Opracowała: dr inż. Kamila Jarczewska
na podstawie wykładu prof. dr hab. inż. Wojciecha Glabisza

Wykład nr 10

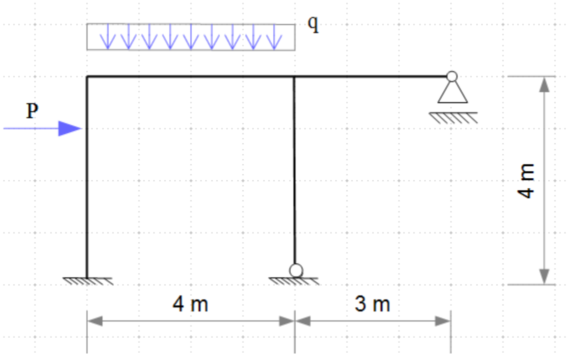
ROZWIĄZYWANIE PŁASKICH UKŁADÓW PRĘTOWYCH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH **METODĄ PRZEMIESZCZEŃ** cz.3.

Metoda przemieszczeń – tok postępowania

Chcąc wyznaczyć siły przekrojowe M, T, N w układzie statycznie niewyznaczalnym o schemacie jak na rys.1 stosując metodę przemieszczeń należy:

Założenie $EA = \infty$

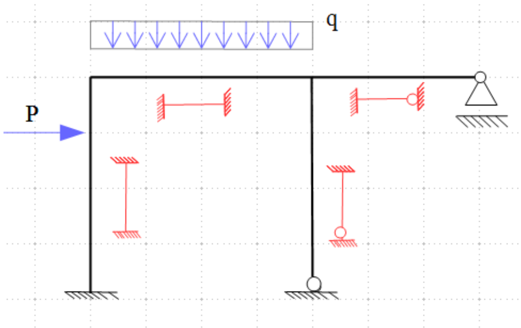
Układ zadany



Rys.1

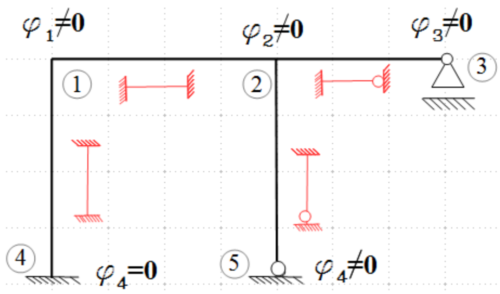
1. Podzielić układ na zbiór prętów dla których znane są wzory transformacyjne

   Układ został podzielony na podstawową klasę prętów, by uzyskać minimalną bazę niewiadomych przemieszczeń uogólnionych



2. Wyznaczyć stopień geometrycznej niewyznaczalności układu $\boldsymbol{n_g}$

   (Definicja i sposób wyznaczania n_g przedstawiono na wykładzie nr 8)

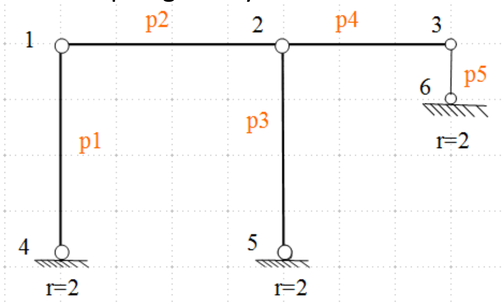


Określenie $n\varphi$

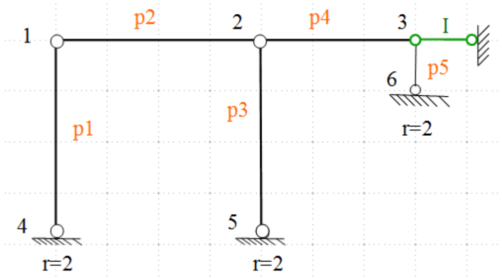
- obroty węzłów: $\varphi_3 \neq 0$, $\varphi_4 \neq 0$ uwzględnione są we wzorach transformacyjnych przyjętych typów prętów (nie są traktowane jako niewiadome)
- niewiadome geometryczne to obroty węzłów: $\varphi_1 = ?$, $\varphi_2 = ?$

$$\boldsymbol{n_\varphi = 2}$$

Schemat przegubowy



Dodanie więzi elementarnych



Określenie $n\delta$

- <u>Oszacowanie $n\delta$</u>:
  $n\delta \geq 2w - p - r$

  p =5, w=6, r=6

  $n\delta \geq 1$

- <u>Analiza kinematyczna</u>:

