Opracowała: dr inż. Kamila Jarczewska
na podstawie wykładu prof. dr hab. inż. Wojciecha Glabisza

**Wykład nr 7**

# WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ W PŁASKICH UKLADACH SPRĘŻYSTYCH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH (SN)

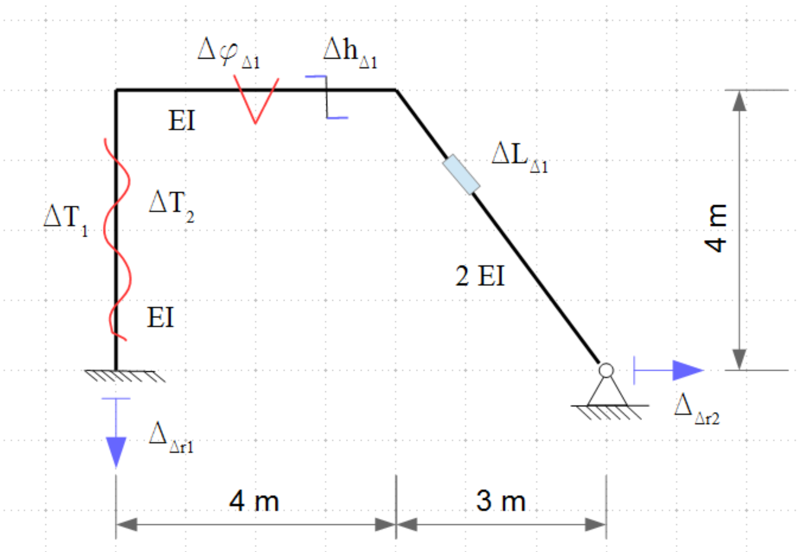
Zanim przejdziemy do tematu wykładu w pierwszej kolejności przedstawione zostanie zastosowanie Metody Sił do rozwiązywania płaskich układów prętowych statycznie niewyznaczalnych SN obciążonych wpływami niemechanicznymi (wpływem temperatury, przemieszczeniami podpór, błędami montażu).

## Metoda sił – wpływy niemechaniczne

- Rodzaj obciążenia (mechaniczne, niemechaniczne) nie ma wpływu na istotę idei metody sił. Jedyna różnica między obciążeniem mechanicznym a nie mechanicznym w zagadnieniu metody sił pojawia się przy wyznaczeniu wyrazów wolnych układu równań metody sił.

## Przykład 1.

Ramę statycznie niewyznaczalną obciążoną wpływami niemechanicznymi jak na rysunku 1. należy rozwiązać w zakresie sił przekrojowych.




Rys.1.

**a) Wpływy temperatury ($\Delta t$)**

Np.: $\Delta T_1 = 10°\mathrm{C}$, $\Delta T_2 = -12°\mathrm{C}$, $\alpha_T = \frac{0{,}000012}{°\mathrm{C}}$, $h = 0{,}2m$, przekrój symetryczny

**b) Wpływy błędów montażu ($\Delta m$)**

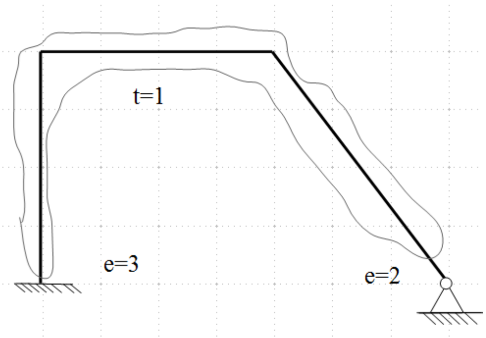
Np.: $\Delta L = -3cm$, $\Delta h = 4cm$, $\Delta\varphi = 5°$

**c) Wpływ osiadania podpór ($\Delta r$)**

Np.: $\Delta r_1 = 5cm, \Delta r_2 = 3cm$

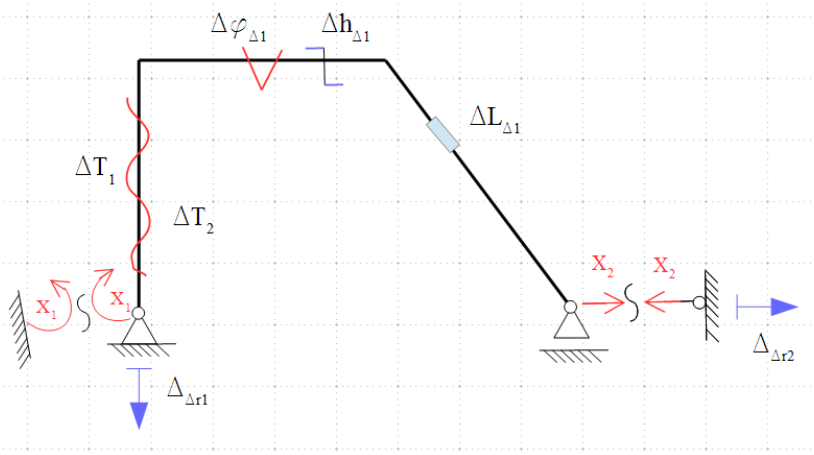
Metoda sił:

1. Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu $(n_h)$




$$n_h = e - 3t = 5 - 3 * 1 = 2$$

2. Przyjęcie układu podstawowego metody sił




3. Układ równań metody sił

a) **Wpływy temperatury**

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \bar{\Delta}_{1\,\Delta t} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \bar{\Delta}_{2\,\Delta t} = 0$$

b) **Wpływ błędów montażu**

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \bar{\Delta}_{1\,\Delta m} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \bar{\Delta}_{2\,\Delta m} = 0$$

c) **Wpływ osiadania podpór**

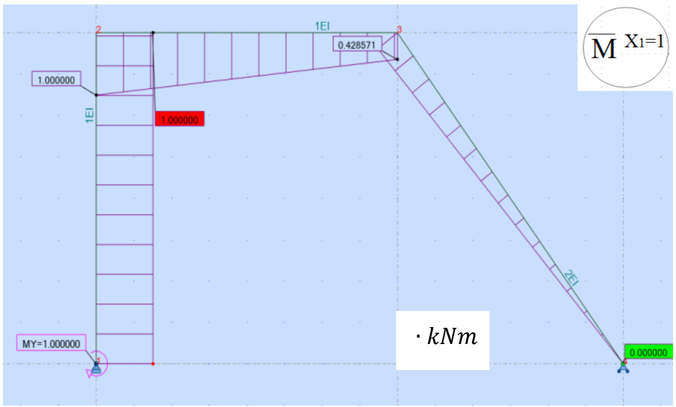
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \bar{\Delta}_{1\,\Delta r} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \bar{\Delta}_{2\,\Delta r} = 0$$

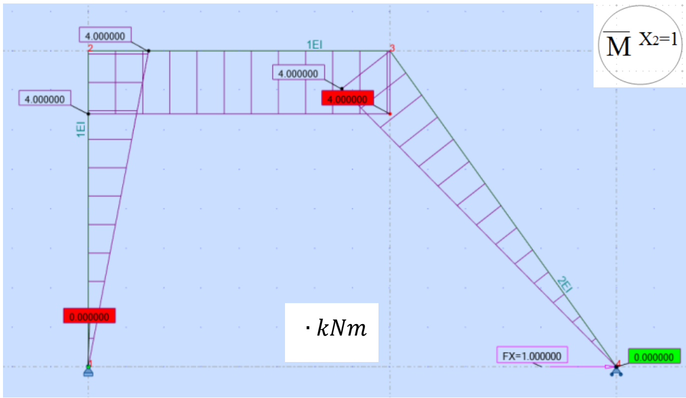
*Uwaga: Można potraktować, że wszystkie te wpływy obciążeń działają jednocześnie i wówczas układ równań metody sił będzie miał następującą postać:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + (\bar{\Delta}_{1\,\Delta t} + \bar{\Delta}_{1\,\Delta m} + \bar{\Delta}_{1\,\Delta r}) = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + (\bar{\Delta}_{2\,\Delta t} + \bar{\Delta}_{2\,\Delta m} + \bar{\Delta}_{2\,\Delta r}) = 0$$

## 4. Współczynniki układu równań metody sił

**Współczynniki macierzy podatności $\delta_{ij}$** wyznacza się analogicznie jak w przypadku obciążeń mechanicznych korzystając z II sformułowania zasady prac przygotowanych przy czym aby móc zastosować tę zasadę należy uprzednio rozwiązać układ podstawowy metody sił od stanów jednostkowych
$X_1 = \overline{1}_i, X_2 = \overline{1}_i$.






Wykres momentów zginających od stanów jednostkowych.

