Statyka Budowli

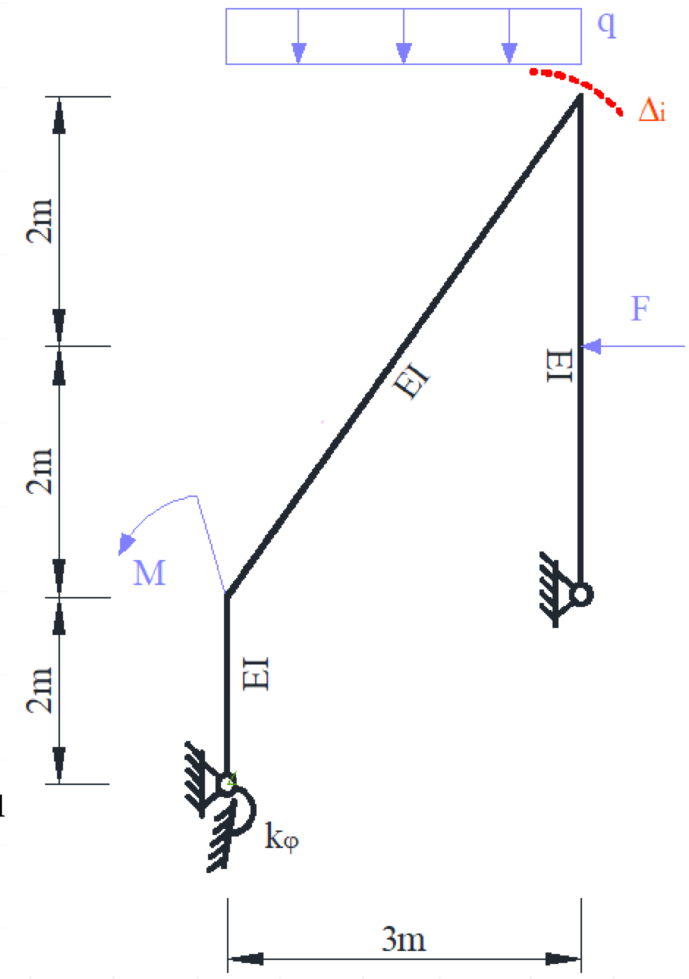
Laboratorium nr 5

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus *olga.szylko@pwr.edu.pl*

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH HIPERSTATYCZNYCH

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę sił rozwiązać ramę od obciążenia siłami
- Na podstawie obliczonych momentów zginających zaprojektować wstępnie przekroje prętów na zginanie, w obliczeniach przyjąć
  - średni współczynnik obciążenia $\gamma_f = 1.5$,
  - wytrzymałość obliczeniową stali $f_d = 215$ MPa,
  - współczynnik Kirhoffa E=210 GPa
- Przeprowadzić kontrolę rozwiązania (sprawdzić statyczną
- i kinematyczną dopuszczalność rozwiązania).
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu

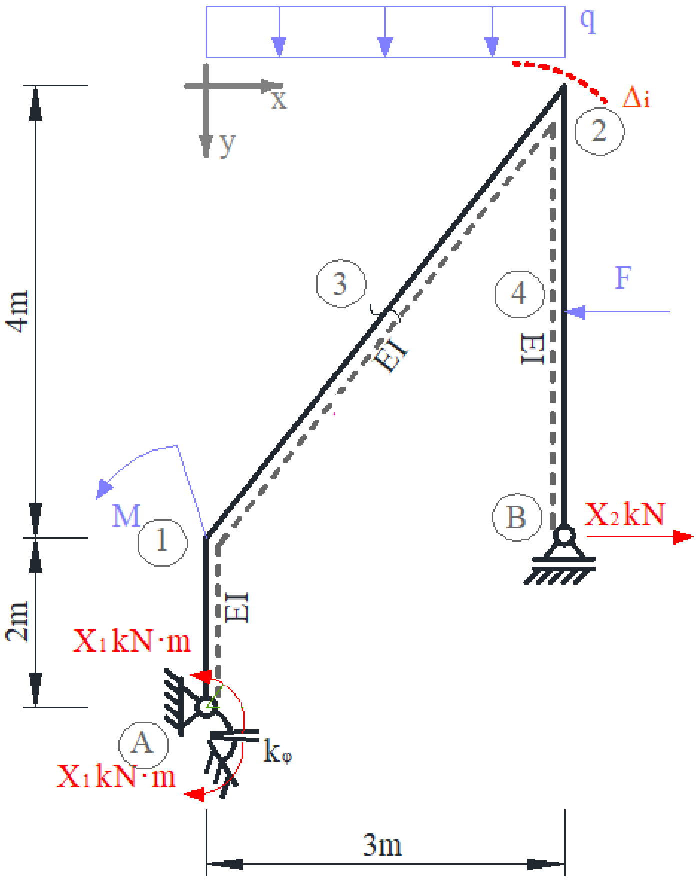


Dane : F = 10 kN; q = 4 kN/m; M = 20 kN m; k_φ = 10 EI/m

UKŁAD PODSTAWOWY METODY SIŁ I POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ

Równania kanoniczne metody sił są równaniami przemieszczeniowymi. Ogólna postać układu równań metody sił ma postać

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{11}X_1^F + \delta_{12}X_2^F + \delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1^F + \delta_{22}X_2^F + \delta_{2F} &= 0 \end{aligned}}$$



Gdzie:

$$\delta_{ij} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^j}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n} \right\} / P_i$$

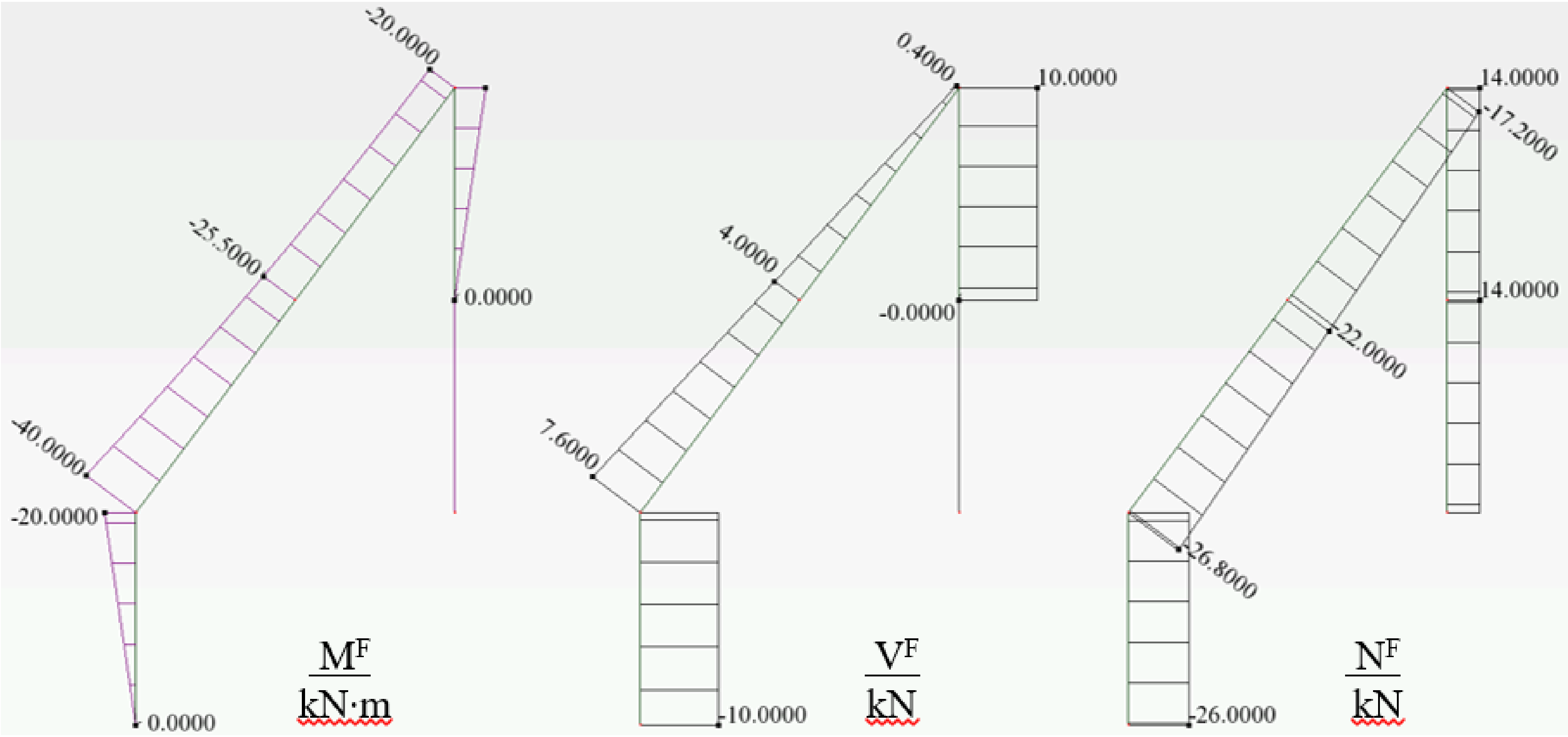
przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od jednostkowej j-tej niewiadomej w układzie podstawowym,

