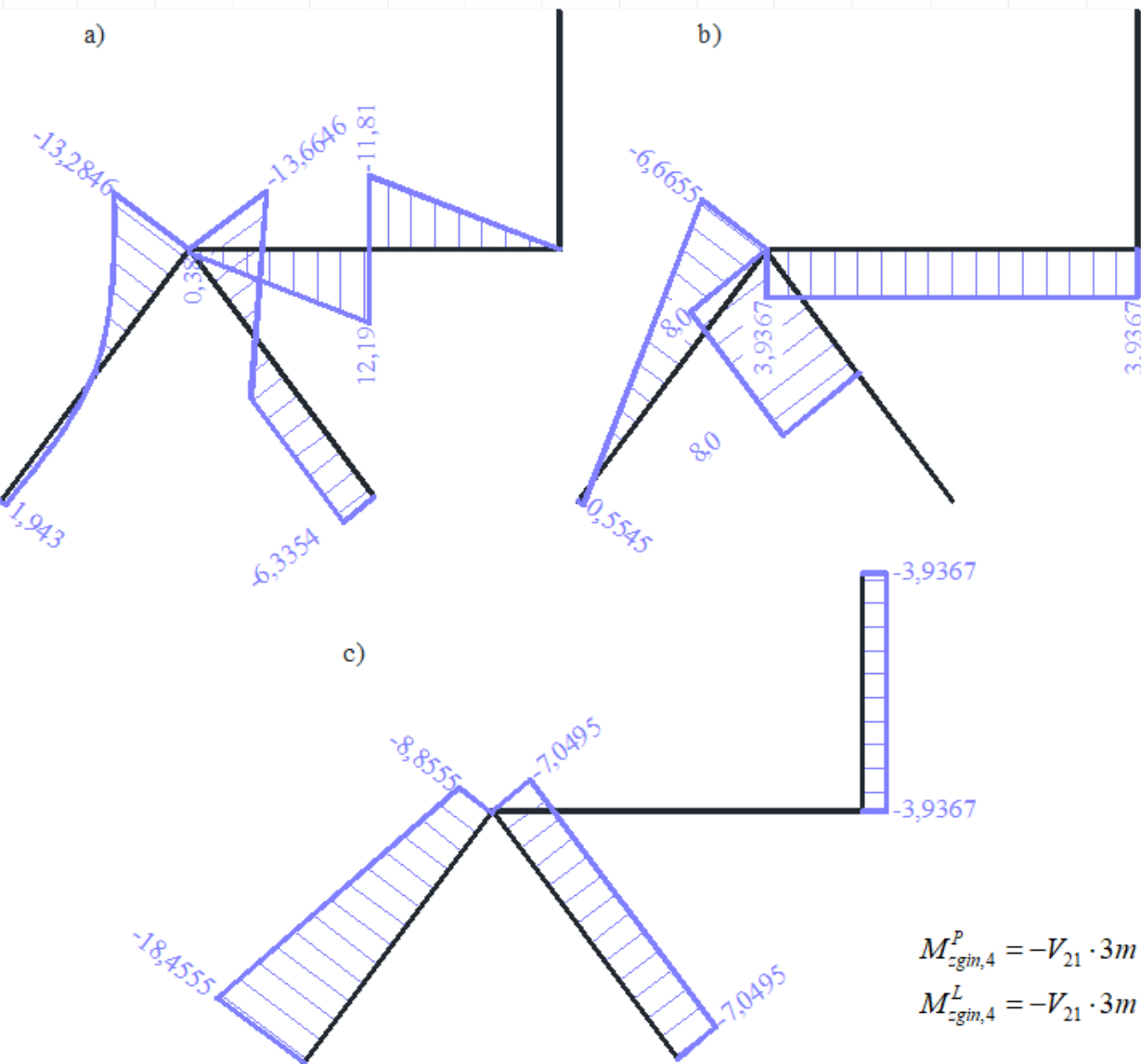


$$M_{zgin,3} = M_{A1} + V_{A1} \cdot 2,5m - q \cdot 1,5m \cdot \frac{1,5m}{2} = [1,9430 + 0,5545 \cdot 2,5m - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75] kN \cdot m = -1,1708 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,4}^P = -V_{21} \cdot 3m = -3,9367 kN \cdot 3m = -11,8100 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,4}^L = -V_{21} \cdot 3m + M = -3,9367 kN \cdot 3m + 24 kN \cdot m = 12,1900 kN \cdot m$$

Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów



Obliczenie momentów zginających

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = 1,9430 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = -13,2846 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = -13,6646 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 6,3354$$

$$M_{zgin,21} = M_{21} = 0$$

$$M_{zgin,12} = M_{12} = 1,6034 kN \cdot m = 0,3800 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,B2} = M_{B2} = 0$$

$$M_{zgin,2B} = -M_{2B} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_{zgin,3} &= M_{A1} + V_{A1} \cdot 2,5m - q \cdot 1,5m \cdot \frac{1,5m}{2} = \\ &= [1,9430 + 0,5545 \cdot 2,5m - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75] kN \cdot m = \\ &= -1,1708 kN \cdot m \end{aligned}$$

$$M_{zgin,4}^P = -V_{21} \cdot 3m = -3,9367 kN \cdot 3m = -11,8100 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,4}^L = -V_{21} \cdot 3m + M = -3,9367 kN \cdot 3m + 24 kN \cdot m = 12,1900 kN \cdot m$$

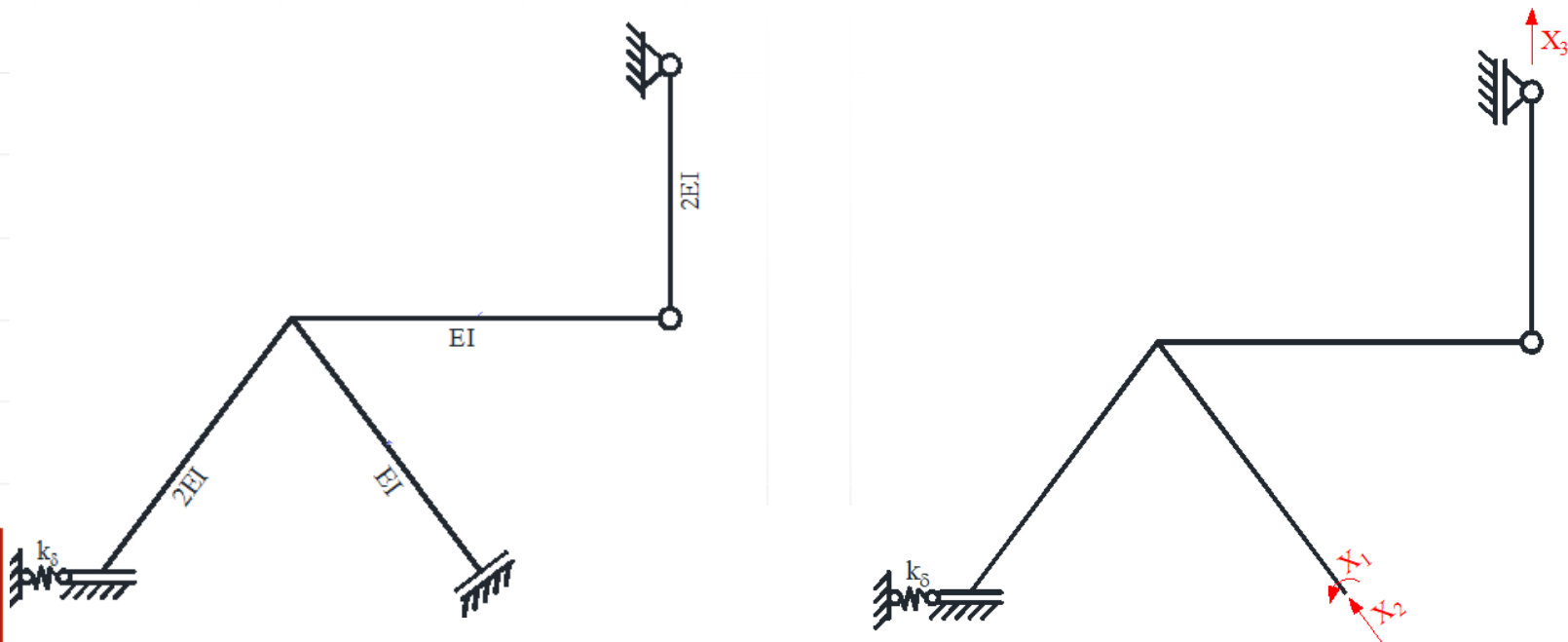
Wykres a) momentów zginających M w $kN \cdot m$ b) sił tnących V w kN ,
c) sił osiowych N w kN