Wzór do wyznaczania przemieszczeń:

$$\overline{1}_i\, \delta_{ij} = \sum_p \int \overline{M}^i \frac{\overline{M}^j}{EI} dx + \sum_p \int \overline{T}^i \frac{\kappa \overline{T}^j}{GA} dx + \sum_p \int \overline{N}^i \frac{\overline{N}^j}{EA} dx + \sum_m \overline{S}_m^i \frac{\overline{S}_m^j}{k_m}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11} = 6,3027kNm^3/EI, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = 20,8571Nm^3/EI, \qquad \delta_{22} = 98,666Nm^3/EI}$$

**Wyrazy wolne układu równań metody sił $\overline{\Delta}_{i\,\Delta}$** są to przemieszczenia w układzie podstawowym (SW) w miejscu i na kierunku i-tych sił hiperstatycznych wywołane wpływami obciążeń niemechanicznych. Wzory wynikające z II sformułowania prac przygotowanych na przemieszczenia w układzie statycznie wyznaczalnym (SW), który jest obciążony wpływami niemiechnicznymi wyprowadzone są w treści wykładu nr 3. Aby móc wyliczyć wyrazy wolne układu równań metody sił należy wyznaczyć oprócz wykresów momentów zginających od stanów jednostkowych również siły osiowe i siły tnące od stanów jednostkowych.

a) **Wpływy temperatury**:

$$\overline{1}_i\, \Delta_{i\,\Delta_t} = \sum_p (\alpha_t \Delta T_0 \int \overline{N}^{1i} dx)_p + \sum_p (\frac{\alpha_t\,(\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \int \overline{M}^{1i} dx)_p$$

$$1kNm\, \Delta_{1\,\Delta_t} = \sum_p (\alpha_t \Delta T_0 \int \overline{N}^{X_1=1} dx)_p + \sum_p (\frac{\alpha_t\,(\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \int \overline{M}^{X_1=1} dx)_p$$
$$= \frac{0{,}000012}{℃}\left(\frac{-12℃ + 10℃}{2}\right) 0{,}1428kN * 4m + \frac{0{,}000012}{℃}\left(\frac{-12℃ - 10℃}{0{,}2m}\right) 1kNm * 4m$$
$$= -0{,}00528kNm$$

$$\boldsymbol{\Delta_{1\,\Delta_t} = -0,00528\, rad}$$

$$1kN\,\Delta_{2\,\Delta_t}=\sum_p(\alpha_t\Delta T_0\int\overline{N}^{X_2=1}dx)_p+\sum_p(\frac{\alpha_t\,(\Delta T_w-\Delta T_p)}{h}\int\overline{M}^{X_2=1}dx)_p$$
$$=\frac{0{,}000012}{°\mathrm{C}}\left(\frac{-12°\mathrm{C}+10°\mathrm{C}}{2}\right)0kN*4m+\frac{0{,}000012}{°\mathrm{C}}\left(\frac{-12°\mathrm{C}-10°\mathrm{C}}{0{,}2m}\right)\frac{1}{2}4kNm*4m$$
$$=-0{,}01056kNm$$

$$\boldsymbol{\Delta_{2\,\Delta_t}=-0,01056m}$$

b) Wpływy błędów montażu:

$$\overline{1}_i\,\Delta_{i\,\Delta_m}=\sum\nolimits_k\overline{M}^{1i}\Delta\varphi_{\Delta\mathrm{k}}+\sum\nolimits_n\overline{T}^{1i}\Delta h_{\Delta\mathrm{n}}+\sum\nolimits_s\overline{N}^{1i}\Delta L_{\Delta\mathrm{s}}$$

$$1kNm\,\Delta_{1\,\Delta_m}=\sum\nolimits_k\overline{M}^{X_1=1}\Delta\varphi_{\Delta\mathrm{k}}+\sum\nolimits_n\overline{T}^{X_1=1}\Delta h_{\Delta\mathrm{n}}+\sum\nolimits_s\overline{N}^{X_1=1}\Delta L_{\Delta\mathrm{s}}=$$
$$=-\frac{5°\pi}{180°}\,0.71428kNm+0{,}04m(-0{,}1428kN)+(-0{,}03m)(-0{,}11428kN)=-0{,}06462kNm$$
$$\boldsymbol{\Delta_{1\,\Delta_m}=-0,06462\,rad}$$

$$1kN\,\Delta_{2\,\Delta_m}=\sum\nolimits_k\overline{M}^{X_2=1}\Delta\varphi_{\Delta\mathrm{k}}+\sum\nolimits_n\overline{T}^{X_2=1}\Delta h_{\Delta\mathrm{n}}+\sum\nolimits_s\overline{N}^{X_2=1}\Delta L_{\Delta\mathrm{s}}=$$
$$=-\frac{5°\pi}{180°}\,4kNm+0{,}04m(0kN)+(-0{,}03m)0.6kN-0{,}3671kNm$$
$$\boldsymbol{\Delta_{2\,\Delta_m}=-0,3671m}$$

c) Wpływy osiadania podpór:

$$\overline{1}_i\,\Delta_{i\,\Delta_r}=-\sum_m\overline{R}_{m\,1i}\,\Delta_{r_m}$$

$$1kNm\,\Delta_{1\,\Delta_r}=-\sum_m\overline{R}_{m\,X_1=1}\,\Delta_{r_m}=-(0{,}1428kN*0{,}05m+0kN*0{,}03m)=-7{,}14*10^{-3}kNm$$
$$\boldsymbol{\Delta_{1\,\Delta_r}=-7,14*10^{-3}\,rad}$$

$$1kN\,\Delta_{2\,\Delta_r}=-\sum_m\overline{R}_{m\,X_2=1}\,\Delta_{r_m}=-(0kN*0{,}05m+1kN*0{,}03m)=-0.03kNm$$
$$\boldsymbol{\Delta_{2\,\Delta_r}=-0,03m}$$

## 5. Rozwiązanie układu równań metody sił

**a) Wpływy temperatury**

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\overline{\Delta}_{1\,\Delta t}=0$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\overline{\Delta}_{2\,\Delta t}=0$$

$$\boldsymbol{\{X_1\to0,00161\,EI/kNm^2,\qquad X_2\to-0.000233\,EI/kNm^2\}}$$

**b) Wpływ błędów montażu**

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \bar{\Delta}_{1\,\Delta m} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \bar{\Delta}_{2\,\Delta m} = 0$$

$$\{\boldsymbol{X_1} \to -\mathbf{0,006855}\ \boldsymbol{EI/kNm^2}, \qquad \boldsymbol{X_2} \to \mathbf{0.005169}\boldsymbol{EI/kNm^2}\}$$

**c) Wpływ osiadania podpór**

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \bar{\Delta}_{1\,\Delta r} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \bar{\Delta}_{2\,\Delta r} = 0$$

$$\{\boldsymbol{X_1} \to \mathbf{0,000423}\ \boldsymbol{EI/kNm^2}, \qquad \boldsymbol{X_2} \to \mathbf{0,000215}\boldsymbol{EI/kNm^2}\}$$

*Uwaga: Przy założeniu, że powyższe obciążenia działają jednocześnie na układ zadany można z sumować powyższe wyniki rozwiązań z podpunktu 5 (gdyż zagadnienie jest liniowe) lub bezpośrednio rozwiązać poniższy układ równań

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + (\bar{\Delta}_{1\,\Delta t} + \bar{\Delta}_{1\,\Delta m} + \bar{\Delta}_{1\,\Delta r}) = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + (\bar{\Delta}_{2\,\Delta t} + \bar{\Delta}_{2\,\Delta m} + \bar{\Delta}_{2\,\Delta r}) = 0$$

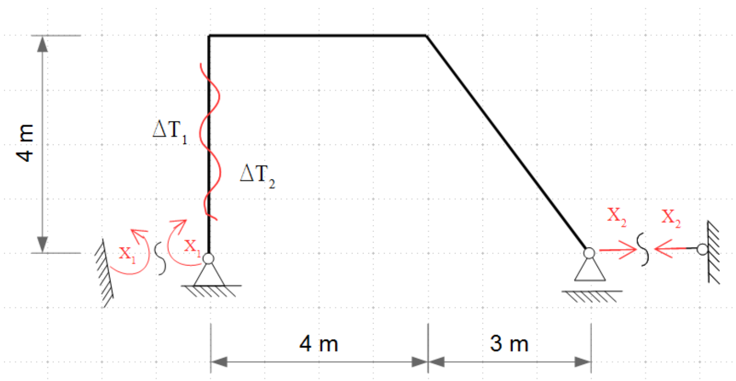
$$\{X_1 \to -0.0048231 EI/kNm^2, \qquad X_2 \to 0.00515129 EI/kNm^2\}$$

6. Wyznaczenie wykresów sił przekrojowych w układzie rzeczywistym SN.

## I Sposób

Obciążenie niemechaniczne nie wywołuje sił wewnętrznych w układach statycznie wyznaczalnych dlatego wystarczy rozwiązać układ SW od wyznaczonych wartości sił hiperstatycznych i uzyskane rozwiązanie będzie rozwiązaniem układu zadanego statycznie niewyznaczalnego SN.

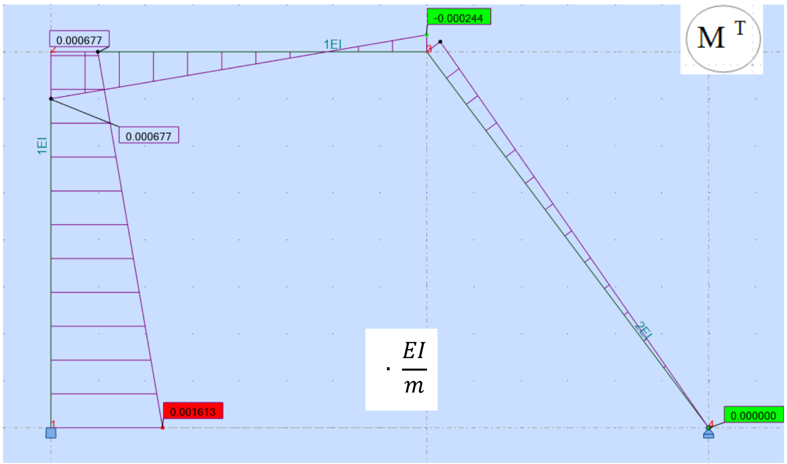
**a) Wpływy temperatury**



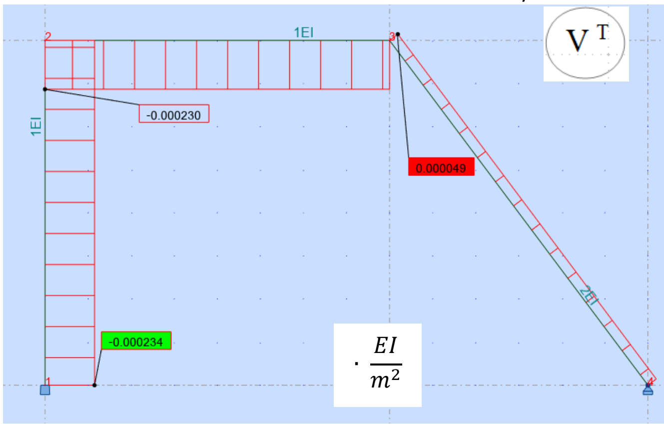

$$\boldsymbol{X_1} = 0{,}00161\frac{EI}{kNm^2}\cdot \mathbf{1}\boldsymbol{kNm} = $$
$$= 0{,}00161\frac{EI}{m}$$

$$\boldsymbol{X_2} = -0.000233\frac{EI}{kNm^2}\cdot \mathbf{1}\boldsymbol{kN} = $$
$$= -0.000233\frac{EI}{m^2}$$