$$\delta_{iF} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n} \right\} / P_1$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od obciążenia mechanicznego w układzie podstawowym.

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA DANEGO

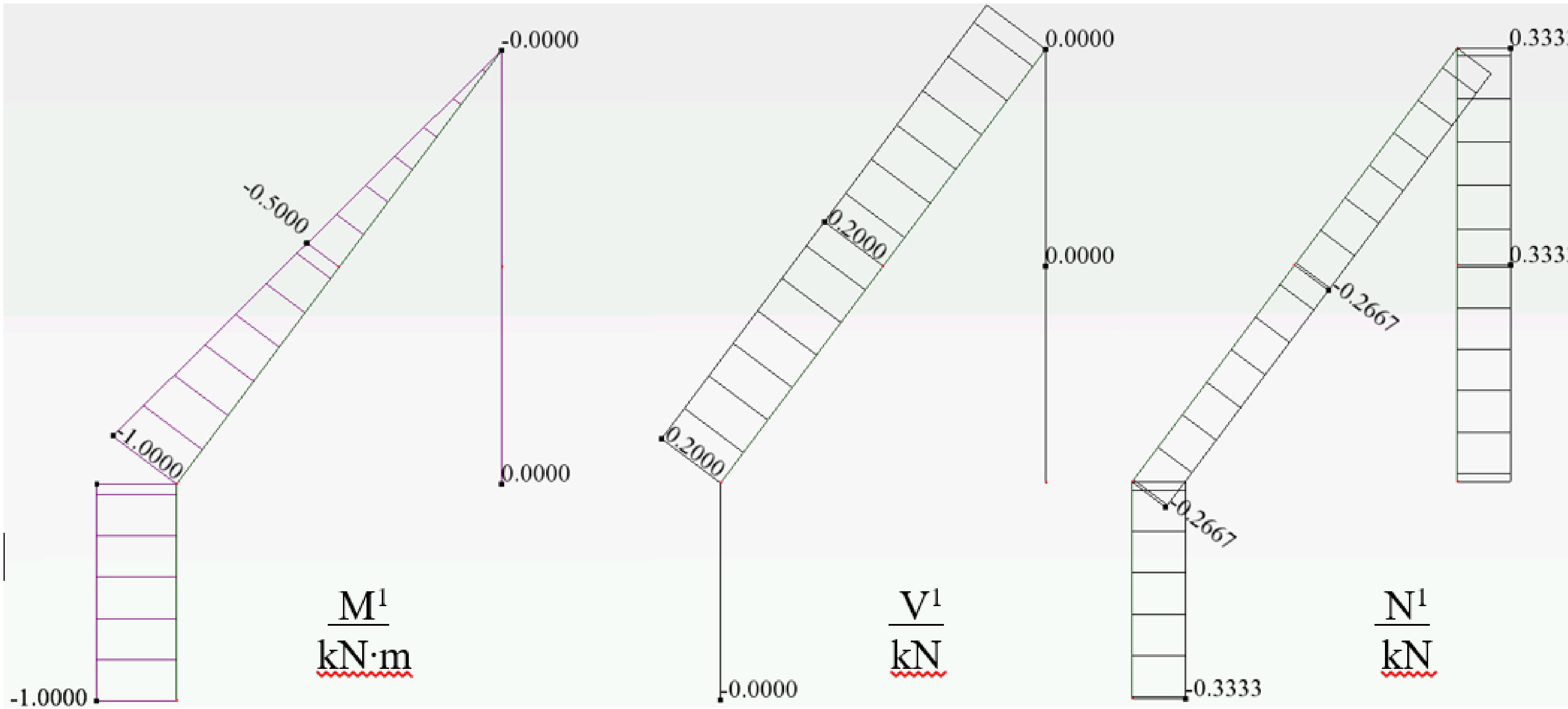
Moment zginający w więzi sprężystej: $S_{\varphi}^{F} = 0 kN \cdot m$



wykresy sił przekrojowych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD (X_1=1) kN·m

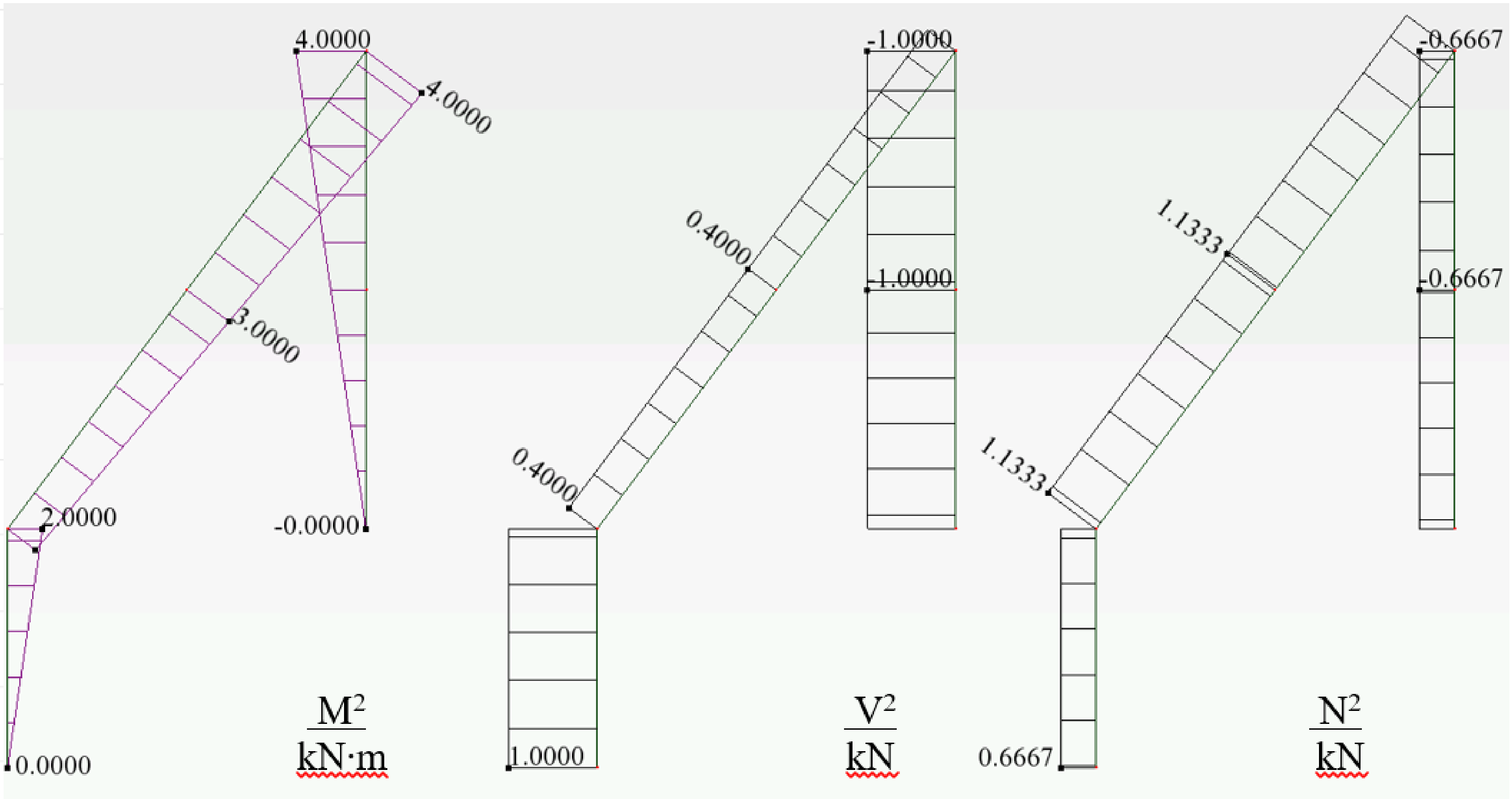
Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_{\varphi}^{1} = 1kN \cdot m$



