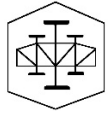




Politechnika  
Wroclawska

Politechnika Wroclawska  
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej –W2/K3



# Belka wieloprzęstowa przegubowa

## Przykład rozwiązania

Opracował dr inż. Wojciech Pakos  
Wrocław, marzec 2018 r.

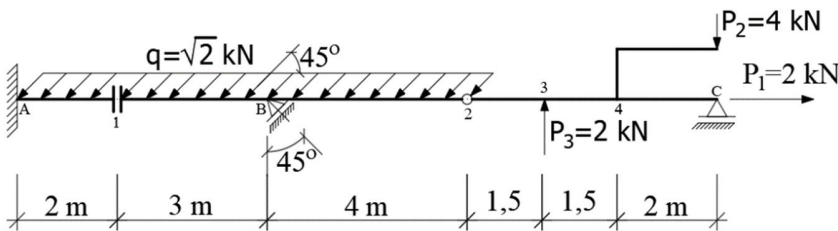


## Belka wieloprzęstowa przegubowa

### Przykład rozwiązania

Belkę rozwiązać analitycznie. Sporządzić wykresy momentów gnących, sił tnących i sił osiowych.

### Schemat statyczny



Rys. 1. Schemat statyczny.

### 1. Statyczna wyznaczalność i geometryczna niezmiennność układu.

#### Warunek ilościowy geometrycznej niezmienności

$$e = e_z + e_w = 5 + 4, \quad t = 3, \quad e = 3t \rightarrow 9 = 3 \cdot 3,$$

gdzie:

$e$  – sumaryczna liczba więzi elementarnych,

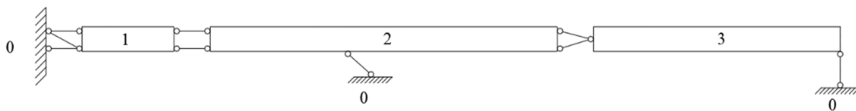
$e_z$  – liczba więzi elementarnych łączących tarcze z ostoją,

$e_w$  – liczba więzi elementarnych łączących tarcze między sobą (bez tarczy podstawowej (ostoi, fundamentu)),

$t$  – liczba tarcz (bez tarczy podstawowej).

Warunek ilościowy zachowany.

#### Warunek jakościowy geometrycznej niezmienności



Rys. 2.

### Uwagi



- Warunek ilościowy geometrycznej niezmienności może również być wyznaczony z zależności:

$$r = w + 3 \rightarrow 5 = 2 + 3,$$

$$r = e_z = 5, \quad w = 2,$$

gdzie:

$r$  – liczba reakcji,

$w$  – liczba węzłów

łączących tarcze między

sobą (bez tarczy

podstawowej).

## Belka wieloprzęsłowa przegubowa



Tarcza „1” ma odebrane prawidłowo 3 stopnie swobody, co wynika z twierdzenia o dwóch tarczach → tarcza nieruchoma.

Tarcza „2” jest prawidłowo połączona jedną więzią elementarną z ostoją oraz dwiema (równoległymi) więziami elementarnymi z już nieruchomą tarczą „1”, twierdzenie o dwóch tarczach → tarcza nieruchoma.

Tarcza „3” jest prawidłowo połączona jedną więzią elementarną z ostoją oraz dwiema więziami elementarnymi z już nieruchomą tarczą „2”, twierdzenie o dwóch tarczach → tarcza nieruchoma.

### Wniosek:

wobec spełnionego kryterium jakościowego i zachowanego warunku ilościowego geometrycznej niezmienności, układ jest statycznie wyznaczalny.

Układ jest statycznie wyznaczalny (SW) i geometrycznie niezmienny (GN).