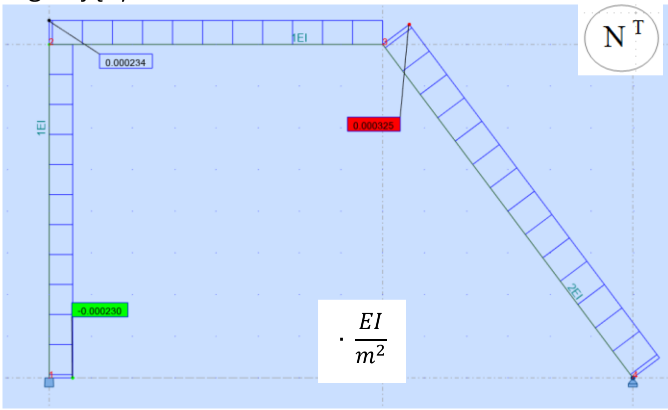
Obciążenie temperaturą jest nieistotne przy wyznaczaniu reakcji i sił przekrojowych, ponieważ układ na tym etapie jest SW




Wykres momentów zginających



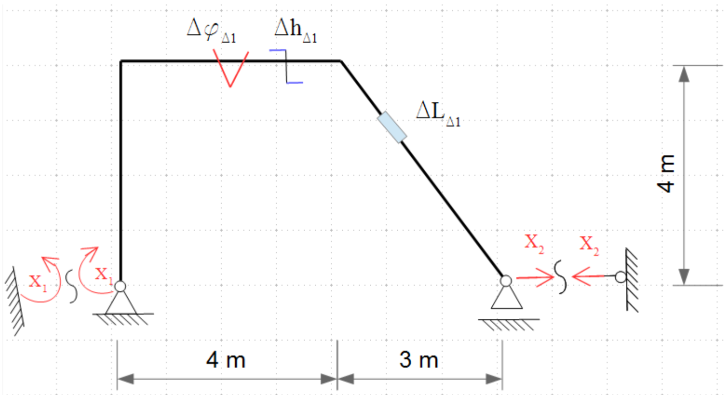

Wykres sił tnących




Wykres sił osiowych (rozciąganie znak „-„)

*UWAGA po przemnożeniu wartości na wykresach przez określoną sztywność EI [kNm^2] uzyska się wartości momentów zginających w [kNm] ,a sił osiowych i tnących w [kN].

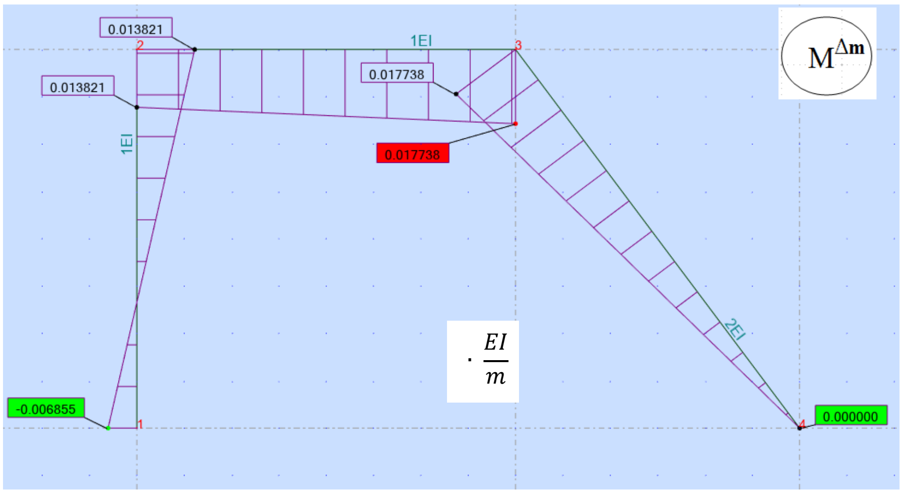
### b) Wpływy błędów montażu



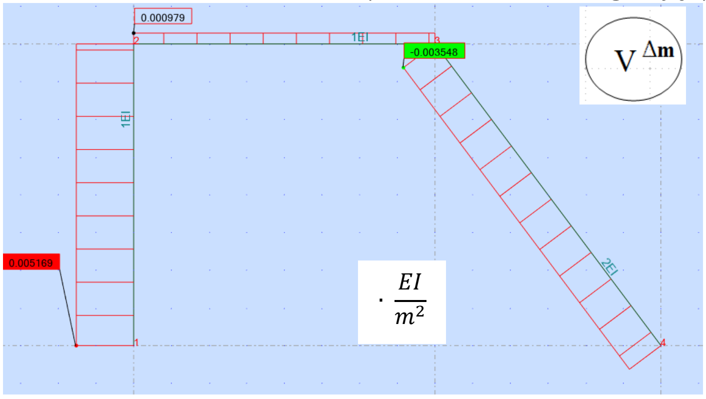

$$\boldsymbol{X_1} = -0{,}006855\,\frac{EI}{kNm^2}\cdot \mathbf{1}\boldsymbol{kNm} = = -0{,}006855\,\frac{EI}{m}$$

$$\boldsymbol{X_2} = 0.005169\,\frac{EI}{kNm^2}\cdot \mathbf{1}\boldsymbol{kN} = = 0.005169\,\frac{EI}{m^2}$$

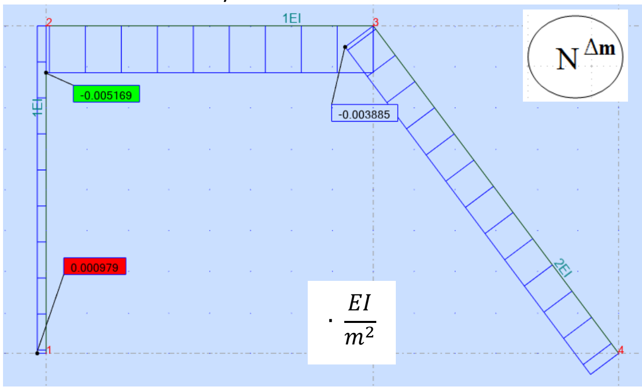
Obciążenie błędami montażu jest nieistotne przy wyznaczaniu reakcji i sił przekrojowych, ponieważ układ na tym etapie jest SW.




Wykres momentów zginających w układzie zadanym SN



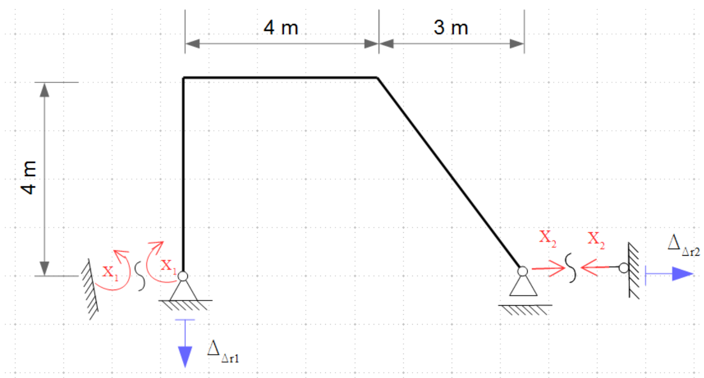

Wykres sił tnących w układzie zadanym SN




Wykres sił osiowych (rozciąganie znak „-„) w układzie zadanym SN

*UWAGA po przemnożeniu wartości na wykresach przez określoną sztywność EI [kNm^2] uzyska się wartości momentów zginających w [kNm] ,a sił osiowych i tnących w [kN].