wykresy sił przekrojowych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD (X_2=1)kN

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_{\varphi}^{1} = 0kN \cdot m$



wykresy sił przekrojowych

SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

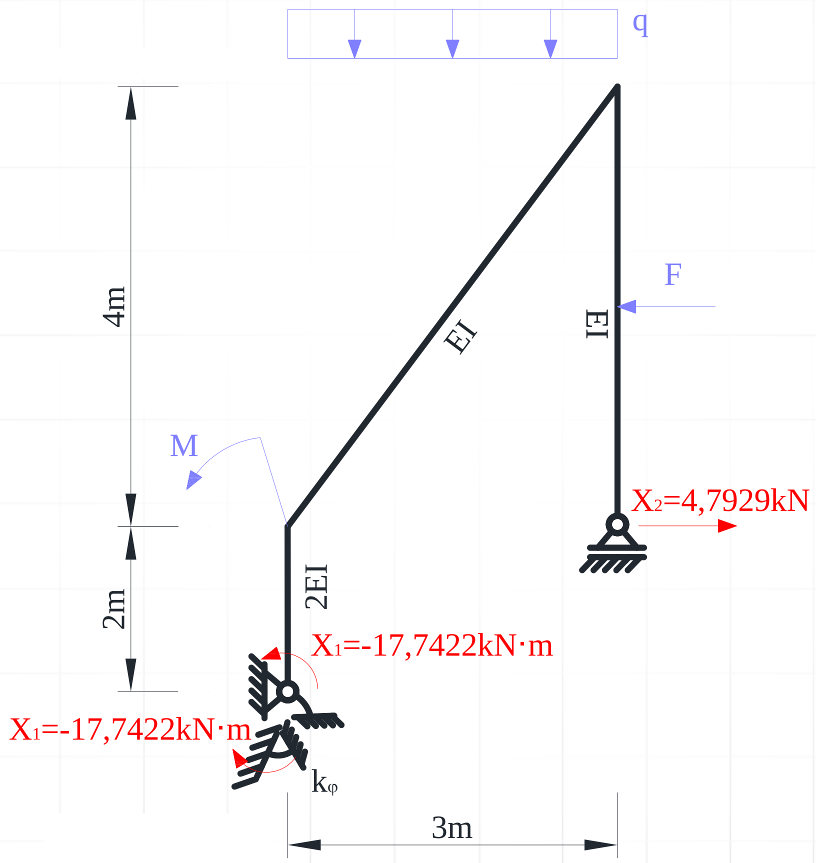
$$2,7667\frac{kN\cdot m^2}{EI}X_1^F-7,6667\frac{kN\cdot m^2}{EI}X_2^F+85,8333\frac{kN\cdot m^2}{EI}=0,$$

$$-7,6667\frac{kN\cdot m^3}{EI}X_1^F+69,3333\frac{kN\cdot m^3}{EI}X_2^F-468,3333\frac{kN\cdot m^3}{EI}=0,$$

$$\boxed{X_1^F=-17,7422, \qquad X_2^F=4,7929.}$$

OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Rzeczywiste reakcje i siły przekrojowe można obliczyć rozwiązując układ podstawowy od obciążenia i obliczonej siły hiperstatycznej.



OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Innym sposobem, jest obliczenie reakcji i sił przekrojowych korzystając z zasady superpozycji.

$$\boxed{\begin{aligned}
R_i^F &= \bar{R}_i^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_i^F,\\
M_{ij}^F &= \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_{ij}^F,\\
N_{ij}^F &= \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_{ij}^F,\\
V_{ij}^F &= \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_{ij}^F,\\
S_{ij}^F &= \bar{S}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{S}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{S}_{ij}^F.
\end{aligned}}$$

Reakcje:

$$V_A^T = \bar{V}_A^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^T = \left[\frac{1}{3}\cdot(-4{,}1948) + (-\frac{2}{3})\cdot 0{,}2209\right] kN = -1{,}6192 kN,$$

$$H_A^T = \bar{H}_A^1 \cdot X_1^T + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^T = \left[0\cdot(-4{,}1948) + 1\cdot 0{,}2209\right] kN = 0{,}2209 kN,$$

$$R_B^T = \bar{R}_B^1 \cdot X_1^T + \bar{R}_B^2 \cdot X_2^T = \left[\frac{1}{3}\cdot(-4{,}1948) + (-\frac{2}{3})\cdot 0{,}2209\right] kN = -1{,}6192 kN.$$

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\varphi^T = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^T = \left[1\cdot(-4{,}1948)\right] kN\cdot m = -4{,}1948 kN \cdot m$

OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Momenty zginające

$$M_{A1}^T = \bar{M}_{A1}^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_{A1}^2 \cdot X_2^T = [(-1)\cdot(-4{,}1948) + 0\cdot 0{,}2209]\,kN\cdot m = 4{,}1948\,kN\cdot m$$
$$\bar{M}_{1A}^T = [(-1)\cdot(-4{,}1948) + 2\cdot 0{,}2209]\,kN\cdot m = 4{,}6366\,kN\cdot m = \bar{M}_{12}^T$$
$$\bar{M}_{21}^T = [0\cdot(-4{,}1948) + 4\cdot 0{,}2209]\,kN\cdot m = 0{,}8836\,kN\cdot m = \bar{M}_{2B}^T$$
$$\bar{M}_{B2}^T = [0\cdot(-4{,}1948) + 0\cdot 0{,}2209]\,kN\cdot m = 0\,kN\cdot m$$