### Uwagi



- Warunek jakościowy geometrycznej niezmienności można również zapisać krócej, np.:

$$0 + 1 \xrightarrow{\text{z tw. o 2. tarczach}} \text{GN}$$

$$(0 + 1) + 2 \xrightarrow{\text{z tw. o 2. tarczach}} \text{GN}$$

$$((0 + 1) + 2) + 3 \xrightarrow{\text{z tw. o 2. tarczach}} \text{GN}$$

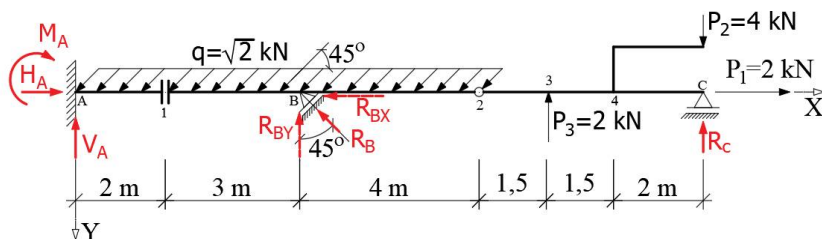
GN – układ geometrycznie niezmienny.

Ponieważ konsekwentnie ma zastosowanie twierdzenie o dwóch tarczach, układ charakteryzuje się typową budową hierarchiczną – system dźwigniowy; może to być wykorzystywane przy rozwiązaniu zdania metodą pośrednią (z podziału na belki proste)



## 2. Wyznaczenie reakcji (sił biernych).

Rozwiązanie globalne – metoda bezpośrednia



Rys. 3. Schemat statyczny.

Przyjęte kierunki i zwroty reakcji pokazano na rysunku 3. Do wyznaczenia reakcji wykorzystano dwa warunki konstrukcyjne oraz trzy globalne warunki równowagi dla układu.

$$\sum M_2^P = 0 \quad \text{warunek konstrukcyjny}$$

$$P_2 \cdot 5 - R_C \cdot 5 - P_3 \cdot 1,5 = 0 \quad \rightarrow R_C = + 3,4 \text{ kN}$$

$$\sum T_1^P = 0 \quad \text{warunek konstrukcyjny}$$

$$P_2 - R_C - P_3 + q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 - R_{BY} = 0 \quad \rightarrow R_{BY} = + 5,6 \text{ kN} = R_{BX}$$

$$\sum Y = 0 \quad \text{warunek równowagi}$$

$$P_2 - R_C - P_3 + q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 - R_{BY} - V_A = 0 \quad \rightarrow V_A = + 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \text{warunek równowagi}$$

$$M_A + P_2 \cdot 14 - R_C \cdot 14 - P_3 \cdot 10,5 + q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 \cdot 4,5 - R_{BY} \cdot 5 = 0$$

$$\rightarrow M_A = + 0,1 \text{ kNm}$$

$$\sum X = 0 \quad \text{warunek równowagi}$$

$$H_A - q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 - R_{BX} + P_1 = 0 \quad \rightarrow H_A = + 12,6 \text{ kN}$$

### Kontrola obliczeń.

$$\sum M_3 = 0 \quad \text{warunek równowagi}$$

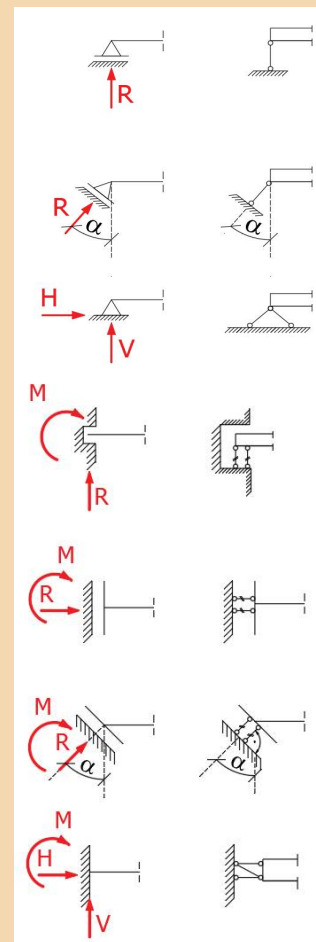
$$M_A + V_A \cdot 10,5 - q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 9 \cdot 6 + R_{BY} \cdot 5,5 + P_2 \cdot 3,5 - R_C \cdot 3,5 = 0$$