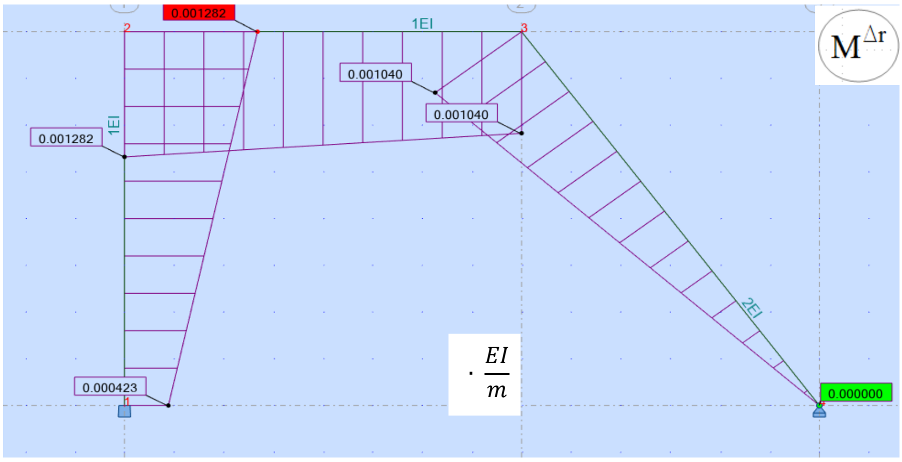
**c) Wpływy osiadania podpór**



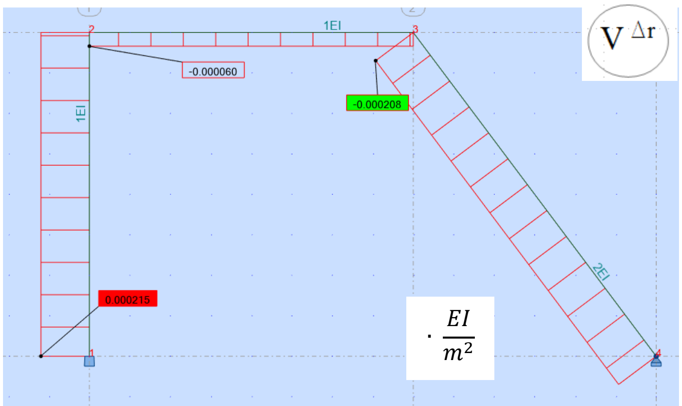

$$\boldsymbol{X_1} = 0{,}000423\ \frac{EI}{kNm^2} \cdot \boldsymbol{1kNm} == 0{,}000423\ \frac{EI}{m}$$

$$\boldsymbol{X_2} = 0{,}000215 \frac{EI}{kNm^2} \cdot \boldsymbol{1kN} = = 0{,}000215 \frac{EI}{m^2}$$

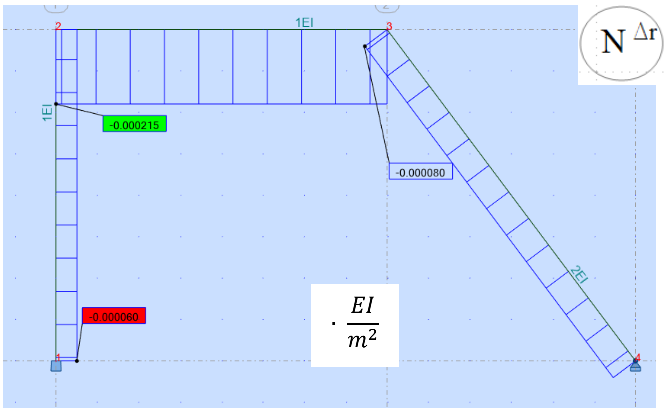
Obciążenie osiadaniem podpór jest nieistotne przy wyznaczaniu reakcji i sił przekrojowych, ponieważ układ na tym etapie jest SW.




Wykres momentów zginających w układzie zadanym SN




Wykres sił tnących w układzie zadanym SN




Wykres sił osiowych (rozciąganie znak „-„)w układzie zadanym SN

*UWAGA po przemnożeniu wartości na wykresach przez określoną sztywność EI [kNm^2] uzyska się wartości momentów zginających w [kNm] ,a sił osiowych i tnących w [kN].

## II Sposób : Superpozycja poszczególnych rozwiązań.

Momenty zginające : $M_\alpha^\Delta = \overline{M}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{M}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{M}_\alpha^\Delta$

Siły osiowe: $N_\alpha^\Delta = \overline{N}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{N}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{N}_\alpha^\Delta$

Siły tnące: $T_\alpha^\Delta = \overline{T}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{T}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{T}_\alpha^\Delta$

Reakcje: $R_\alpha^\Delta = \overline{R}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{R}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{R}_\alpha^\Delta$

W układach statycznie wyznaczalnych siły wewnętrze od wpływów niemechanicznych są zerowe stąd:

$$\overline{M}_\alpha^\Delta = \overline{N}_\alpha^\Delta = \overline{T}_\alpha^\Delta = \overline{R}_\alpha^\Delta = 0$$

***Przykładowo** wyliczone zostaną wartości momentów zginających w układzie zadanym w punkcie A (punkt A znajduje się przy podporze sztywnej) od wszystkich wpływów obciążeń niemechanicznych**.**

$$M_A^{\Delta t} = \overline{M}_A^{X_1=1} * X_1 + \overline{M}_A^{X_2=1} * X_2$$

$$M_A^{\Delta t} = 1kNm * 0{,}00161 \frac{EI}{kNm^2} + 0kNm * 0.000233 \frac{EI}{kNm^2} = 0{,}00161 \frac{EI}{m}$$

$$M_A^{\Delta m} = \overline{M}_A^{X_1=1} * X_1 + \overline{M}_A^{X_2=1} * X_2$$

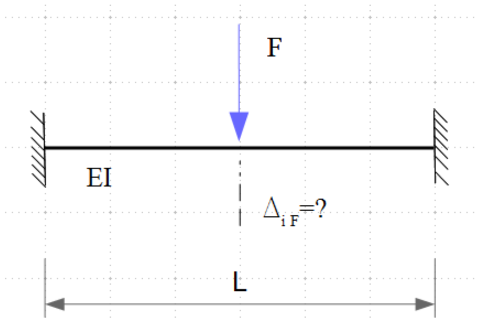
$$M_A^{\Delta m} = 1kNm * (-0{,}006855 \frac{EI}{kNm^2}) + 0kNm * 0.005169 \frac{EI}{kNm^2} = -0{,}006855 \frac{EI}{m}$$

$$M_A^{\Delta r} = \overline{M}_A^{X_1=1} * X_1 + \overline{M}_A^{X_2=1} * X_2$$

$$M_A^{\Delta r} = 1kNm * 0{,}000423 \frac{EI}{kNm^2} + 0kNm * 0{,}000215 \frac{EI}{kNm^2} = 0{,}000423 \frac{EI}{m}$$

## WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH (SN)

Należy wyznaczyć przemieszczenie $\Delta_{iF}$ w układzie statycznie niewyznaczalnym o schemacie statycznym jak na rysunku 2.



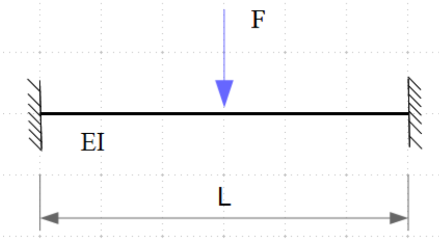

Rys. 2.

Aby wyznaczyć przemieszczenie niezależnie czy jest to układ statycznie wyznaczalny czy statycznie niewyznaczalny należy:

1. **Wyznaczyć rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenie.**
2. **Wyznaczyć rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.**
3. **Zastosować II sformułowanie Zasady Prac Przygotowanych.**

# I sposób wyznaczenia wartości szukanego przemieszczenia w układzie SN

**1. Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia**
(Stan rzeczywistych sił i przemieszczeń)



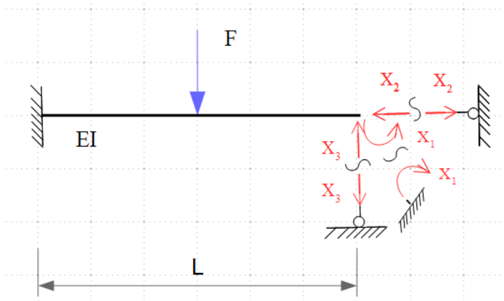

*Układ jest SN stąd aby go rozwiązać zastosowano metodę sił.

## Metoda sił:

- Stopień statycznej niewyznaczalności:

$$n_h = e - 3t = 6 - 3 * 1 = 3$$

- Układ podstawowy metody sił



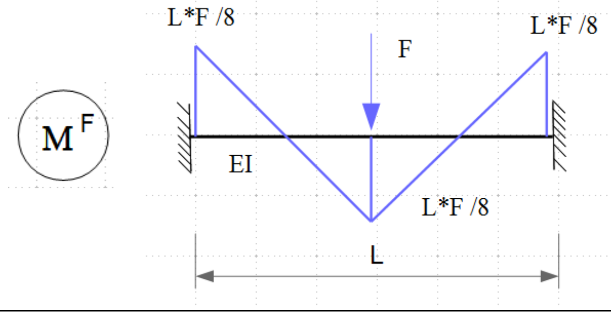

- Układ równań metody sił

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \bar{\Delta}_{1\,F} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \bar{\Delta}_{2\,F} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \bar{\Delta}_{3\,F} = 0$$

- Rozwiązanie układu równań metody sił

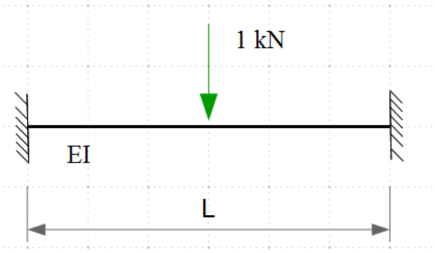
$$X_1 = \cdots, X_2 = \cdots, X_3 = \cdots$$

- Wykresy sił wewnętrznych w układzie SN



**2. Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**

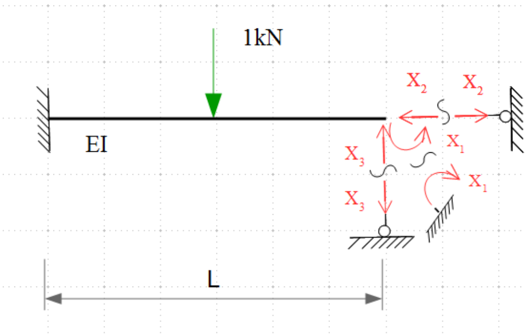
(Stan wirtualnego obciążenia)




*Układ jest SN stąd aby go rozwiązać zastosowano metodę sił.