Po dodaniu więzi elementarnej I układ przegubowy jest GN. Na mocy twierdzenia o 3 tarczach mamy :
p5+I+t0, p3+p4+t0=t0, p2+p1+t0=t0

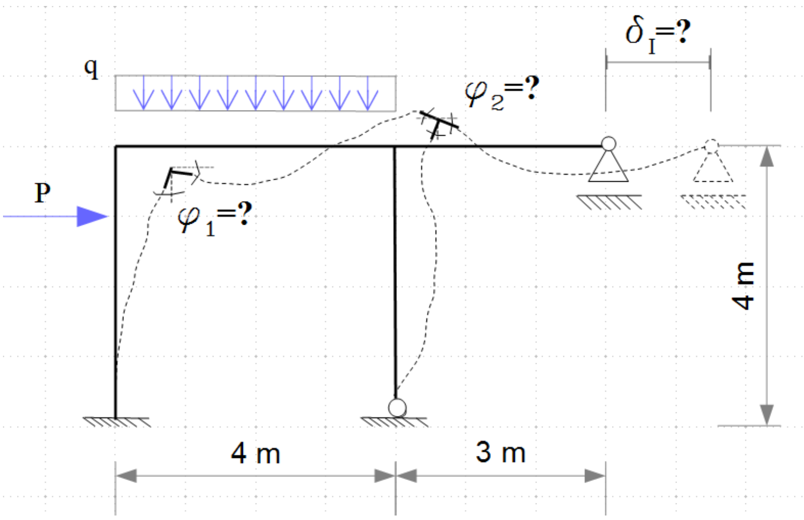
stąd: **$n\delta = 1$**

<u>WNIOSEK</u>

Stopień geometrycznej niewyznaczalności wynosi: $\boldsymbol{n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 1 = 3}$

Analizowana rama przy wybranych typach prętów jest trzykrotnie geometrycznie niewyznaczalna, niewiadomymi są kąty obrotu dwóch węzłów i jeden niewiadomy przesuw węzła.

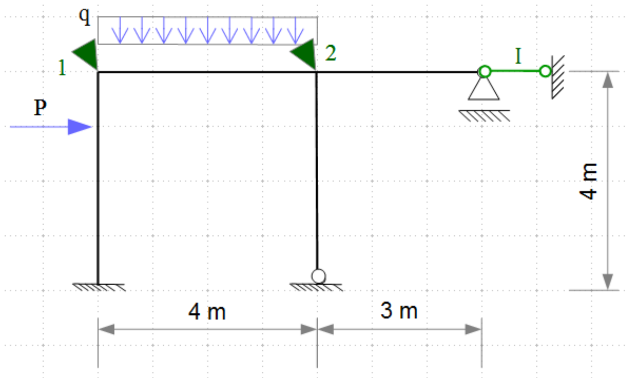
Niewiadome geometryczne: $\boldsymbol{\varphi_1} =?$, $\boldsymbol{\varphi_2} =?$, $\boldsymbol{\delta_I} =?$



3. Utworzyć układ podstawowy metody przemieszczeń

Układ podstawowy metody przemieszczeń tworzy się poprzez nałożenie w układzie zadanym dodatkowych więzi (więzi fikcyjnych) blokujących niewiadome przemieszczenia.
(*Szczegóły dotyczące układu podstawowego przedstawiono na wykładzie nr 8*)

Układ podstawowy



4. Zbudować układ równań metody przemieszczeń – postać ogólna

Równania metody przemieszczeń wynikją z zapewnienia identyczności rozwiązania między układem zadanym, a układem podstawowym. Identyczność rozwiązania między oboma układami zapewnia się poprzez spełnienie warunku zerowanie reakcji w dodanych więziach fikcyjnych, gdyż w rzeczywistym układzie one nie istnieją. Daje to $n_\varphi$warunków zerowania się reakcji momentowych w dodanych więziach rotacyjnych ($K_i = 0 \;\; \{i = 1, 2, \dots n_\varphi\}$) i n_δ warunków zerowania się reakcji siłowych w dodanych więziach translacyjnych ($K_\mathcal{J} = 0 \;\; \{\mathcal{J} = I, II, \dots n_\delta\}$). Każda reakcja $K_i \; i \; K_\mathcal{J}$ w dodanej więzi fikcyjnej wywołana jest nieznanymi przemieszczeniami uogólnionymi ($\varphi_1 = ?, \varphi_2 = ?, \delta_I = ?$) i obciążeniem zadanym (F) i tym samym stanowi funkcję zmiennych φ_i , $\{i = 1, 2, \dots n_\varphi\}$ i $\delta_\mathcal{J}$,$\{\mathcal{J} = I, II, \dots n_\delta\}$.