$$\rightarrow 0 = 0$$

## Uwagi



Typowe symbole podpór



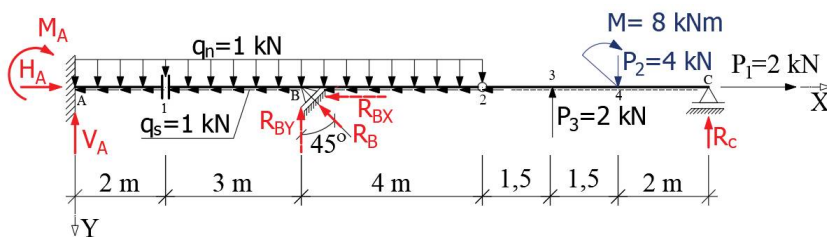
Znak „+” przy obliczonej wartości reakcji oznacza poprawność przyjętych zwrotów reakcji.

Znak „-” przy obliczonej wartości reakcji oznacza, że zwrot reakcji jest przeciwny do założonego.



### 3. Siły przekrojowe

Siły przekrojowe na przedziale A-1 oraz przedziale 2-B wyznaczono metodą przepisu funkcyjnego. Pozostałe siły przekrojowe wyznaczono w przekrojach (punktach) charakterystycznych, których oznaczenia pokazano na schemacie obliczeniowym (por. Rys. 4.). Włókna uprzywilejowane (wyróżnione) przyjęto od dołu pręta głównego.



Rys. 4. Schemat obliczeniowy.

#### Przedział A-B

##### Moment gnący

$$M_{A-B}(x) = M_A + V_A \cdot x - q_n \cdot x \cdot \frac{x}{2}; \quad x \in (0; 5)m$$

$$M_{A-B}(0) = M_A = 0,1 \text{ kNm}$$

$$M_{A-B}(2m) = M_{ekstr} = 0,1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2,1 \text{ kNm}$$

$$M_{A-B}(5m) = 0,1 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = -2,4 \text{ kNm}$$

##### Siła tnąca

$$T_{A-B}(x) = V_A - q_n \cdot x; \quad x \in (0; 5)m$$

$$T_{A-B}(0) = V_A = 2 \text{ kN}$$

$$T_{A-B}(2m) = 2 - 1 \cdot 2 = 0 \text{ kN (ekstremum momentu w } x=2m)$$

$$T_{A-B}(5m) = 2 - 1 \cdot 5 = -3 \text{ kN}$$

##### Siła osiowa

$$N_{A-B}(x) = -H_A + q_s \cdot x; \quad x \in (0; 5)m$$

$$N_{A-B}(0) = -H_A = -12,6 \text{ kN}$$

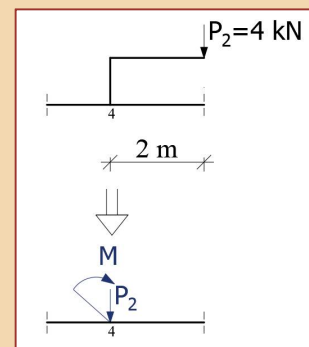
$$N_{A-B}(5) = -12,6 + 1 \cdot 5 = -7,6 \text{ kN}$$

### Uwagi



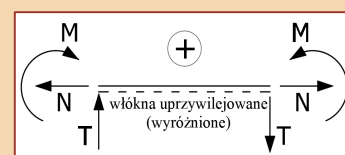
W przypadku pośredniego przekazywania obciążenia należy dokonać redukcji tego obciążenia do osi pręta głównego.