## Metoda sił

- Stopień statycznej niewyznaczalności: $n_h = e - 3t = 6 - 3 * 1 = 3$
- Układ podstawowy metody sił



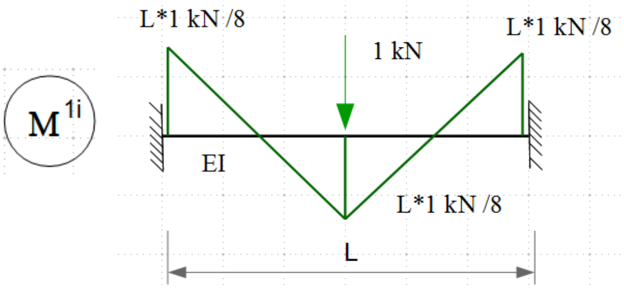

- Układ równań metody sił

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \bar{\Delta}_{1\,1i} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \bar{\Delta}_{2\,1i=1} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \bar{\Delta}_{3\,1i} = 0$$

- Rozwiązanie układu równań metody sił

$$X_1 = \cdots, X_2 = \cdots, X_3 = \cdots$$

- Wykresy sił wewnętrznych w układzie SN




**3. Zastosowanie II sformułowania Zasady Prac Przygotowanych.**

$$1_i\,\Delta_{iF} = \sum_p \int M^{1i}\frac{M^F}{EI}dx + \sum_m S_m^{1i}\frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1kN\,\Delta_{iF} = \frac{1}{EI}\frac{\frac{L}{2}}{6}\left(-1kN\frac{L}{8} * \left(\frac{-FL}{8}\right) + 4 * 0 * 0 + 1kN\frac{L}{8} * \frac{FL}{8}\right) * 2 = kN\frac{FL^3}{192EI}$$

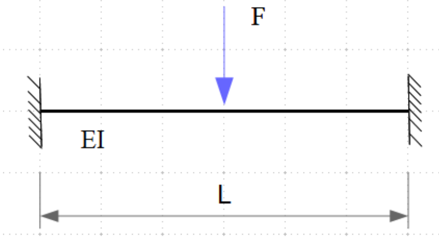
$$\Delta_{iF} = \boldsymbol{\frac{FL^3}{192EI}}$$

# II sposób wyznaczenia wartości szukanego przemieszczenia w układzie SN

*UWAGA:

Można dokonać uproszczenia obliczeń, redukcji obliczeń. Redukcja tych obliczeń polega na tym, że **stan jednostkowy** analizuje się **w układzie statycznie wyznaczalnym SW**, a nie w układzie zadanym SN jak to miało miejsce wcześniej. Jest to tzw. **I twierdzenie redukcyjne**. Dowód zostanie podany w dalszej części wykładu.

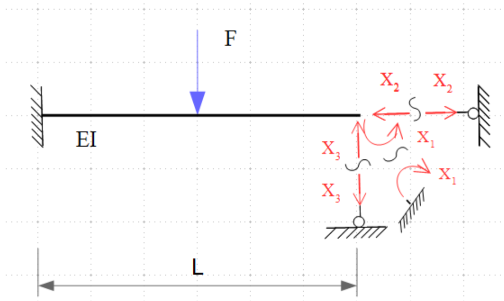
1. **Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia**
   (Stan rzeczywistych sił i przemieszczeń)




*Układ jest SN stąd aby go rozwiązać zastosowano metodę sił.

## Metoda sił:

- Stopień statycznej niewyznaczalności: $n_h = e - 3t = 6 - 3 * 1 = 3$
- Układ podstawowy metody sił



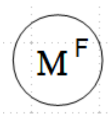

- Układ równań metody sił

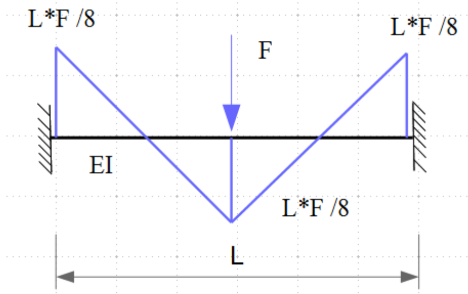
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \bar{\Delta}_{1\,F} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \bar{\Delta}_{2\,F} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \bar{\Delta}_{3\,F} = 0$$

- Rozwiązanie układu równań metody sił

$$X_1 = \cdots, X_2 = \cdots, X_3 = \cdots$$

- Wykresy sił wewnętrznych w układzie SN

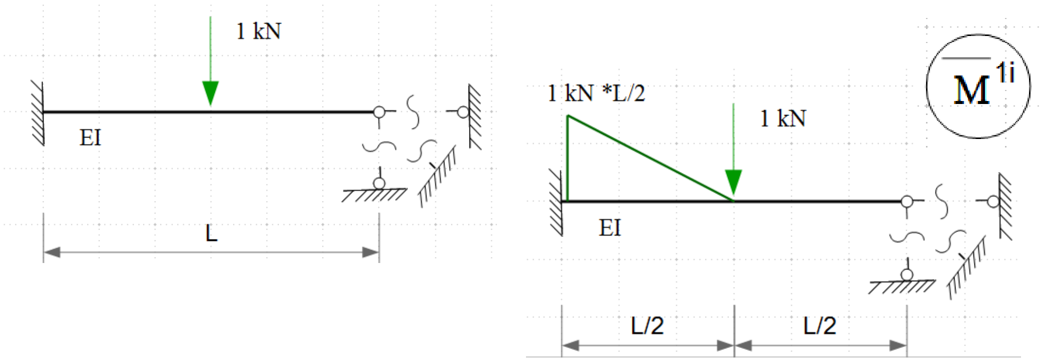


2. **Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**
(Stan wirtualnego obciążenia)

*Układ przyjmuje się jako SW , może być to ten sam układ podstawowy jak w podpunkcie 1 ale nie jest to wymogiem, następnie obciąża się go siłą jednostkową stojącą w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia stąd nie trzeba stosować metody sił aby rozwiązać ten układ. Do rozwiązania tego układu wystarczą jedynie równania równowagi sił.

*Układ jest SW




3. **Zastosowanie II sformułowania Zasady Prac Przygotowanych.**

$$\overline{1}_i\,\Delta_{iF} = \sum_p \int \overline{M}^{1i} \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \overline{S}_m^{1i} \frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1kN\,\Delta_{iF} = \frac{1}{EI}\frac{\frac{L}{2}}{6}\left(-1kN\frac{L}{2} * \left(-\frac{FL}{8}\right) + 4 * 1kN\frac{L}{4} * 0 + 0 * \frac{FL}{8}\right) = kN\frac{FL^3}{192EI}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{iF} = \frac{FL^3}{192EI}}$$

## III sposób wyznaczenia wartości szukanego przemieszczenia w układzie SN

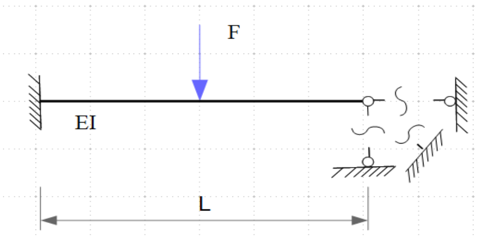
*UWAGA:

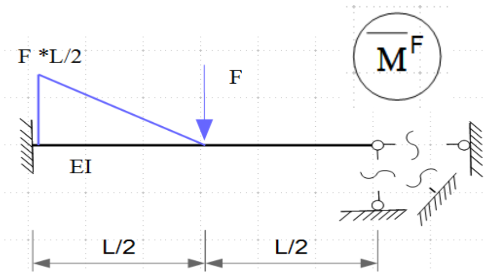
Można dokonać innego rodzaju uproszczenia obliczeń, redukcji obliczeń. Redukcja tych obliczeń polega na tym, że **stan rzeczywistych obciążeń** analizuje się **w układzie statycznie wyznaczalnym SW**, a nie w układzie zadanym SN. Jest to tzw. **II twierdzenie redukcyjne**.

**1. Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia**
(Stan rzeczywistych sił i przemieszczeń)

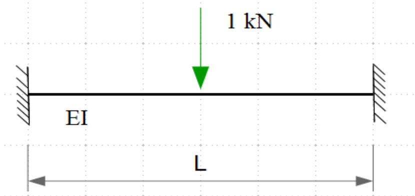
*Układ przyjmuje się jako SW obciążany jest on obciążeniem będącym przyczyną szukanego przemieszczenie. Nie trzeba stosować metody sił aby go rozwiązać. Do rozwiązania tego układu wystarczą jedynie równania równowagi sił.

*Układ jest SW



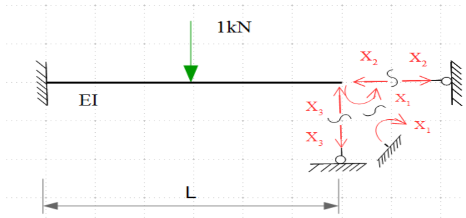

**2. Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**
(Stan wirtualnego obciążenia)




*Układ jest SN stąd aby go rozwiązać zastosowano metodę sił.