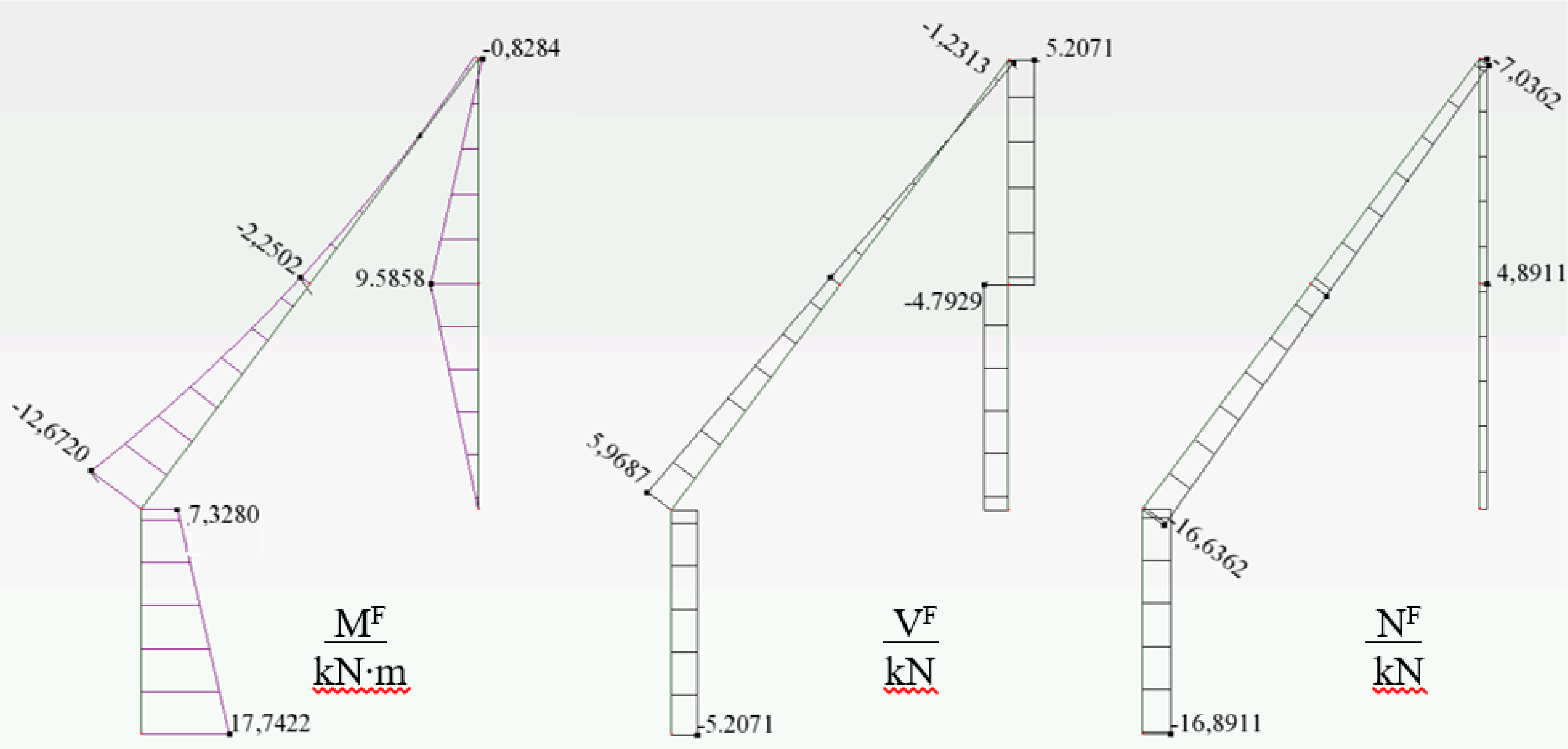
Siły tnące

$$V_{A1}^T = \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_2^T = [0\cdot(-4{,}1948) + 1\cdot 0{,}2209]\,kN = 0{,}2209\,kN = V_{1A}^T$$
$$V_{12}^T = [0{,}2\cdot(-4{,}1948) + 0{,}4\cdot 0{,}2209]\,kN = -0{,}7506\,kN = V_{21}^T$$
$$V_{B2}^T = [0\cdot(-4{,}1948) + (-1)\cdot 0{,}2209]\,kN = -0{,}2209\,kN = V_{2B}^T$$

Siły osiowe

$$N_{A1}^T = \bar{N}_{A1}^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_{A1}^2 \cdot X_2^T = [(-0{,}3333)\cdot(-4{,}1948) + 0{,}6667\cdot 0{,}2209]\,kN = 1{,}5454\,kN = N_{1A}^T$$
$$N_{12}^T = [(-0{,}2667)\cdot(-4{,}1948) + 1{,}1333\cdot 0{,}2209]\,kN = 1{,}3691\,kN = N_{21}^T$$
$$N_{B2}^T = [0{,}3333\cdot(-4{,}1948)) + (-0{,}6667)\cdot 0{,}2209]\,kN = -1{,}5454 = N_{2B}^T$$

OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

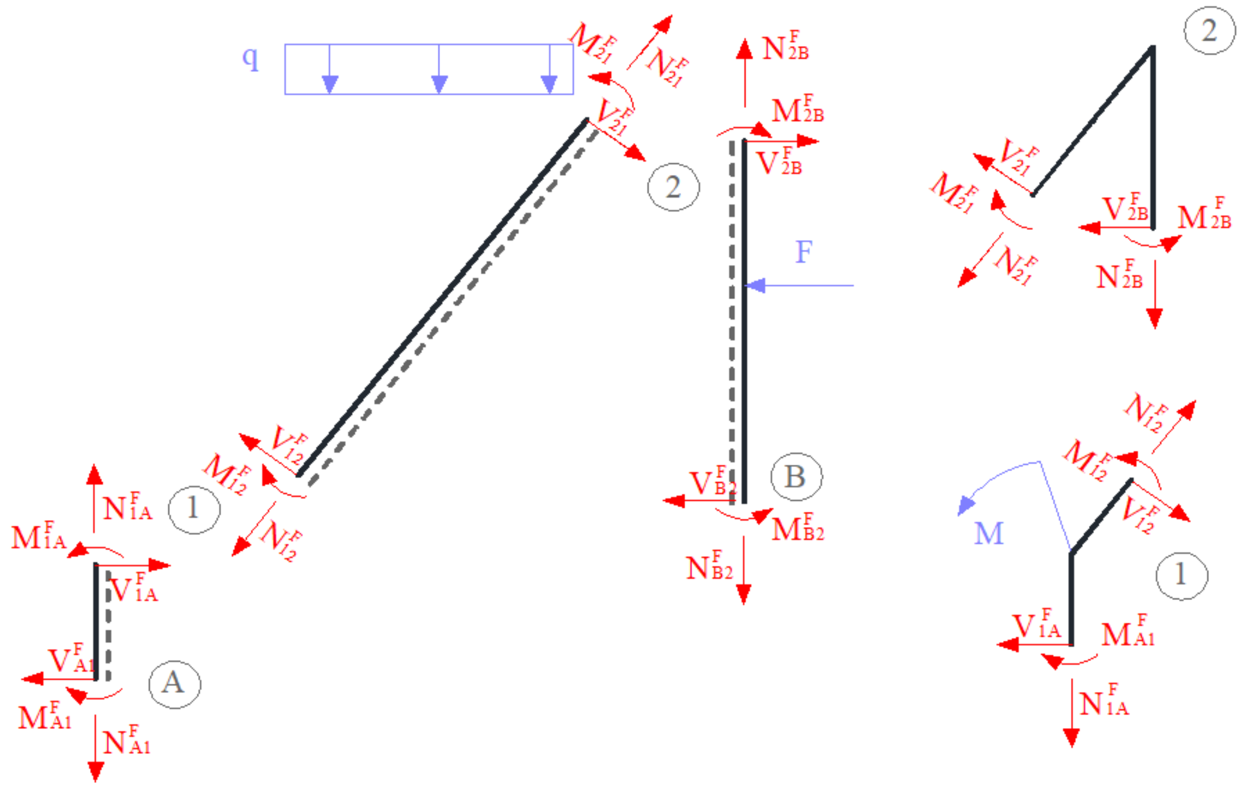


Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola statycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu czy siły spełniają równania równowagi na prętach i w węzłach. Wektory sił przekrojowych wskazują dodatnie wartości zgodnie z wyróżnionymi włóknami uprzywilejowanymi



Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA

Pręt A-1

$$\sum M_A = M^F_{A1} - M^F_{1A} + V^F_{1A} \cdot 1m = [17{,}7422 - 7{,}3280 + (-5{,}2071) \cdot 2] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V^F_{A1} - V^F_{1A} = [5{,}2701 - 5{,}2071] kN = 0,$$

$$\sum N = N^F_{A1} - N^F_{1A} = [16{,}8911 - 16{,}8911] kN = 0.$$

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M^F_{12} - M^F_{21} + V^F_{21} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1{,}5m =$$

$$= [-12{,}6720 - (-0{,}8284) + (-1{,}2313) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1{,}5] kN \cdot m \approx 0,$$

$$\sum V = V^F_{12} - V^F_{21} - q \cdot 3m \cdot \cos\alpha = [5{,}9687 - (-1{,}2313) - 4 \cdot 3 \cdot 0{,}6] kN = 0,$$

$$\sum N = N^F_{12} - N^F_{21} + q \cdot 3m \cdot \sin\alpha = [-16{,}6362 - (-7{,}0362) + 4 \cdot 3 \cdot 0{,}8] kN =$$

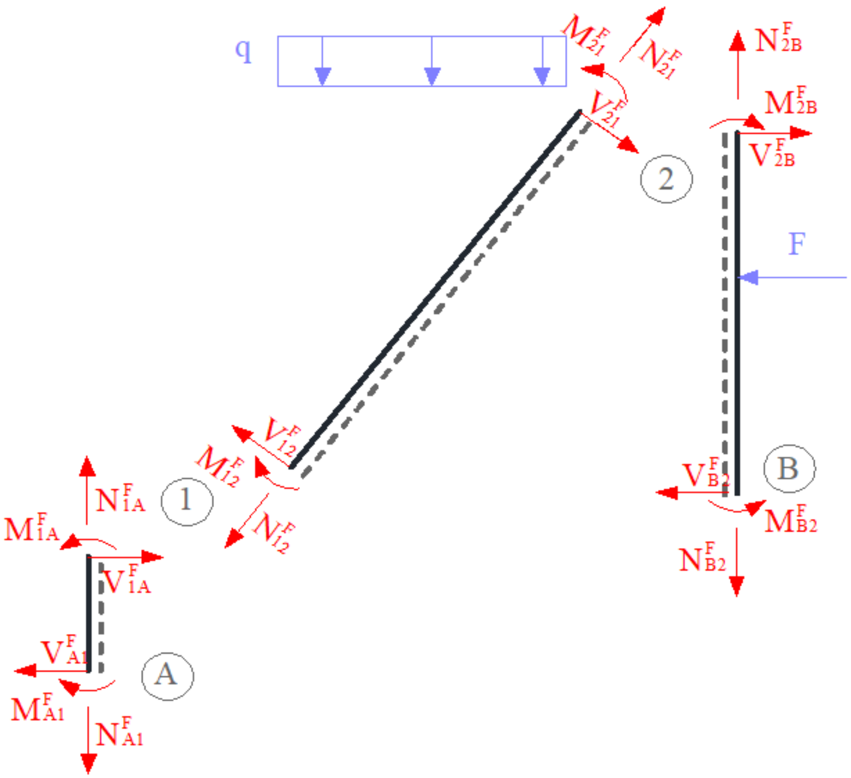
Pręt 1-2

$$\sum M_B = M^F_{B2} - M^F_{2B} - V^F_{2B} \cdot 4m + F \cdot 2m =$$

$$= [0 - (-0{,}8284) - 5{,}2071 \cdot 4 + 10 \cdot 2] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V^F_{B2} - V^F_{2B} + F = [-4{,}7929 - 5{,}2071 + 10] kN = 0,$$

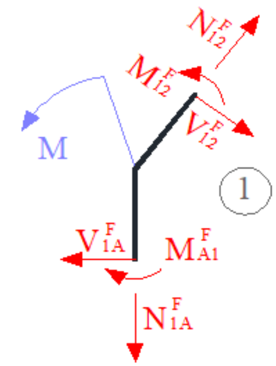
$$\sum N = N^F_{B2} - N^F_{2B} = [4{,}8911 - 4{,}8911] kN = 0.$$



KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA

Węzeł 1



$$\sum M_1 = M_{1A}^F - M_{12}^F - M = [7{,}3280 - (-12{,}6720) - 20]\, kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = -V_{1A}^F + V_{12}^F \cdot \sin\alpha + N_{12}^F \cdot \cos\alpha = [5{,}2071 + 5{,}9687 \cdot 0{,}8 + (-16{,}6362) \cdot 0{,}6]\, kN = 0{,}0003 kN,$$

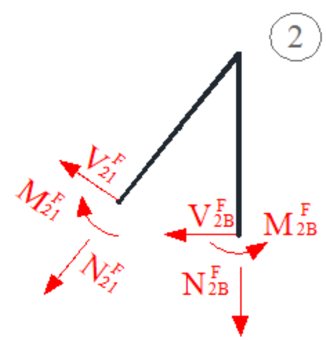
$$\sum Y = N_{1A}^F - N_{12}^F \sin\alpha + V_{12}^F \cdot \cos\alpha = [-16{,}8911 - (-16{,}6362) \cdot 0{,}8 + 5{,}9687 \cdot 0{,}6]\, kN = -0{,}0002 kN.$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21}^F - M_{2B}^F = [-0{,}8284 - (-0{,}8284)]\, kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = -V_{2B}^F - V_{21}^F \cdot \sin\alpha - N_{21}^F \cdot \cos\alpha = [-5{,}2071 - (-1{,}2313) \cdot 0{,}8 - (-7{,}0362) \cdot 0{,}6]\, kN = 0{,}0003 kN,$$

$$\sum Y = N_{2B}^F + N_{21}^F \cdot \sin\alpha - V_{21}^F \cdot \cos\alpha = [4{,}8911 + (-7{,}0362) \cdot 0{,}8 - (-1{,}2313) \cdot 0{,}6]\, kN = -0{,}0009 kN.$$