<u>Ogólna postać układu równań metody przemieszeń</u> (liczba równań wynosi $\boldsymbol{n_g}$):

$$\{i = 1, 2, \dots n_\varphi\} \qquad K_i = \sum_{j=1}^{n_\varphi} K_i\left(\varphi_j\right) + \sum_{J=1}^{n_\delta} K_i\left(\delta_J\right) + K_{iF} = 0$$
$$\{\mathcal{J} = I, II, \dots n_\delta\} \qquad K_J = \sum_{j=1}^{n_\varphi} K_\mathcal{J}\left(\varphi_j\right) + \sum_{J=1}^{n_\delta} K_\mathcal{J}\left(\delta_J\right) + K_{\mathcal{J}F} = 0$$

Jeśli w sposób kontrolowany więziom fikcyjnym nad się **jednostkowe przemieszczenia** przesuwy i obroty wówczas powyższe równania zapisać można jako:

$$\{i = 1, 2, \dots n_\varphi\}$$
$$K_i = \sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{ij}\varphi_j + \sum_{J=1}^{n_\delta} k_{iJ}\,\delta_J + K_{iF} = 0$$
$$\{\mathcal{J} = I, II, \dots n_\delta\}$$
$$K_J = \sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{\mathcal{J}j}\,\varphi_j + \sum_{J=1}^{n_\delta} k_{\mathcal{J}J}\,\delta_J + K_{\mathcal{J}F} = 0$$

Dla układów **nieprzesuwnych** gdzie $n_\delta = 0$ ogólna postać układu równań przyjmuje formę:

$$\{i = 1, 2, \dots n_\varphi\}$$

$$\boxed{K_i = \sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{ij}\varphi_j + K_{iF} = 0}$$

k_{ij} - jest to reakcja momentowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „i”-tej więzi rotacyjnej wywołana jednostkowym prawoskrętnym obrotem „j”-tej więzi rotacyjne

K_{iF} - jest to reakcja momentowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „i”-tej więzi rotacyjnej wywołana zadanym obciążeniem czynnym (F).

k_{iJ} - jest to reakcja momentowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „i”-tej więzi rotacyjnej wywołana jednostkowym przesuwem „J”-tej więzi translacyjnej

$k_{\mathcal{J}J}$ - jest to reakcja siłowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „$\mathcal{J}$”-tej więzi translacyjnej wywołana jednostkowym przesuwem „J”-tej więzi translacyjnej

$K_{\mathcal{J}F}$ - jest to reakcja siłowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „$\mathcal{J}$”-tej więzi translacyjnej wywołana zadanym obciążeniem czynnym (F).

<u>W analizowanej ramie ogólna postać układu równań metody przemieszczeń ma postać</u>:

$$K_1 = k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{1I}\delta_I + K_{1F} = 0$$

$$K_2 = k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + k_{2I}\delta_I + K_{2F} = 0$$