## Metoda sił:

- Stopień statycznej niewyznaczalności: $n_h = e - 3t = 6 - 3 * 1 = 3$
- Układ podstawowy metody sił



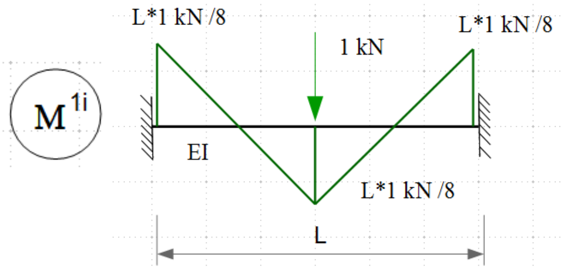

- Układ równań metody sił

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \bar{\Delta}_{1\,1i} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \bar{\Delta}_{2\,1i=1} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \bar{\Delta}_{3\,1i} = 0$$

- Rozwiązanie układu równań metody sił

$$X_1 = \cdots, X_2 = \cdots, X_3 = \cdots$$

- Wykresy sił wewnętrznych w układzie SN



3. **Zastosowanie II sformułowania Zasady Prac Przygotowanych.**

$$1_i\,\Delta_{iF}=\sum_p\int M^{1i}\frac{\overline{M}^F}{EI}dx+\sum_m S_m^{1i}\frac{\overline{S}_m^F}{k_m}$$

$$1kN\,\Delta_{iF}=\frac{1}{EI}\frac{\frac{L}{2}}{6}\left(-1kN\frac{L}{8}*\left(-\frac{FL}{2}\right)+4*0*F\frac{L}{4}+1kN\frac{L}{8}*0\right)=kN\frac{FL^3}{192EI}$$

$$\Delta_{iF}=\boldsymbol{\frac{FL^3}{192EI}}$$

## Dowód umożliwiający stosowanie sposobu redukcyjnego:

(W celach większej przejrzystości poniższej analizy pominięty zostanie wpływ sił osiowych, sił tnących i sił sprężystych na wartość przemieszczenia oraz przykładowo przyjęte zostanie, że $n_h=2$.)

bez redukcji obliczeń

$$1_i\,\Delta_{iF}=\sum_p\int M^{1i}\frac{M^F}{EI}dx=\sum_p\frac{1}{EI}\int(\overline{M}^{X1=1}X_1+\overline{M}^{X2=1}X_2+\overline{M}^{1i})(\overline{M}^{X1=1}X_1+\overline{M}^{X2=1}X_2+\overline{M}^F)dx=\sum_p\frac{1}{EI}\int[(\overline{M}^{X1=1}\overline{M}^{X1=1}X_1X_1+\overline{M}^{X1=1}\overline{M}^{X2=1}X_1X_2+\overline{M}^{X1=1}\overline{M}^FX_1)+(\overline{M}^{X2=1}\overline{M}^{X1=1}X_2X_1+\overline{M}^{X2=1}\overline{M}^{X2=1}X_2X_2+\overline{M}^{X2=1}\overline{M}^FX_2)+(\overline{M}^{1i}\overline{M}^{X1=1}X_1+\overline{M}^{1i}\overline{M}^{X2=1}X_2+\overline{M}^{1i}\overline{M}^F)]dx=\delta_{11}X_1^2+\delta_{12}X_1X_2+\overline{\Delta}_{1F}X_1+\delta_{22}X_1^2+\delta_{21}X_2X_1+\overline{\Delta}_{2F}X_2+X_1\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{\overline{M}^{X1=1}}{EI}dx+X_2\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{\overline{M}^{X2=1}}{EI}dx+\int\overline{M}^{1i}\frac{\overline{M}^F}{EI}dx=X_1(\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\overline{\Delta}_{1F})+X_2(\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\overline{\Delta}_{2F})+(\delta_{1i\,1}X_1+\delta_{1i\,2}X_2+\overline{\Delta}_{1i\,F})=\boldsymbol{\delta_{1i\,1}X_1+\delta_{1i\,2}X_2+\overline{\Delta}_{1i\,F}}\quad(*)$$

z redukcją obliczeń

$$1_i\,\Delta_{iF}=\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{M^F}{EI}dx=\sum_p\frac{1}{EI}\int\overline{M}^{1i}(\overline{M}^{X1=1}X_1+\overline{M}^{X2=1}X_2+\overline{M}^F)\,dx$$
$$=\sum_p\frac{1}{EI}\int\overline{M}^{1i}\overline{M}^{X1=1}\,dx\,X_1+\frac{1}{EI}\int\overline{M}^{1i}\overline{M}^{X2=1}\,dx\,X_2+\frac{1}{EI}\int\overline{M}^{1i}\overline{M}^{X1=1}\,dx$$
$$=\boldsymbol{\delta_{1i\,1}X_1+\delta_{1i\,2}X_2+\overline{\Delta}_{1i\,F}}\quad(**)$$

(*)=(**) dowód spełniony

# Zestawienie wzorów do wyznaczenia przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczalnym SN

Siły podane poniżej z nadkreśleniem wyznaczane są w układzie SW.

Siły podane poniżej bez nadkreślenia wyznaczane są w układzie SN.

## • Bez twierdzenia redukcyjnego (I sposób)

(stan rzeczywistego obciążenia analizuje się w układzie SN oraz stan jednostkowego obciążenia analizuje się w układzie SN)

(wzory zostały wyprowadzone i podane na wykładzie nr 3)

-Obciążenie mechaniczne

$$1_i\,\Delta_{iF} = \sum_p \int M^{1i}\frac{M^F}{EI}dx + \sum_p \int T^{1i}\frac{\kappa\, T^F}{EI}dx + \sum_p \int N^{1i}\frac{N^F}{EI}dx + \sum_m S_m^{1i}\frac{S_m^F}{k_m}$$

-Obciążenie niemechaniczne

**a) Wpływ osiadania podpór**

$$1_{\boldsymbol{i}}\,\Delta_{i\,\Delta_r} = \sum_p \int M^{1i}\frac{M^{\Delta_r}}{EI}dx + \sum_p \int T^{1i}\frac{\kappa T^{\Delta_r}}{GA}dx + \sum_p \int N^{1i}\frac{N^{\Delta_r}}{EA}dx + \sum_m S_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_r}}{k_m} - \sum_m R_{m\,\mathbf{1i}}\,\Delta_{r_m}$$

**b) Wpływ temperatury**

$$1_{\boldsymbol{i}}\,\Delta_{i\,\Delta_t} = \sum_p \int M^{1i}\frac{M^{\Delta_t}}{EI}dx + \sum_p \int T^{1i}\frac{\kappa T^{\Delta_t}}{GA}dx + \sum_p \int N^{1i}\frac{N^{\Delta_t}}{EA}dx + \sum_m S_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_t}}{k_m} + \sum_p\Big(\frac{\alpha_t\,(\Delta T_w - \Delta T_p)}{h}\int M^{1i}dx\Big)_p + \sum_p\Big(\alpha_t \Delta T_0 \int N^{1i}dx\Big)_p$$

**c) Wpływ błędów montażu**

$$1_{\boldsymbol{i}}\,\Delta_{i\,\Delta_t} = \sum_p \int M^{1i}\frac{M^{\Delta_m}}{EI}dx + \sum_p \int T^{1i}\frac{\kappa T^{\Delta_m}}{GA}dx + \sum_p \int N^{1i}\frac{N^{\Delta_m}}{EA}dx + \sum_m S_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_m}}{k_m} + \sum_k M^{1i}\Delta\varphi_{\Delta \mathrm{k}} + \sum_n T^{1i}\Delta h_{\Delta \mathrm{n}} + \sum_s N^{1i}\Delta L_{\Delta \mathrm{s}}$$

- ## I Twierdzenie redukcyjne (II sposób)

(stan jednostkowego obciążenia analizuje się w układzie SW, a stan rzeczywisty w układzie SN)

-Obciążenie mechaniczne

$$\bar{1}_i\,\Delta_{iF}=\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{M^F}{EI}dx+\sum_p\int\overline{T}^{1i}\frac{\kappa\,T^F}{EI}dx+\sum_p\int\overline{N}^{1i}\frac{N^F}{EI}dx+\sum_m\overline{S}_m^{1i}\frac{S_m^F}{k_m}$$

-Obciążenie niemechaniczne

**a) Wpływ osiadania podpór**

$$\bar{1}_{\boldsymbol{i}}\,\Delta_{i\,\Delta_r}=\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{M^{\Delta_r}}{EI}dx+\sum_p\int\overline{T}^{1i}\frac{\kappa T^{\Delta_r}}{GA}dx+\sum_p\int\overline{N}^{1i}\frac{N^{\Delta_r}}{EA}dx+\sum_m\bar{S}_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_r}}{k_m}-\sum_m\bar{R}_{m\,\boldsymbol{1i}}\,\Delta_{r_m}$$

**b) Wpływ temperatury**

$$\bar{1}_{\boldsymbol{i}}\,\Delta_{i\,\Delta_t}=\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{M^{\Delta_t}}{EI}dx+\sum_p\int\overline{T}^{1i}\frac{\kappa T^{\Delta_t}}{GA}dx+\sum_p\int\overline{N}^{1i}\frac{N^{\Delta_t}}{EA}dx+\sum_m\bar{S}_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_t}}{k_m}$$
$$+\sum_p\left(\frac{\alpha_t\,(\Delta T_w-\Delta T_p)}{h}\int\overline{M}^{1i}dx\right)_p+\sum_p\left(\alpha_t\Delta T_0\int\overline{N}^{1i}dx\right)_p$$

**c) Wpływ błędów montażu**

$$\bar{1}_{\boldsymbol{i}}\,\Delta_{i\,\Delta_t}=\sum_p\int\overline{M}^{1i}\frac{M^{\Delta_m}}{EI}dx+\sum_p\int\overline{T}^{1i}\frac{\kappa T^{\Delta_m}}{GA}dx+\sum_p\int\overline{N}^{1i}\frac{N^{\Delta_m}}{EA}dx+\sum_m\bar{S}_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_m}}{k_m}+$$
$$+\sum_k\overline{M}^{1i}\Delta\varphi_{\Delta\mathrm{k}}+\sum_n\overline{T}^{1i}\Delta h_{\Delta\mathrm{n}}+\sum_s\overline{N}^{1i}\Delta L_{\Delta\mathrm{s}}$$