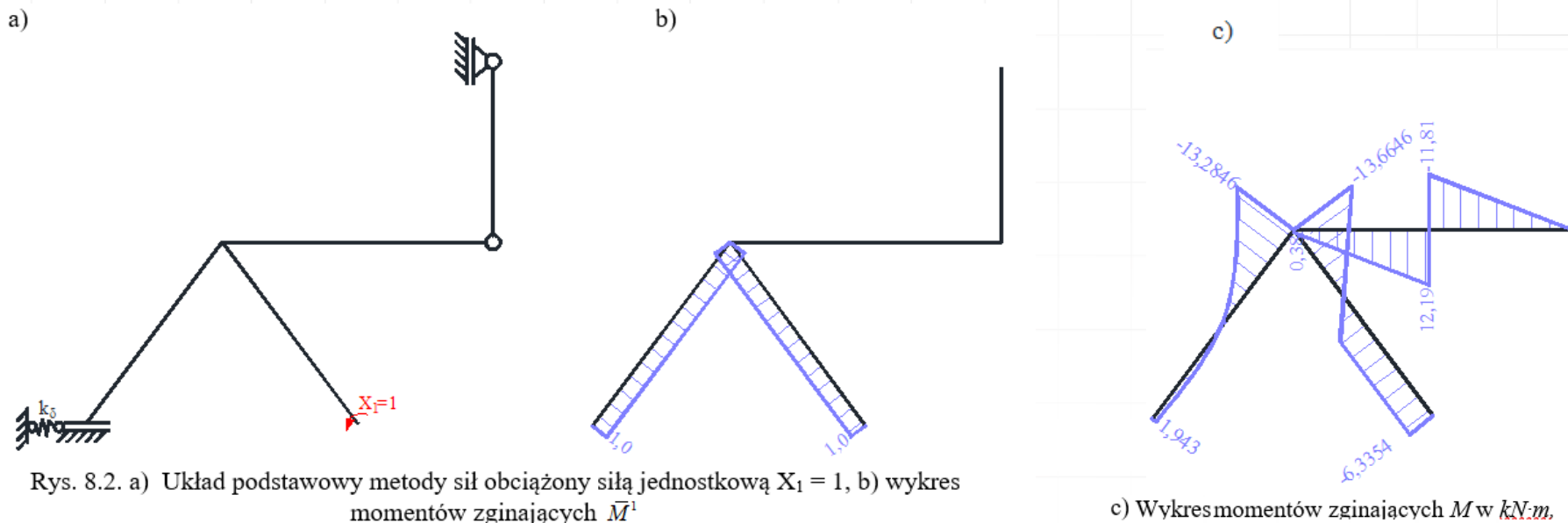
Kontrola kinematyczna rozwiązania

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając trzy więzi podporowe. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$



Kontrola kinematyczna rozwiązania



Rys. 8.2. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^1

c) Wykres momentów zginających M w $kN \cdot m$.

