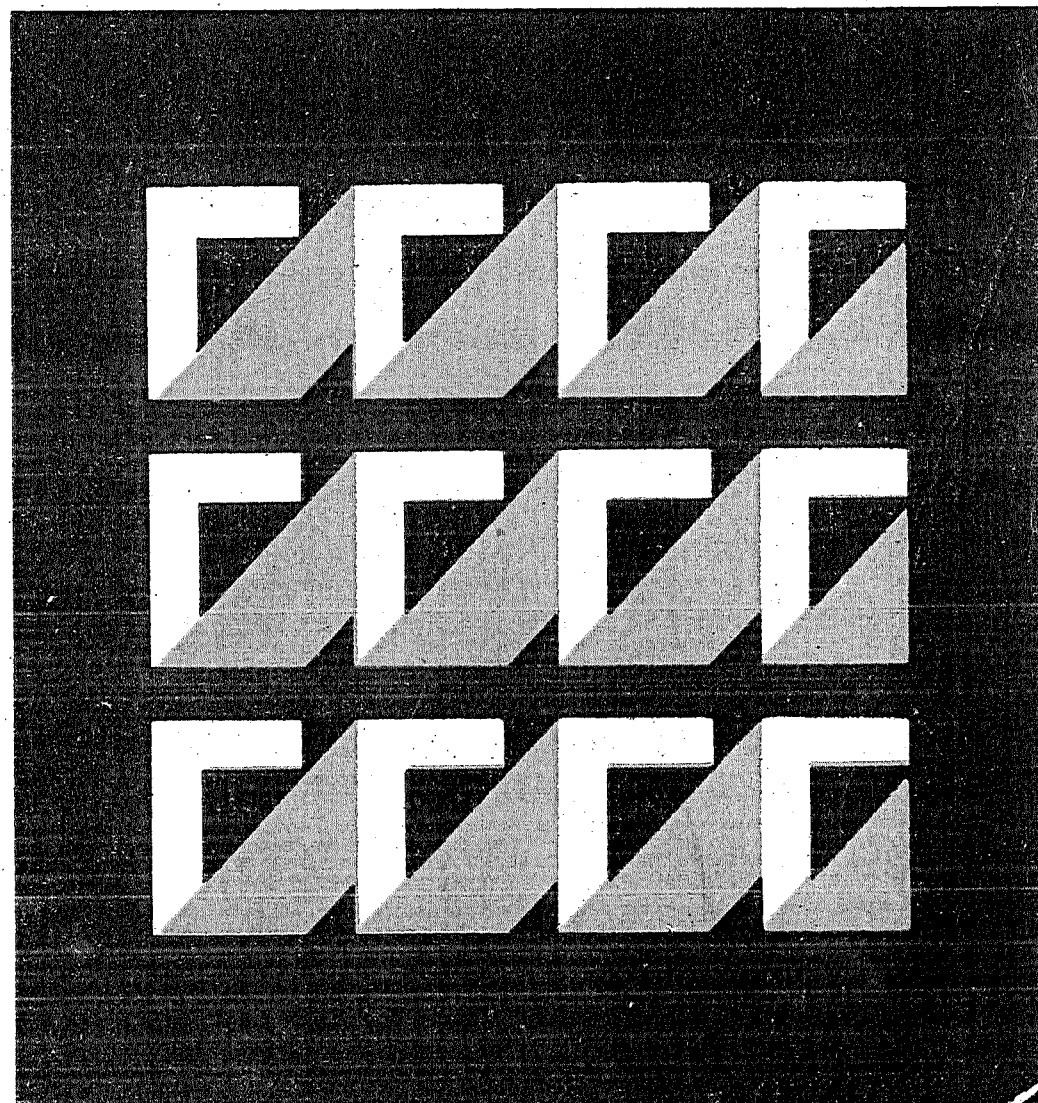


JAN LANGER

Dynamika budowli



Politechnika Wrocławska



Jan Langer

Dynamika budowli

Wrocław 1980

Instytut Inżynierii Lądowej
Monografia na potrzeby dydaktyki do przedmiotów:
Mechanika budowli, studium podstawowe,
Wydział Budownictwa Lądowego, sem. VI, 2-1-0-1-0 h
Dynamika, studium podstawowe,
Wydział Podstawowych Problemów Techniki, sem. VI, 2-1-0-1-0 h

Opiniodawca
Jerzy SUŁOCKI

Opracowanie redakcyjne
Helena SZUBERT

Korekta
Anna MICKIEWICZ

Projekt okładki
Wojciech KANIOWSKI

Praca wydana za zgodą Rektora

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Nakład 1800 + 75 egz. Ark. wyd 13. Ark. druk 13 1/2. Papier powielaczowy kl. III, 70 g. 81.
Oddano do drukarni w listopadzie 1979 r. Druk ukończono w styczniu 1980 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 6537/79 - P-12 - Cena zł 40,-