- ## II Twierdzenie redukcyjne (III sposób)

(stan rzeczywistego obciążenia analizuje się w układzie SW, a stan jednostkowy w układzie SN)

-Obciążenie mechaniczne

$$1_i\,\Delta_{iF}=\sum_p\int M^{1i}\frac{\overline{M}^F}{EI}dx+\sum_p\int T^{1i}\frac{\kappa\,\overline{T}^F}{EI}dx+\sum_p\int N^{1i}\frac{\overline{N}^F}{EI}dx+\sum_m S_m^{1i}\frac{\bar{S}_m^F}{k_m}$$

-Obciążenie niemechaniczne

**a) Wpływ osiadania podpór**

$$1_i\,\Delta_{i\,\Delta_r}=\sum_p\int M^{1i}\frac{\bar{M}^{\Delta_r}}{EI}dx+\sum_p\int T^{1i}\frac{\kappa\bar{T}^{\Delta_r}}{GA}dx+\sum_p\int N^{1i}\frac{\bar{N}^{\Delta_r}}{EA}dx+\sum_m S_m^{1i}\frac{\bar{S}_m^{\Delta_r}}{k_m}-\sum_m R_{m\,1i}\,\Delta_{r_m}$$

Ponieważ w układzie SW siły wewnętrzne od wpływów nie mechanicznych są zerowe : $\bar{M}^{\Delta r}=\bar{T}^{\Delta r}=\bar{N}^{\Delta r}=\bar{S}^{\Delta r}=0$

stąd

$$\mathbf{1}_i\,\Delta_{i\,\Delta_r}=-\sum_m \boldsymbol{R}_{m\,1i}\,\Delta_{r_m}$$

**b) Wpływ temperatury**

$$1_i\,\Delta_{i\,\Delta_t}=\sum_p\int M^{1i}\frac{\bar{M}^{\Delta_t}}{EI}dx+\sum_p\int T^{1i}\frac{\kappa\bar{T}^{\Delta_t}}{GA}dx+\sum_p\int N^{1i}\frac{\bar{N}^{\Delta_t}}{EA}dx+\sum_m S_m^{1i}\frac{\bar{S}_m^{\Delta_t}}{k_m}+\sum_p\left(\frac{\alpha_t\,(\Delta T_w-\Delta T_p)}{h}\int M^{1i}dx\right)_p+\sum_p\left(\alpha_t\Delta T_0\int N^{1i}dx\right)_p$$

Ponieważ w układzie SW siły wewnętrzne od wpływów nie mechanicznych są zerowe : $\bar{M}^{\Delta t}=\bar{T}^{\Delta t}=\bar{N}^{\Delta t}=\bar{S}^{\Delta t}=0$

stąd

$$\mathbf{1}_i\,\Delta_{i\,\Delta_t}=\sum_p\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_t\,(\boldsymbol{\Delta T}_w-\boldsymbol{\Delta T}_p)}{\boldsymbol{h}}\int \boldsymbol{M}^{1i}\boldsymbol{dx}\right)_p+\sum_p\left(\boldsymbol{\alpha}_t\boldsymbol{\Delta T}_0\int \boldsymbol{N}^{1i}\boldsymbol{dx}\right)_p$$

**c) Wpływ błędów montażu**

$$1_i\,\Delta_{i\,\Delta_t}=\sum_p\int M^{1i}\frac{\bar{M}^{\Delta_m}}{EI}dx+\sum_p\int T^{1i}\frac{\kappa\bar{T}^{\Delta_m}}{GA}dx+\sum_p\int N^{1i}\frac{\bar{N}^{\Delta_m}}{EA}dx+\sum_m S_m^{1i}\frac{\bar{S}_m^{\Delta_m}}{k_m}+\sum_k M^{1i}\Delta\varphi_{\Delta k}+\sum_n T^{1i}\Delta h_{\Delta n}+\sum_s N^{1i}\Delta L_{\Delta s}$$

Ponieważ w układzie SW siły wewnętrzne od wpływów nie mechanicznych są zerowe : $\bar{M}^{\Delta m}=\bar{T}^{\Delta m}=\bar{N}^{\Delta m}=\bar{S}^{\Delta m}=0$

stąd

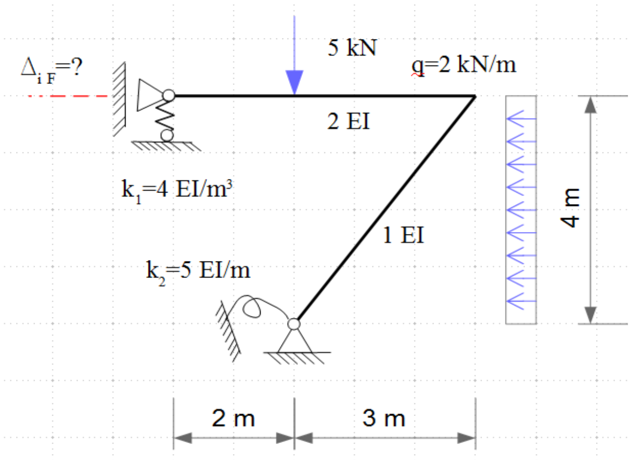
$$\mathbf{1}_i\,\Delta_{i\,\Delta_m}=\sum_k M^{1i}\Delta\varphi_{\Delta k}+\sum_n T^{1i}\Delta h_{\Delta n}+\sum_s N^{1i}\Delta L_{\Delta s}$$

# Przykłady podsumowujące umiejętność wyznaczania przemieszczenia w układach statycznie niewyznaczalnych SN

Najczęściej do wyliczenia przemieszczenia w układzie statycznie niewyznaczalnym stosuje się I twierdzenie redukcyjne (II sposób).

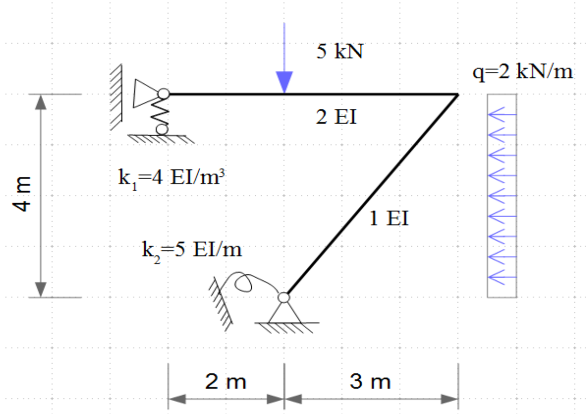
## PRZYKŁAD 1. (obciążenie mechaniczne)

Należy wyznaczyć wartość przemieszczenia $\Delta_{i\,F}$=? w układzie o schemacie statycznym jak na rysunku.

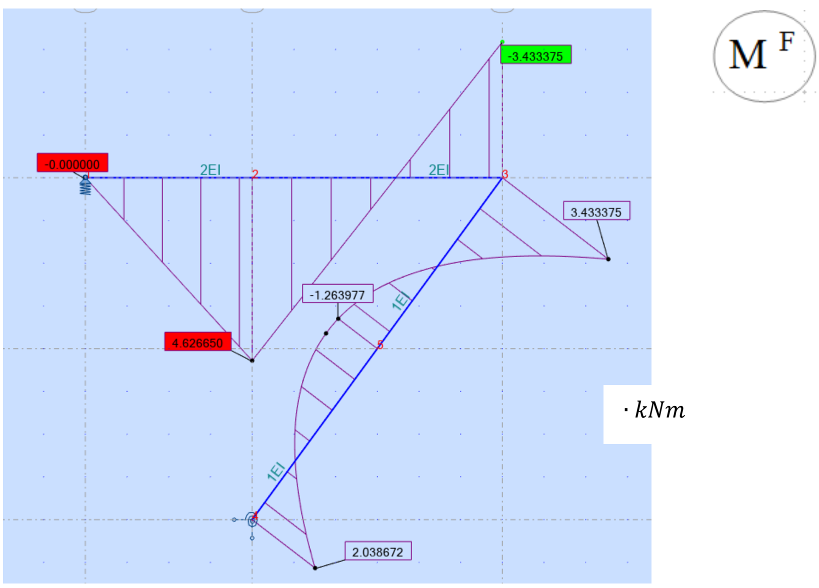



*Układ podany na rysunku jest układem statycznie niewyznaczalnym jaki analizowany był na wykładzie nr 6.
* Szukane przemieszczenie wybrano w miejscu i na kierunku by od razu była znana jego wartość. W danym przypadku jest to przemieszczenie na kierunku podpory uniemożliwiającej poziomy przesuw węzła dlatego przemieszczenie to jest niemożliwe i z obliczeń powinniśmy otrzymać wartość zerową.
W ten sposób sprawdza się czy wyliczone przemieszczenie w układzie zadanym jest zgodne z warunkiem podarcia.