$$K_I = k_{I1}\varphi_1 + k_{I2}\varphi_2 + k_{II}\delta_I + K_{IF} = 0$$

Zapis macierzowy

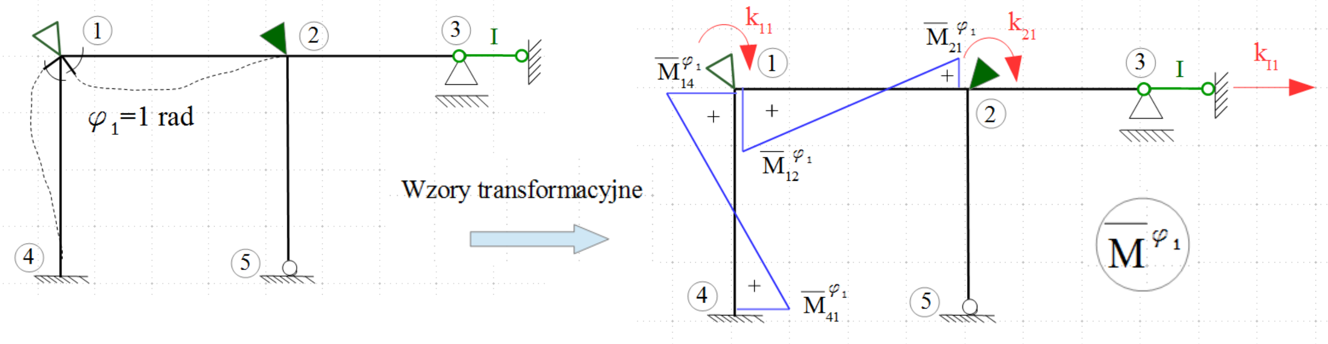
$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{I1} & \cdots & k_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \delta_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1F} \\ K_{2F} \\ K_{IF} \end{bmatrix} = 0$$

Macierze współczynników k_{ij} jest macierzą sztywności układu „K” jest symetryczna i jest odwrotnością macierzy podatności „D”.

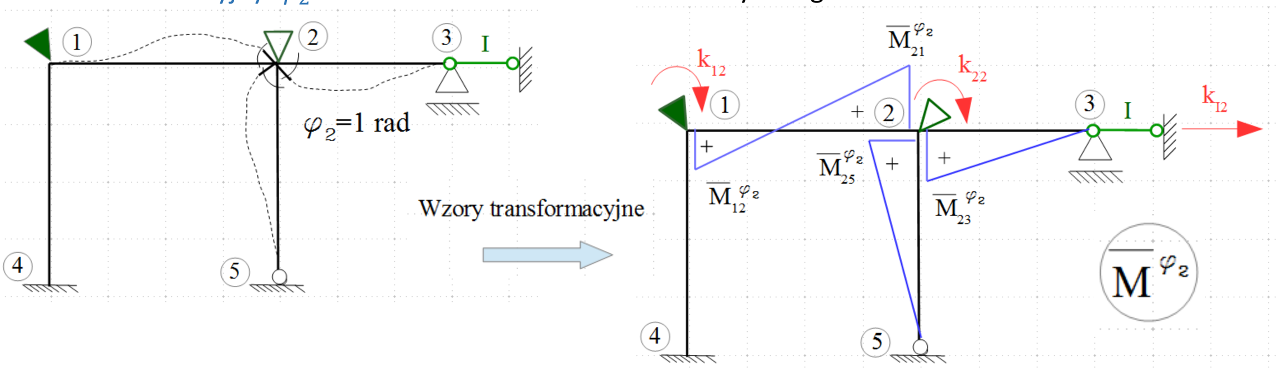
5. Wyznaczyć współczynniki układu równań metody przemieszczeń

- Aby wyznaczyć współczynnik układu równań metody przemieszczeń będące **współczynniki macierzy sztywności** należy układ podstawowy rozwiązać **od jednostkowych stanów rotacyjnych** $\varphi_j = 1\,rad\ \{i = 1, 2, \dots n_\varphi\}$ i **jednostkowych stanów translacyjnych** $\delta_J = 1\,\{J = I, II, \dots n_\delta\}$ uzyskując wartości momentów brzegowych od wymienionych stanów obciążeń. Momenty brzegowe w układzie podstawowym od jednostkowych przemieszczeń uogólnionych otrzymuje się stosując **wzory transformacyjne**.

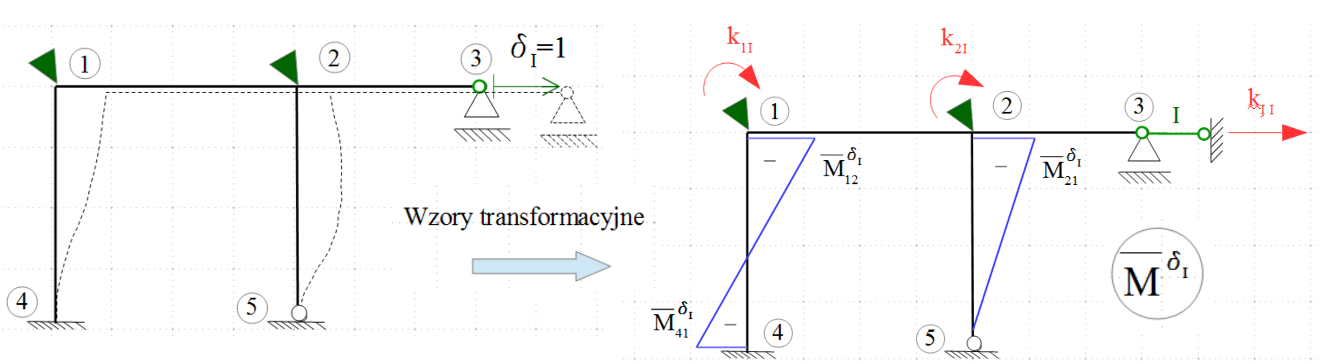
- stan rotacyjny $\varphi_1 = 1\,rad$ — Momenty brzegowe $\overline{M}^{\varphi 1}$