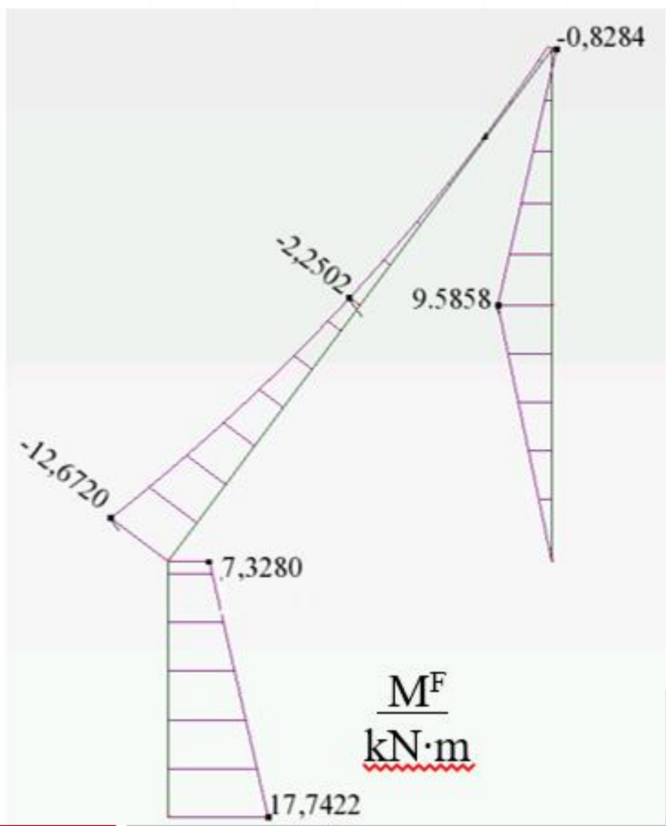


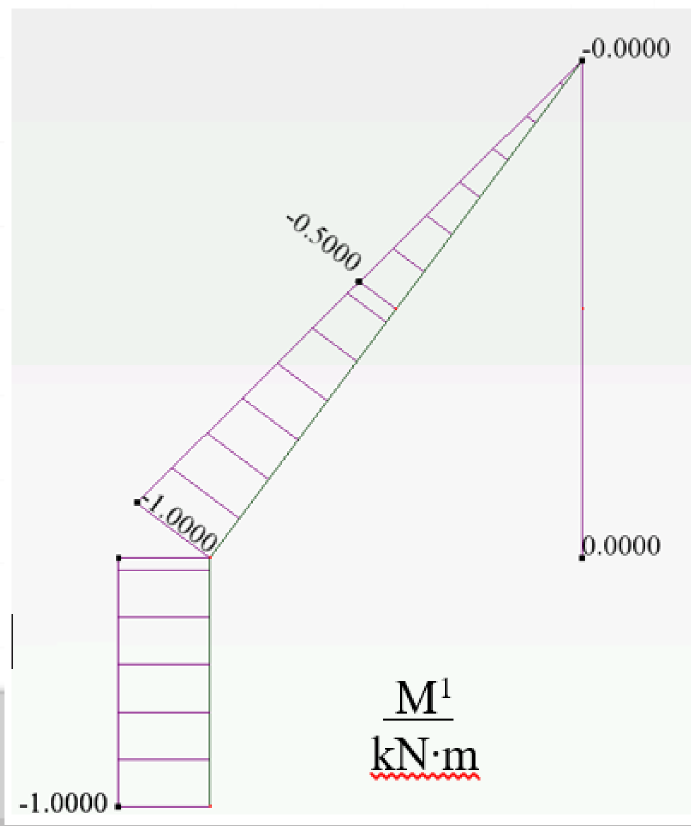
KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

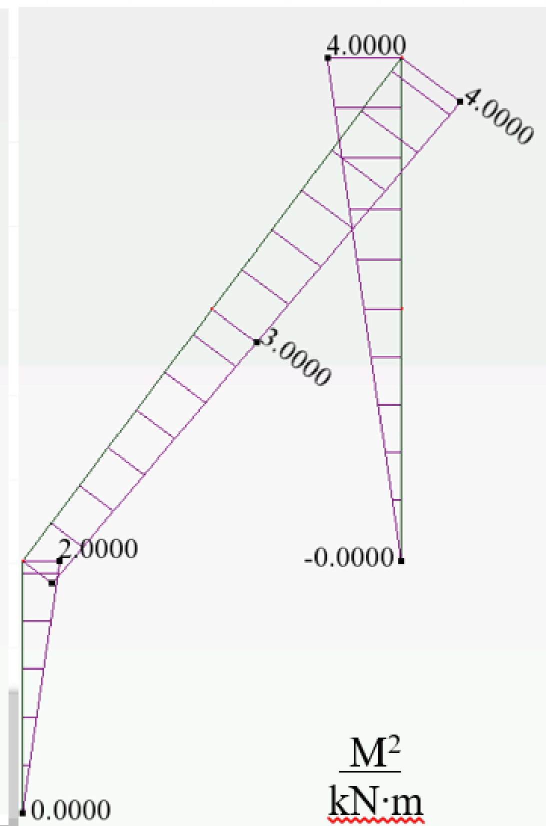
KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach usuniętych lub przeciętych więzi. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu.

$$\Delta_{iF} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_i$$







KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach usuniętych lub przeciętych więzi. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu.

$$\Delta_{iF}=\left\{\int\frac{\bar{M}^i\cdot M^F}{EI}dx+\sum_n\frac{\bar{S}_n^i\cdot S_n^F}{k_n}\right\}/P_i$$

$$\Delta_{1F}=\left\{\int\frac{\bar{M}^1\cdot M^F}{EI}dx+\sum_n\frac{\bar{S}_n^1\cdot S_n^F}{k_n}\right\}/P_1=\left\{\frac{2}{6\cdot 2}\left[(-1)\cdot 17,7422+4\cdot(-1)\cdot 12,5351+(-1)\cdot 7,3280\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{6}\left[(-1)\cdot(-12,6720)+4\cdot(-0,5)\cdot(-2,2502)+0\right]+\frac{1\cdot(-17,7422)}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^2}{EI}=0,0010\frac{kN\cdot m^2}{EI}$$

$$\Delta_{2F}=\left\{\int\frac{\bar{M}^2\cdot M^F}{EI}dx+\sum_n\frac{\bar{S}_n^2\cdot S_n^F}{k_n}\right\}/P_1=\left\{\frac{2}{6\cdot 2}\left[0\cdot 17,7422+4\cdot 1\cdot 12,5351+2\cdot 7,3280\right]+\right.$$

$$+\frac{5}{6}\left[2\cdot(-12,6720)+4\cdot 3\cdot(-2,2502)+4\cdot(-0,8284)\right]+\frac{2}{6}\left[0+4\cdot 1\cdot(4,7929)+2\cdot 9,5858\right]+$$

$$\left.+\frac{2}{6}\left[4\cdot(-0,8284)+4\cdot 3\cdot(4,3787)+2\cdot 9,5858\right]+\frac{0\cdot(-17,7422)}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^3}{EI}=-0,0025\frac{kN\cdot m^3}{EI}$$

WSTĘPNE PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW PRĘTÓW

Projektowanie prętów przyjmując założenia:

średni współczynnik obciążenia: $\gamma_f = 1.5$,

wytrzymałość obliczeniową stali $fd = 215$ MPa,

moduł Younga: $E = 210$ GPa.

$$W \geq \frac{\max M \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{12,6720 \cdot 1,5}{215000} m^3 = 0,000088409 m^3 = 88,409 cm^3$$

Uwzględniając, że układ składa się z prętów o sztywności EI oraz 2EI przyjęto dwuteownik równoległościenny IPE 160 dla prętów o sztywności EI oraz 2 IPE 160 dla pręta o sztywności 2EI

$W_{IPE\ 160}$= 108,6 cm^3, $I_{IPE\ 160}$=869,293 cm^4.

EI = 210000000kN/m^2*869,293*10^{-8}m^4=1825,4019 kNm^2,

k_φ = 10 EI/m = 18254,019 kNm/rad.