1. **Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia**
(Stan rzeczywistych sił i przemieszczeń)



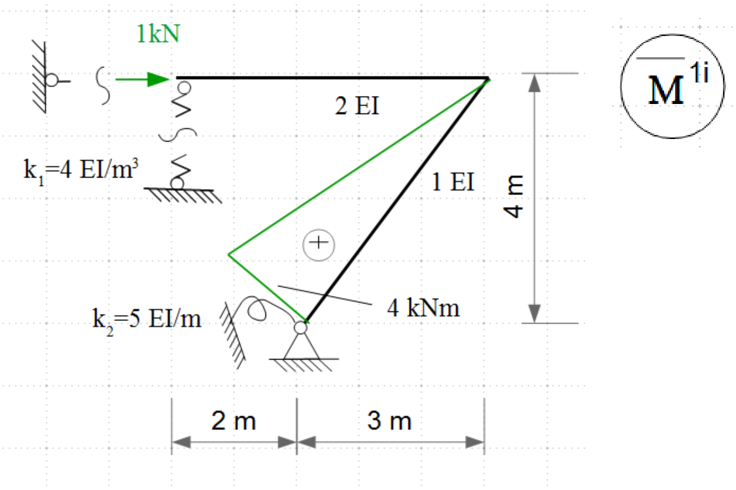

Rozwiązane zostało uzyskane przy zastosowaniu metody sił i przepisane z wykładu nr 6




Wykres momentów zginających w układzie SN od obciążenia (F)

2. **Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**
(Stan wirtualnego obciążenia)

*Układ jest SW




3. **Zastosowanie II sformułowania Zasady Prac Przygotowanych.**

$$\overline{1}_i\,\Delta_{iF}=\sum_p\int \overline{M}^{1i}\frac{M^F}{EI}dx+\sum_m \overline{S}_m^{1i}\frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1kN\,\Delta_{iF}=\frac{1}{EI}\frac{5m}{6}(4kNm*(-2{,}039kNm)+4*2\,kNm*1{,}264\,kNm+0*(-3{,}433kNm))$$
$$+\frac{(-4kN)2{,}039kN}{5\,\dfrac{EI}{m^3}}=0{,}0012\frac{kN^2m^3}{EI}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{iF}=0{,}0012\frac{kNm^3}{EI}\simeq 0}$$

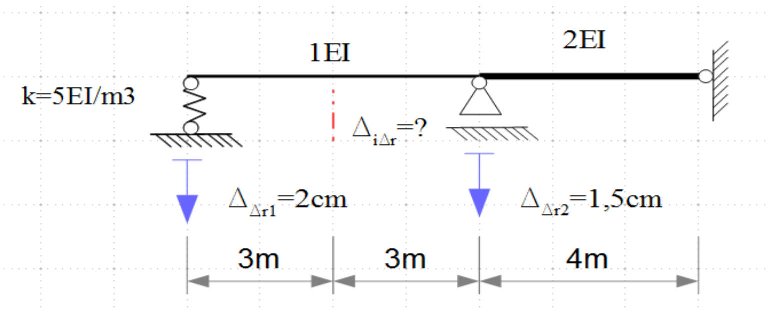
UWAGA:

*Jeżeli wyliczylibyśmy $n_h$ przemieszczeń i otrzymane wartości byłyby zgodne z warunkami ciągłości i podparcia czyli byłyby kinematycznie dopuszczalne to moglibyśmy stwierdzić, że rozwiązanie w postaci wykresu momentów zginających jakie uzyskano stosując metodę sił i które wykorzystywano do wyliczenia tych przemieszczeń jest **ROZWIĄZANIEM KINEMATYCZNIE DOPUSZALNYM.**

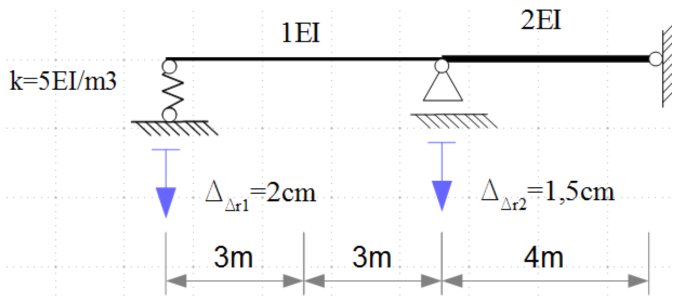
* Do kontroli kinematycznej dopuszczalności uzyskanych rozwiązań ( $\boldsymbol{M^F}, \boldsymbol{V^F}, \boldsymbol{N^F}$) najczęściej choć nie koniecznie wybiera się przemieszczenia określające prawą stronę układu równań metody sił .

## PRZYKŁAD 2. (obciążenie niemechaniczne – osiadanie podpór)

Wyznacz wartość przemieszczenia $\Delta_{i\,\Delta_r}$=? w układzie o schemacie statycznym jak na rysunku poniżej.



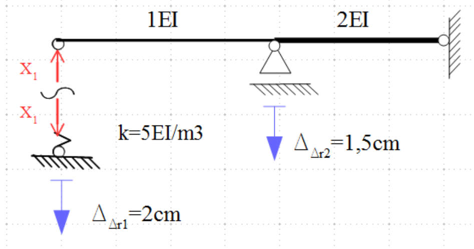

1. **Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia**
   (Stan rzeczywistych sił i przemieszczeń)




*Układ jest SN stąd aby go rozwiązać zastosuje się metodę sił.

## Metoda sił:

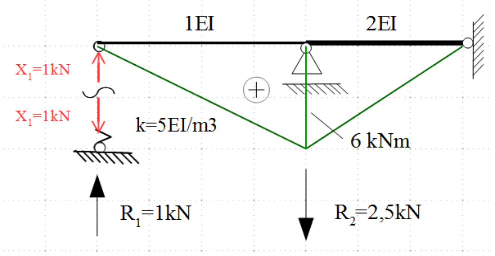
- Stopień statycznej niewyznaczalności: $n_h = e - 3t = 4 - 3 * 1 = 1$
- Układ podstawowy metody sił




- Układ równań metody sił

$$\delta_{11} X_1 + \bar{\Delta}_{1\,\Delta_r} = 0$$

- Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia $X_1 = 1kN$




$\overline{M}^{X_1=1}$

- Współczynniki układu równań metody sił

$$1kN \cdot \delta_{11} = \sum_p \left( \int \overline{M}^{X1=1} \frac{\overline{M}^{X1=1}}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{X1=1} \cdot \bar{S}_m^{X1=1}}{k_m} = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 6m\ 6kNm \frac{2}{3} 6kNm + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} 4m\ 6kNm \frac{2}{3} 6kN + \frac{(-1kN)(-1kN)}{5\frac{EI}{m^3}} = 96{,}2 \frac{kN^2 m^3}{EI}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11} = 96{,}2 \frac{kNm^3}{EI}}$$

$$\bar{1}_i\, \Delta_{1\,\Delta_r} = -\sum_m \bar{R}_{m\,1}\ \Delta_{r_m}$$

$$1kN\ \Delta_{i\,\Delta_r} = -(1kN\ (-0.02m) + 2.5kN * 0.015m) = -0{,}0175kNm$$

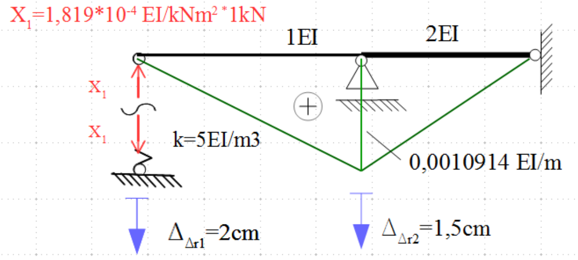
$$\boldsymbol{\Delta_{1\,\Delta_r} = -0{,}0175m}$$

- Rozwiązanie układu równań metody sił

$$96{,}2 \frac{kNm^3}{EI} X_1 + -0{,}0175m = 0$$

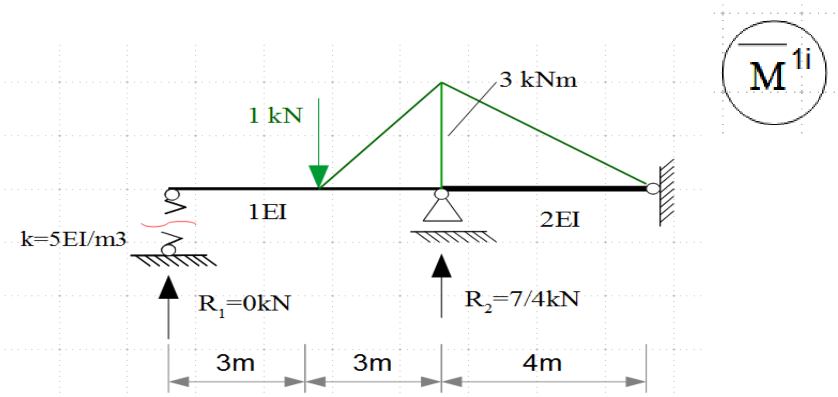
$$\boldsymbol{X_1 = 1{,}819 * 10^{-9} \frac{EI}{kNm^2}}$$

- Wykresy sił wewnętrznych w układzie SN




$M^{\Delta r}$

2. **Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**
   (Stan wirtualnego obciążenia)




*Układ jest SW

3. **Zastosowanie II sformułowania Zasady Prac Przygotowanych.**

$$\bar{1}_i\,\Delta_{i\,\Delta_r} = \sum_p \int \bar{M}^{1i}\frac{M^{\Delta_r}}{EI}dx + \sum_m \bar{S}_m^{1i}\frac{S_m^{\Delta_r}}{k_m} - \sum_m \bar{R}_{m\,1i}\,\Delta_{r_m}$$

$$1kN\,\Delta_{i\Delta_r} = \frac{1}{EI}\frac{3m}{6}\left(0*\frac{0{,}0010914\frac{EI}{m}}{2} + 4*(-1{,}5\,kNm)*\frac{0{,}0010914\frac{EI}{m}}{4} + 0{,}0010914\frac{EI}{m}\right.$$

$$\left. *(-3kNm)\right) + \frac{1}{2EI}\frac{1}{2}6m\;0{,}0010914\frac{EI}{m}\frac{2}{3}(-3kNm) + \frac{(-1kN)(0kN)}{5\frac{EI}{m^3}} - (0kN*0{,}02m$$

$$+\frac{7}{4}kN*(-0{,}015m) = 0{,}0199kNm$$

$$\Delta_{i\Delta_r} = 0{,}0199m$$