- stan rotacyjny $\varphi_2 = 1\,rad$ — Momenty brzegowe $\overline{M}^{\varphi 2}$



- stan translacyjny $\delta_I = 1$ — Momenty brzegowe $\overline{M}^{\delta I}$

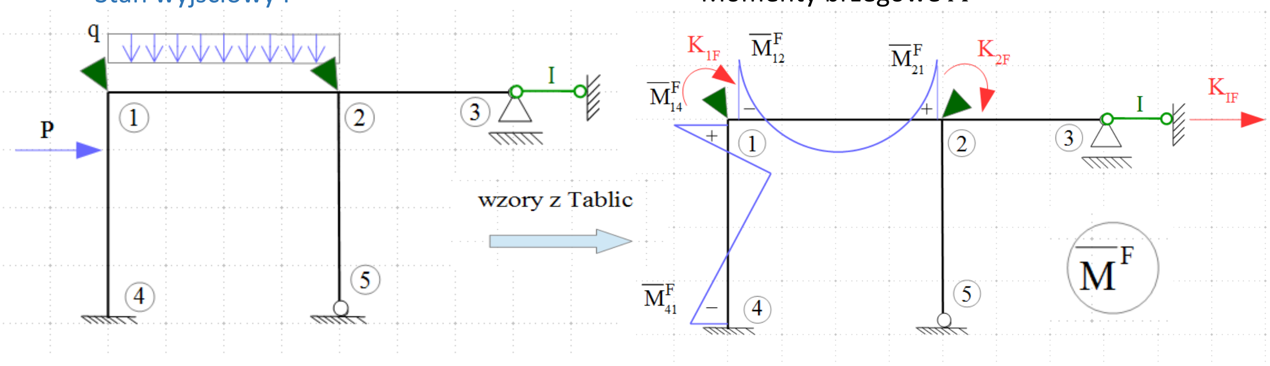


<u>Uwaga</u>:
Aby zastosować wzory transformacyjne należy wyznaczyć kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij}:

$$1.\,PPR \Rightarrow 2.\,BPPO \Rightarrow 3.\,\psi_{ij}$$

- Aby wyznaczyć współczynnik układu równań metody przemieszczeń stanowiące **wyrazy wolne układu równań** należy dodatkowo układ podstawowy rozwiązać od zadanego **obciążenia czynnego F**, przęsłowego uzyskując wartości momentów brzegowych zwanych momentami wyjściowymi. Momenty te można uzyskać stosując metodę sił lub wykorzystując odpowiednie **wzory podane w tablicach.**

- Stan wyjściowy F — Momenty brzegowe $\overline{M}^F$



- Wszystkie współczynnik układu będące **reakcjami momentowymi w fikcyjnych więziach rotacyjnych** wywołanymi poprzez poszczególne stany obciążeń wyznacza się z **warunku równowagi momentów** brzegowych w węzłach.

$$k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, k_{1I}, k_{2I}, K_{1F}, K_{2F} \quad \Longleftarrow \textit{z warunku równowagi momentów w węźle}$$

- Wszystkie współczynnik będące reakcjami siłowymi w dodanych fikcyjnych więziach translacyjnych, które wywołane są poprzez poszczególne stany obciążeń wyznaczyć można z **warunku równowagi sił** w tych więziach lub z **zasady prac przygotowanych**.

$$k_{I1}, k_{I2}, k_{II}, K_{IF}, K_{IF} \quad \Longleftarrow \textit{z warunku równowagi sił w węźle lub z ZPP}$$

*UWAGA

Ponieważ na niniejszym kursie (STATYKA BUDOWLI) analizowane są jedynie układy nieprzesuwne czyli z przyjętych typów pręta wynika, że liczba niezależnych przesunięć węzłów jest zerowa $n_\delta = 0$ poniżej podane zostaną wzory na wyznaczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń jedynie tych będących reakcjami momentowymi w rotacyjnych podporach fikcyjnych.