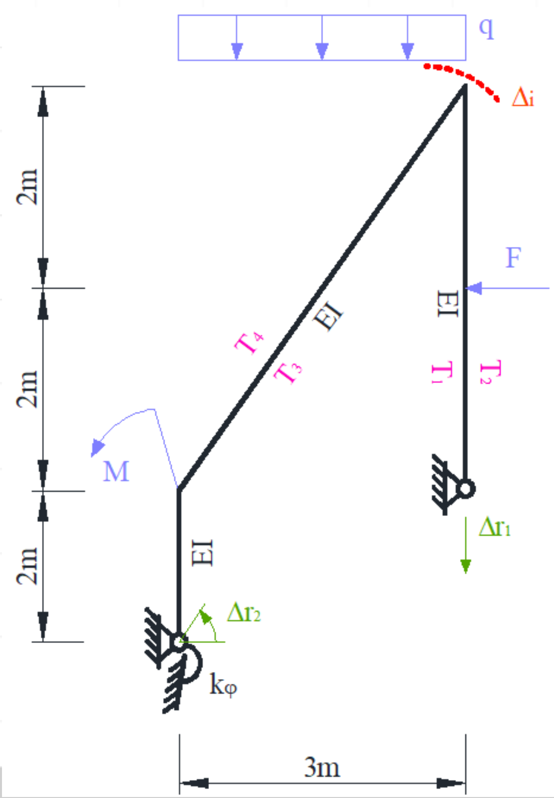
OBLICZENIE SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA

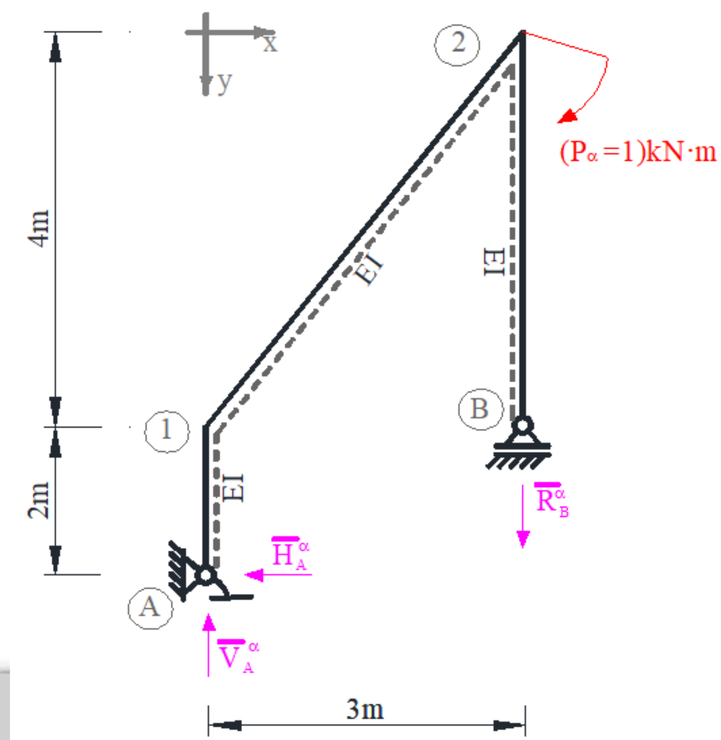
Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczane są ze wzorów:

$$\Delta_{\alpha F} = \left\{ \int \frac{\overline{M}^{\alpha} \cdot M^{F}}{EI} dx + \sum_{n} \frac{\overline{S}_{n}^{\alpha} \cdot S_{n}^{F}}{k_{n}} \right\} / P_{\alpha}$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SIŁY JEDNOSTKOWEJ NA KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA

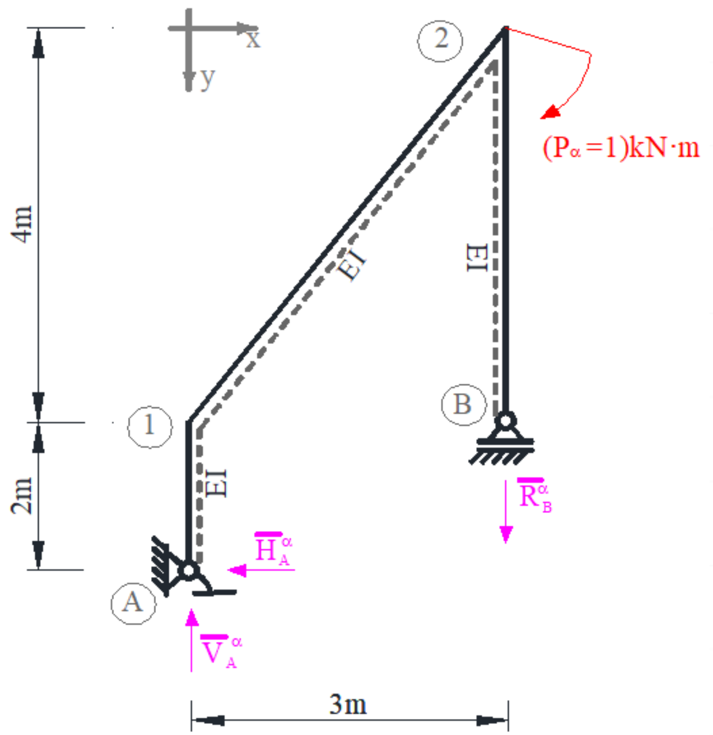
$$\Delta_{\alpha F}=\left\{\int\frac{\bar{M}^{\alpha}\cdot M^{F}}{EI}dx+\sum_{n}\frac{\bar{S}_{n}^{\alpha}\cdot S_{n}^{F}}{k_{n}}\right\}/\,P_{\alpha}$$





Reakcje od (P_{α}=1) kN·m

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SIŁY JEDNOSTKOWEJ NA KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA



Reakcje od (P_α=1) kN·m

Obliczenie reakcji

$$\sum X = 0 \qquad \overline{H}_{1A}^{\alpha} = 0kN$$

$$\sum M_A = 0 \qquad \overline{R}_B^{\alpha} \cdot 3m - P_\alpha kN \cdot m = 0 \qquad \overline{R}_B^{1} = -\frac{1}{3} kN$$

$$\sum Y = 0 \qquad \overline{R}_B^{\alpha} - \overline{V}_A^{\alpha} = 0 \qquad \overline{V}_A^{\alpha} = -\frac{1}{3} kN$$

Obliczenie momentów zginających

$$\overline{M}_{A1}^{\alpha} = \overline{M}_{1A}^{\alpha} = \overline{M}_{12}^{\alpha} = 0$$

$$\overline{M}_{2B}^{\alpha} = \overline{M}_{B2}^{\alpha} = 0$$

$$\overline{M}_{21}^{\alpha} = -P_\alpha = -1kN \cdot m$$

Obliczenie sił tnących

$$\overline{V}_{A1}^{\alpha} = \overline{V}_{1A}^{\alpha} = \overline{H}_{A}^{\alpha} = 0$$

$$\overline{V}_{12}^{\alpha} = \overline{V}_{21}^{\alpha} = \overline{H}_{A}^{\alpha} \cdot 0{,}8 + \overline{V}_{A}^{\alpha} \cdot 0{,}6 = 0kN \cdot 0{,}8 - \frac{1}{3} kN \cdot 0{,}6m = -0{,}2kN$$