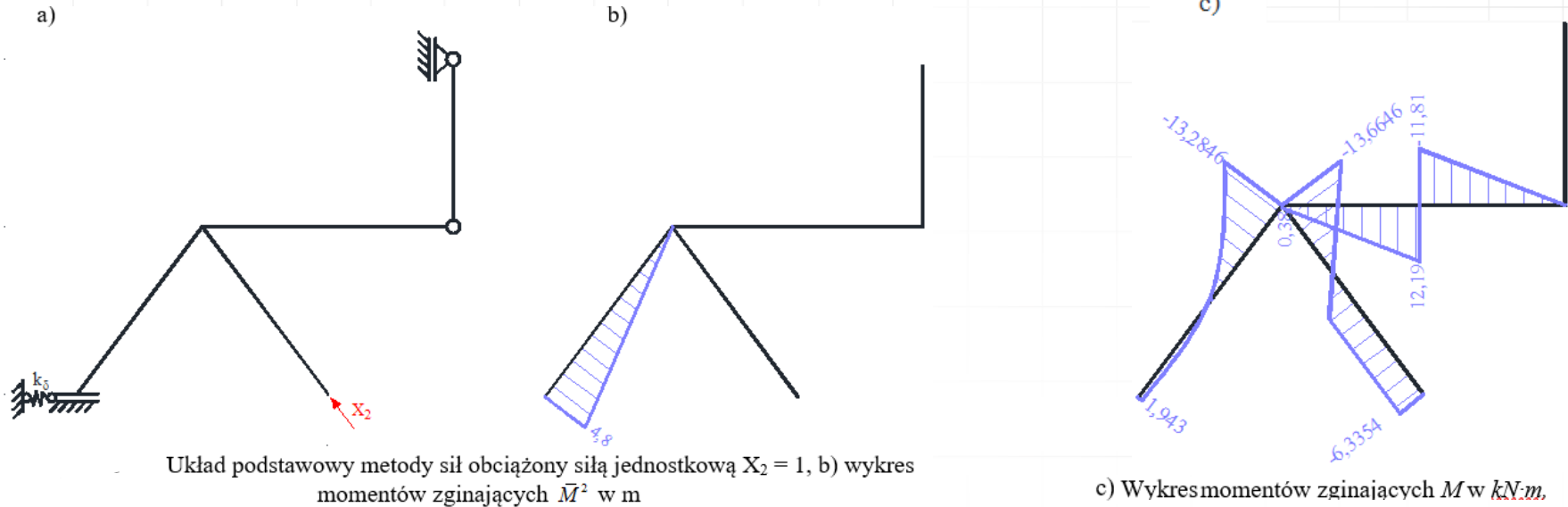
Siła w więzi sprężystej: $S_\delta^1 = 0$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [1 \cdot 1,9430 kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-1,1708) kN \cdot m + 1 \cdot (-13,3846) kN \cdot m]$$

$$+ \frac{2,5m}{6 \cdot EI} [1 \cdot (-13,6646) kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-3,6646) kN \cdot m + 1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m] +$$

$$+ \frac{2,5m}{6 \cdot EI} [1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m + 1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m] + \frac{0 \cdot (-10,6296) kN}{8 \frac{EI}{m^3}} \Bigg\} = 0$$

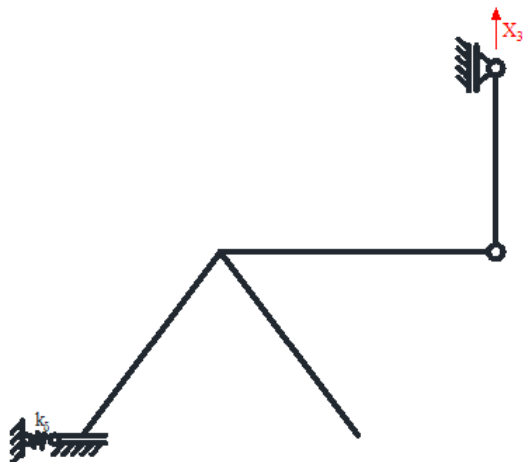
Kontrola kinematyczna rozwiązania



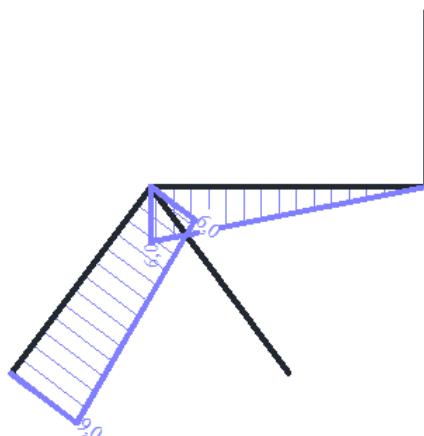
$$\Delta_{2F} = \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [4,8m \cdot 1,9430 kN \cdot m + 4 \cdot 2,4m \cdot (-1,1708) kN \cdot m + 0 \cdot (-13,3846) kN \cdot m] + \frac{(-0,6) \cdot (-10,6296) kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = 0$$