Równowaga momentów brzegowych w węźle, które są wywołane stanami rotacyjnymi

- **Rozpatrzmy ogólny przypadek węzła „i"** w układzie podstawowym, który ulega obrotowi o wartość $\varphi_i = 1\,rad$. Obracając węzeł o kąt $\varphi_i = 1\,rad$ obraca się każdy z prętów schodzących się w tym węźle. W wyniku obrotu węzła na obu końcach każdego pręta schodzącego się do węzła „i" powstają momenty brzegowe, które wyliczane są z wzorów transformacyjnych odpowiednich dla każdego typu obracanego pręta.

  – Momenty brzegowe obracanych prętów w węźle „i" wylicza się jako:

$$\bar{M}_{ij}^{i} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} a_{ij}\varphi_i$$

(a_{ij}-współczynnik wynikający ze wzoru transformacyjnego, odpowiedni dla danego typu pręta)

  – Momenty brzegowe obracanych prętów w węźle „j" (przeciwnym do „i") wylicza się jako:

$$\bar{M}_{ji}^{i} = \frac{EI_{ji}}{L_{ji}} b_{ji}\varphi_i$$

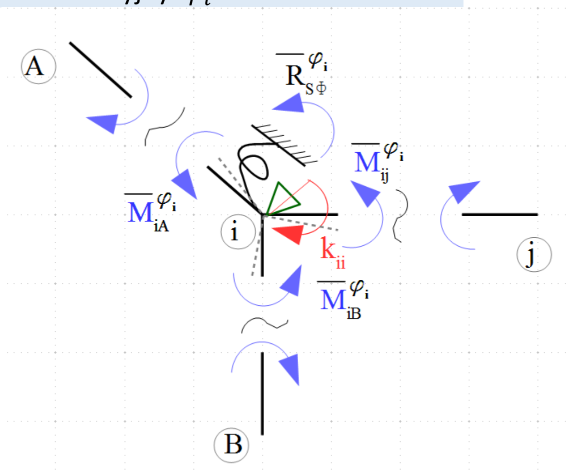
(b_{ji}-współczynnik wynikający ze wzoru transformacyjnego, odpowiedni dla danego typu pręta)

  – Jeśli w węźle „i" występuje więź sprężysta rotacyjne wówczas w wyniku obrotu węzła „i" o wartość $\varphi_i = 1\,rad$ powstaje reakcja podporowa lewoskrętna o wartości:

$$R_{S_\varphi}^{i} = k_\varphi \varphi_{Si}$$

(k_φ-sztywność więzi sprężystej rotacyjnej,
φ_{Si}- obrót węzła w którym zamocowana jest więź sprężysta)

obciążenie: stan rotacyjny $\varphi_i = 1\,rad$



Z **równowagi momentów brzegowych w węźle „i"** , który ulega obrotowi otrzymujemy

$$\sum \boldsymbol{M_i} = \boldsymbol{0}$$

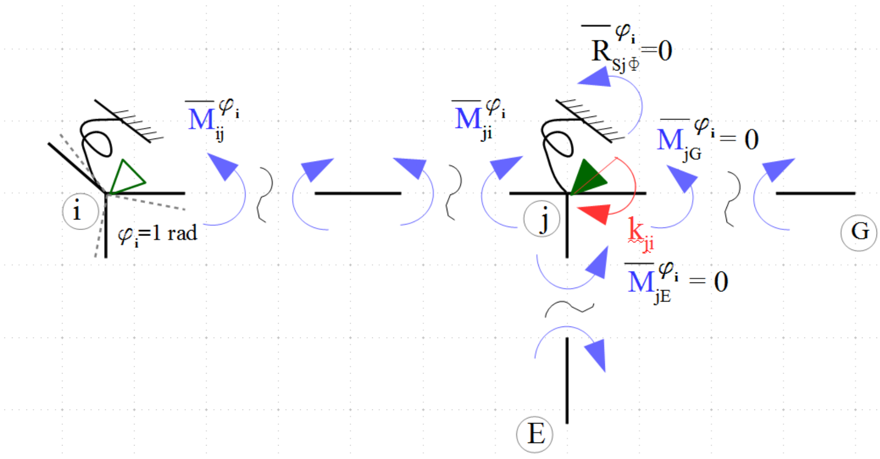
$$k_{ii} = \sum_m \bar{M}_{im}^{i} + R_{S_\varphi}^{i} = \bar{M}_{iA}^{\varphi_i} + \bar{M}_{iB}^{\varphi_i} + \bar{M}_{ij}^{\varphi_i} + k_\varphi$$