$$\overline{V}_{B2}^{\alpha} = \overline{V}_{2B}^{\alpha} = 0$$

Obliczenie sił osiowe

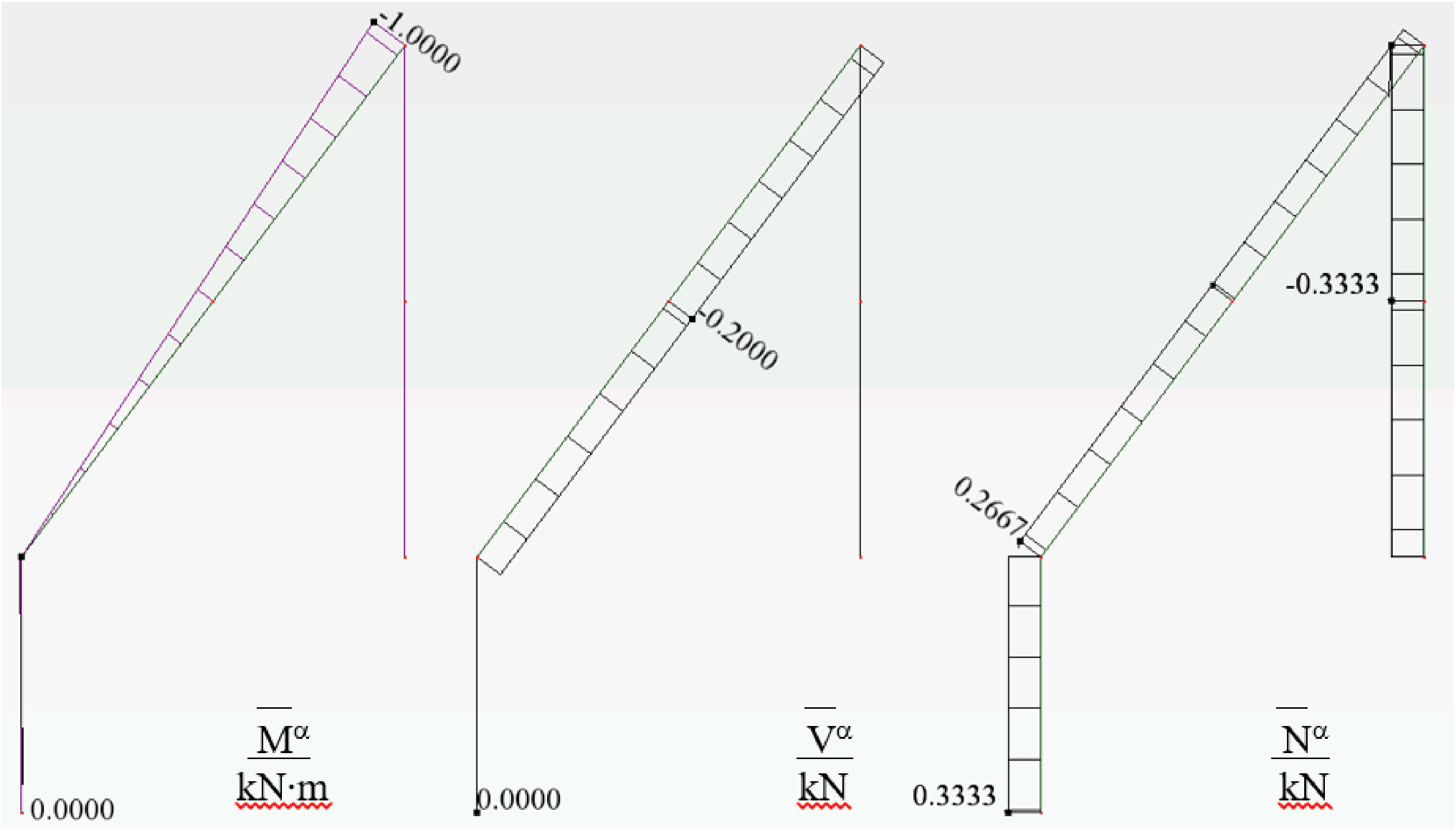
$$\overline{N}_{A1}^{\alpha} = \overline{N}_{1A}^{\alpha} = -\overline{V}_{A}^{\alpha} = 0{,}3333kN$$

$$\overline{N}_{12}^{\alpha} = \overline{N}_{21}^{\alpha} = \overline{H}_{A}^{\alpha} \cdot 0{,}6 - \overline{V}_{A}^{\alpha} \cdot 0{,}8 = 0kN \cdot 0{,}6 - (-\frac{1}{3})kN \cdot 0{,}8m = 0{,}2667kN$$

$$\overline{N}_{B2}^{\alpha} = \overline{V}_{2B}^{\alpha} = \overline{R}_{B}^{\alpha} = -0{,}3333kN$$

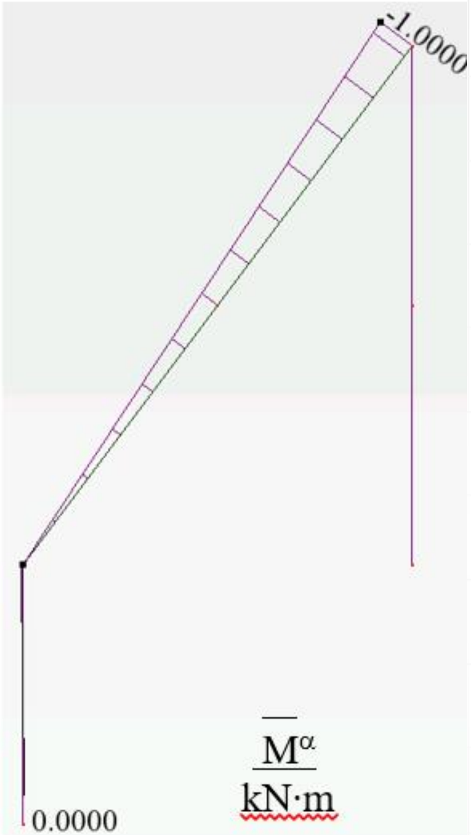
ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SIŁY JEDNOSTKOWEJ NA KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA

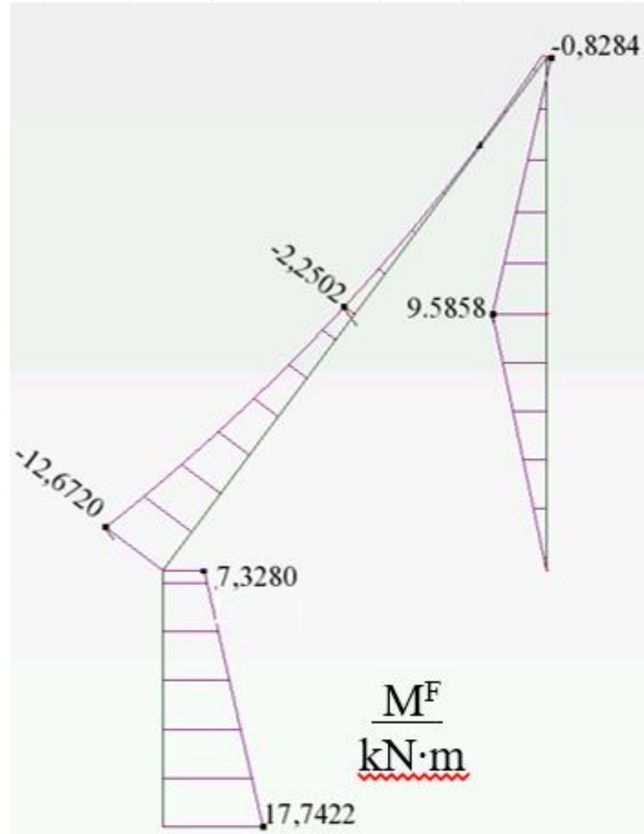
Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_{\varphi}^{1} = 0$



Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA





$$\Delta_{\alpha F}=\left\{\frac{5}{6}\left[0\cdot(-12,6720)+4\cdot(-0,5)\cdot(-2,2502)+(-1)\cdot(-0,8284)\right]+\frac{0\cdot(-17,7422)}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^2}{EI_y}=$$

$$=\frac{4,4407kN\cdot m^2}{1825,4019kN\cdot m^2}=0,0024rad$$

ZADANIE DOMOWE (projekt nr 1, zadanie nr 2):

1. Wstępnie zaprojektować przekroje prętów.
2. Przeprowadzić kontrole rozwiązania.
3. Obliczyć szukane przemieszczenie.

Uwagi do wprowadzanego układu w Robocie

(projekt nr 1, zadanie nr 2):

Uwagi do wprowadzanego układu w Robocie (projekt nr 1, zadanie nr 2):