Kontrola kinematyczna rozwiązania

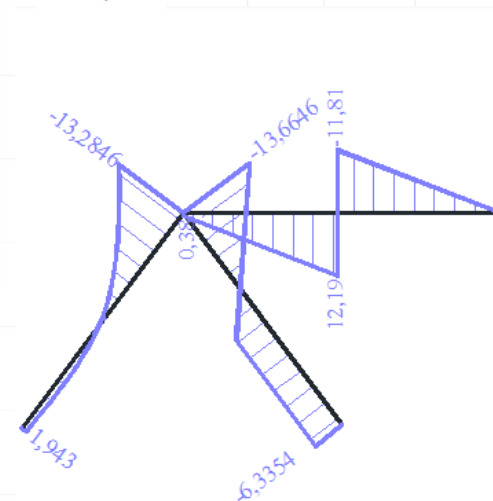
a)



b)



c)



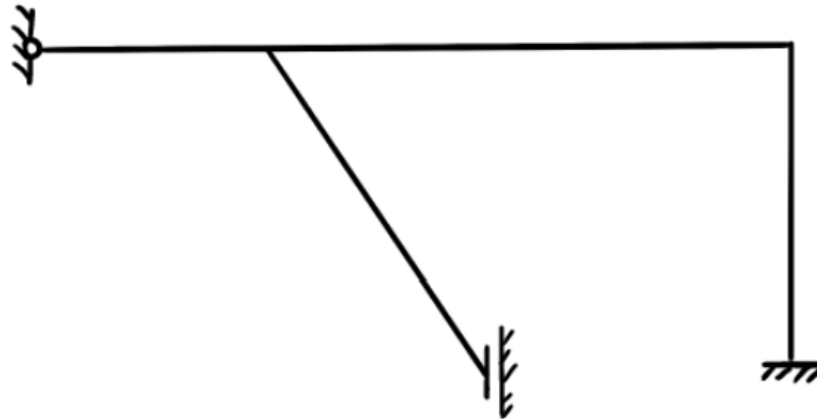
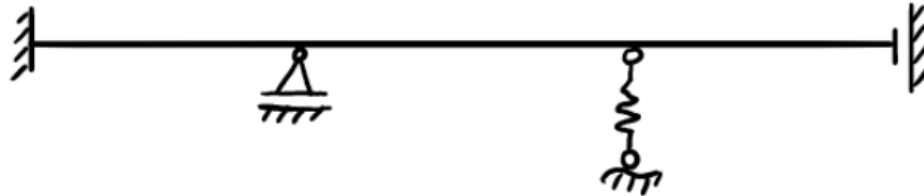
Rys. 8.4. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_3 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^3 w m

c) Wykres momentów zginających M w $kN \cdot m$.

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^3 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{3F} &= \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [9m \cdot 1,9430 kN \cdot m + 4 \cdot 7,5m \cdot (-1,1708) kN \cdot m + 6m \cdot (-13,3846) kN \cdot m] \\ &+ \frac{3m}{6 \cdot EI} [6m \cdot 0,3800 kN \cdot m + 4 \cdot 4,5m \cdot 6,2850 kN \cdot m + 3m \cdot 12,1900 kN \cdot m] + \\ &+ \frac{3m}{6 \cdot EI} [6m \cdot (-11,8100) kN \cdot m + 4 \cdot 4,5m \cdot (-5,905 -) kN \cdot m + 3m \cdot 0 kN \cdot m] + \frac{0 \cdot (-10,6296) kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = 0 \end{aligned}$$

Metoda przemieszczeń – zbudować układ podstawowy metody przemieszczeń



Metoda przemieszczeń – zbudować układ podstawowy metody przemieszczeń