(m-sumowanie po wszystkich prętach schodzących się do węzła „i")

obciążenie: stan rotacyjny $\varphi_i = 1\,rad$

analizowany węzeł „j”

Niech $i \neq j$ wówczas k_{ji} jest to moment na pręcie„ij” występujący na brzegu „j” gdy węzeł „i” obróci się o kąt $\varphi_i = 1\,rad$.



– Jeżeli obraca się węzeł „i” wówczas węzeł „j” nie obraca dlatego reakcja w więzi sprężystej występująca w węźle, który się nie obraca czyli w węźle „j” jest równa zero, ($\varphi_{Sj} = 0$).

– Jeżeli obraca się węzeł „i” , a węzeł „j” połączony jest prętem z węzłem „i” to jedynie ten pręt ze wszystkich prętów schodzących do węzła „j” ulegnie obrotowi, dlatego też jedynie na tym pręcie z pośród wszystkich prętów schodzących się do węzła „j” powstanie niezerowy moment brzegowy $\overline{M}_{ji}^{i}$

Z równowagi momentów brzegowych w węźle „j” , który nie ulega obrotowi otrzymujemy

$$\sum M_j = 0$$

$$k_{ji} = \overline{M}_{ji}^{i} = \frac{EI_{ji}}{L_{ji}} b_{ji}\varphi_i$$

Z twierdzenia o wzajemności reakcji wynika, że $k_{ji} = k_{ij}$

Analogicznie:

obciążenie: stan rotacyjny $\varphi_j = 1\,rad$

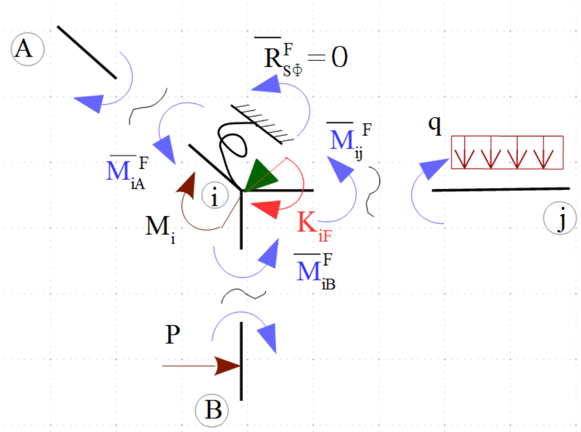
analizowany węzeł „i”

$$k_{ij} = \overline{M}_{ij}^{j} = \frac{EI_{ji}}{L_{ji}} b_{ij}\varphi_j$$

Równowaga momentów brzegowych w węźle , które wywołane są obciążeniem czynnym (F)

obciążenie: stan wyjściowy F

analizowany węzeł „i”



$\overline{M}_{ij}^F$, $\overline{M}_{ji}^F$ – momenty wyjściowe /przywęzłowe występujące w układzie podstawowym, generowane przez obciążenie przęsłowe czynne (F), przy zerowym stanie przemieszczeń uogólnionych są zależne od sposobu obciążenia i od przyjętej klasy pręta.

M_i – moment skupiony zadany w węźle i wynikający z w obciążenia czynnego, prawoskrętny.

$R^F_{S_\varphi}$ - reakcja w podporze sprężystej od obciążenia czynnego (F) jest zerowa, ponieważ węzeł w którym znajduje się więź sprężysta nie obraca się stąd $\varphi_{Si} = 0$, gdyż nie jest to stan rotacyjny.

Z równowagi momentów w węźle „i”

$$\sum M_i = 0$$

$$K_{iF} = \sum_m \overline{M}_{im}^F - M_i = \overline{M}_{iA}^F + \overline{M}_{iB}^F + \overline{M}_{ij}^F - M_i$$

Uwaga :
Jeśli M_i w analizowanym zadaniu jest lewoskrętny wówczas do wzoru należy podstawić wartość tego momentu ze znakiem minus, co wynika z warunku równowagi momentów w węźle.