- W analizowanym przypadku:



$$M = P_2 \cdot 2 = +8 \text{ kNm}$$

- Znakowanie sił przekrojowych



## Belka wieloprzęstowa przegubowa



### Przedział 2-B

#### Moment gnący

$$M_{2-B}(x) = R_C \cdot (5 + x) - M - P_2 \cdot (3 + x) + P_3 \cdot (1,5 + x) - q_n \cdot x \cdot \frac{x}{2}; \quad x \in (0; 4)m$$

$$M_{2-B}(0) = 3,4 \cdot (5) - 8 - 4 \cdot (3) + 2 \cdot (1,5) = 0 \text{ kNm (Przegub!)}$$

$$M_{2-B}(4) = 3,4 \cdot (5 + 4) - 8 - 4 \cdot (3 + 4) + 2 \cdot (1,5 + 4) - 1 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -2,4 \text{ kNm} (= M_{A-B}(5m))$$

Ekstremum momentu:

$$-\frac{dM_{2-B}(x)}{dx} = T_{2-B}(x) = 0$$

$$-R_C + P_2 - P_3 + q_n \cdot x = 0$$

$$-3,4 + 4 - 2 + 1 \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1,4 \text{ m}$$

$$M_{2-B}(1,4m) = 3,4 \cdot (5 + 1,4) - 8 - 4 \cdot (3 + 1,4) + 2 \cdot (1,5 + 1,4) - 1 \cdot 1,4 \cdot \frac{1,4}{2} = 0,98 \text{ kNm}$$

#### Siła tnąca

$$T_{2-B}(x) = -R_C + P_2 - P_3 + q_n \cdot x; \quad x \in (0; 4)m$$

$$T_{2-B}(0) = -3,4 + 4 - 2 = -1,4 \text{ kN}$$

$$T_{2-B}(4) = -3,4 + 4 - 2 + 1 \cdot 4 = 2,6 \text{ kN}$$

$$T_{2-B}(1,4) = -3,4 + 4 - 2 + 1 \cdot 1,4 = 0 \text{ kN}$$

#### Siła osiowa

$$N_{2-B}(x) = P_1 - q_s \cdot x; \quad x \in (0; 4)m$$

$$N_{2-B}(0) = P_1 = 2 \text{ kN}$$

$$N_{2-B}(4) = 2 - 1 \cdot 4 = -2 \text{ kN}$$

*Pozostałe siły przekrojowe wyznaczono w miejscach charakterystycznych.*

#### Moment gnący

$$M_c = 0$$

$$M_3^P = R_C \cdot 3,5 - M - P_2 \cdot 1,5 = 3,4 \cdot 3,5 - 8 - 4 \cdot 1,5 = -2,1 \text{ kNm}$$

## Belka wieloprzęstowa przegubowa



$$M_{4p}^P = R_C \cdot 2 = 3,4 \cdot 2 = 6,8 \text{ kNm}$$

$$M_{4l}^P = R_C \cdot 2 - M = 3,4 \cdot 2 - 8 = -1,2 \text{ kNm}$$

### Siła tnąca

$$T_{c-4} = -R_C = -3,4 \text{ kN}$$

$$T_{4-3} = -R_C + P_2 = -3,4 + 4 = 0,6 \text{ kN}$$

$$T_{3-2} = -R_C + P_2 - P_3 = -3,4 + 4 - 2 = -1,4 \text{ kN}$$

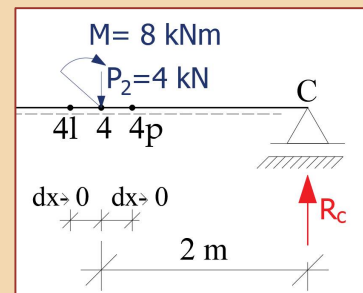
### Siła osiowa

$$N_{c-2}(x) = P_1 = 2 \text{ kN}$$

### Uwagi



Obliczenie momentu w punkcie 4 – na wykresie momentów zginających występuje skok o wartość momentu skupionego  $M$  przyłożonego w tym punkcie



# Belka wieloprzęstowa przegubowa



## 4. Wykresy sił przekrojowych