6. Rozwiązać układ równań metody przemieszczeń

W wyniku rozwiązania układu równań uzyskujemy wartości poszukiwanych przemieszczeń uogólnionych:

$$\boldsymbol{\varphi_1 = A, \qquad \varphi_2 = B, \qquad \delta_I = C}$$

Układ zadany stał się geometrycznie wyznaczalny. Można określić stan przemieszczeń całego układu.

7. Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie zadanym

- ### Momenty zginające

I sposób : zastosowanie wzorów transformacyjnych:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}\left(a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ji} - c_{ij}\psi_{ij}\right) + \overline{M}_{ij}^{F}$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}\left(a_{ji}\varphi_{ji} + b_{ji}\varphi_{ij} - c_{ji}\psi_{ij}\right) + \overline{M}_{ji}^{F}$$

II sposób: wykorzystanie superpozycji poszczególnych rozwiązań:

$$M_{ij} = \overline{M}_{ij}^{\varphi_1=1}\varphi_1 + \overline{M}_{ij}^{\varphi_2=1}\varphi_2 + \ldots \overline{M}_{ij}^{\varphi_{n_\varphi}=1}\varphi_{n_\varphi} + \overline{M}_{ij}^{\delta_I=1}\delta_I + \ldots \overline{M}_{ij}^{\delta_{n_\delta}=1}\delta_{n_\delta} + \overline{M}_{ij}^{F}$$

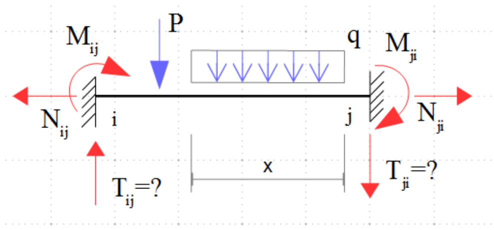
- ### Siły tnące

I sposób : zastosowanie wzorów transformacyjnych:

$$T_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2}\left(-c_{ij}\varphi_{ij} - c_{ji}\varphi_{ji} - d_{ij}\psi_{ij}\right) + \overline{T}_{ij}^{F}$$

$$T_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2}\left(-c_{ij}\varphi_{ij} - c_{ji}\varphi_{ji} - d_{ij}\psi_{ij}\right) + \overline{T}_{ji}^{F}$$

II sposób: wykorzystanie warunków równowagi sił w elemencie prętowym po wcześniejszym wyznaczeniu momentów zginających:



M_{ij}, M_{ji} - są to wyliczone momenty zginające
N_{ij}, N_{ji} - są to nieznane siły osiowe, nie wpływają one na wartości sił poprzecznych

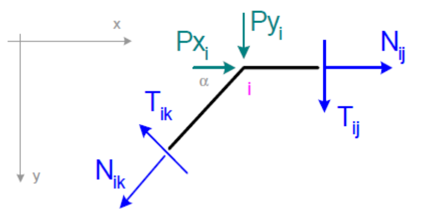
Warunki równowagi:

$$\sum M_i = 0 \;\Rightarrow\; T_{ji} = \ldots$$

$$\sum M_j = 0 \;\Rightarrow\; T_{ij} = \ldots$$

- ### Siły osiowe

Siły osiowe uzyskuje się **z warunków równowagi sił** w węzłach po wcześniejszym wyznaczeniu wartości sił tnących

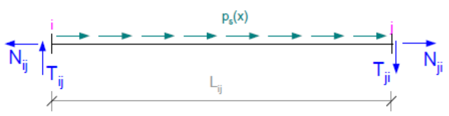


$$\sum X = 0$$

$$P_{xi} + N_{ij} - N_{ik}\cos(\alpha) - T_{ik}\sin(\alpha) = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$P_{yi} + T_{ij} + N_{ik}\sin(\alpha) - T_{ik}\cos(\alpha) = 0$$



$$\sum X = 0$$

$$-N_{ij} + N_{ji} + \int_0^L p_s(x)dx = 0$$

W ten sposób przechodzimy od węzła poprzez pręt do następnego węzła, aż wyznaczymy wszystkie siły osiowe oraz reakcje

Źródło rysunku: wykład prof. P. Śniadego