OD AUTORA

Praca niniejsza powstała z konspektu wykładów dynamiki budowli prowadzonych przeze mnie od kilkunastu lat dla studentów Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej, początkowo na specjalności teorii konstrukcji, później dla ogółu słuchaczy. Treścią pracy jest systematyczny przegląd podstawowych zagadnień teorii liniowych drgań ustrojów budowlanych. Rozważane są drgania płaskich ustrojów prętowych oraz dodatkowo drgania bryły na podłożu sprężystym. Za podstawę merytoryczną rozwiązań przyjmuję konsekwentnie ideę bilansu energetycznego w sensie Lagrange'a. Ruch drgający opisuję w łatwej do interpretacji formie trygonometrycznej, a w analizie układów złożonych stosuję notację macierzową, ułatwiającą operowanie uporządkowanymi zbiorami i przydatną w przypadku korzystania z elektronicznej techniki obliczeniowej.

Wyłożony materiał nawiązuje do wielu znanych monografii i podręczników, wszystkie jednak zagadnienia - nawet zupełnie elementarne - zostały pod względem ujęcia podporządkowane ogólnej koncepcji pracy. Z tego względu ograniczam się do podania na końcu pracy literatury pomocniczej, nie podając w tekście szczegółowych odsyłaczy. W wyłożonym materiale uwzględniłam również szereg oryginalnych ujęć oraz wyników badań własnych i moich współpracowników, jak np.: pojęcie i wykorzystanie majoranty ruchu, rozwiązanie procesu przejściowego, problem serii impulsów, macierzowe rozwiązanie problemu drgań bryły na podłożu sprężystym, wykorzystanie zasad analizy wymiarowej w rozwiązaniach numerycznych, zastosowanie metody aproksymacyjnej w zagadnieniu obciążenia ruchomych, pewne problemy numerycznego całkowania równań ruchu. Niektóre z tych zagadnień udało się przedstawić w nader prostej postaci, co uzasadnia - moim zdaniem - uwzględnienie tej problematyki w podstawowym kursie dynamiki.

Szczególne uwagę poświęcam metodom, które umożliwiają przetwarzanie modeli obiektów rzeczywistych na układy dyskretne w sensie fizycznym lub matematycznym. Uwzględniłam również elementy klasycznej teorii ciągłych ustrojów prętowych, jednakże w ujęciu nawiązującym do teorii układów dyskretnych. Zwracam przy tym uwagę Czytelnika na to, że wszystkie zagadnienia liniowych drgań ustrojów budowlanych przestrzennie ograniczonych można sprowadzić do równania macierzowego

$$\ddot{B}\bar{q} + C\dot{\bar{q}} + K\bar{q} = \bar{F}(t).$$

Specyfika zagadnień i metod przejawia się jedynie w sposobie formułowania i interpretacji występujących w tym równaniu składników. Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie omawiam zagadnień dynamiki przestrzennych ustrojów prętowych i dźwigarów powierzchniowych. Mam jednak nadzieję, że uważne przestudiowanie pracy umożliwi Czytelnikowi takie zrozumienie celów i metod dynamiki budowli, iż samodzielna kontynuacja studiów w omawianej dziedzinie nie sprawi Mu istotnych trudności.

Wrocław, styczeń 1979

1. WSTĘP

1.1. Określenie przedmiotu

Dynamika jest działem mechaniki zajmującym się ruchem układów materialnych z uwzględnieniem przyczyn tego ruchu. W czasie ruchu układów materialnych oprócz sił ciężkości pojawiają się nowe siły masowe i opory ruchu. W bilansie energetycznym poza energią potencjalną i pracą sił zewnętrznych występuje energia kinetyczna i energia rozproszona (zużyta na pokonanie oporów ruchu).

Pierwsze naukowe sformułowanie niektórych praw dynamiki dał Galileo Galilei (1546-1642). Fundamentalne zasady dynamiki sformułował Isaac Newton (1642-1727). Do dalszego rozwoju dynamiki przyczynili się szczególnie Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) oraz Joseph Louis Lagrange (1736-1813) - twórca mechaniki analitycznej.

Dynamika budowli jest nauką o dynamice układów, które mogą być ustrojami budowlanymi, a więc układami geometrycznie niezmiennych o zachowawczej postaci równowagi. Ruch tego rodzaju układów ma zwykle charakter oscylacyjny wokół położenia równowagi statycznej. Stan równowagi statycznej będziemy więc w dynamice uważali za stan odniesienia, zakładając jednocześnie, że przemieszczenia dynamiczne są małe wobec wymiarów konstrukcji. Założymy również, że rozważane ustroje budowlane są zbudowane z materiałów idealnie liniowo sprężystych lub charakteryzujących się cechami reologicznymi opisanymi liniowym związkiem konstytutywnym.

1.2. Schemat dynamiczny

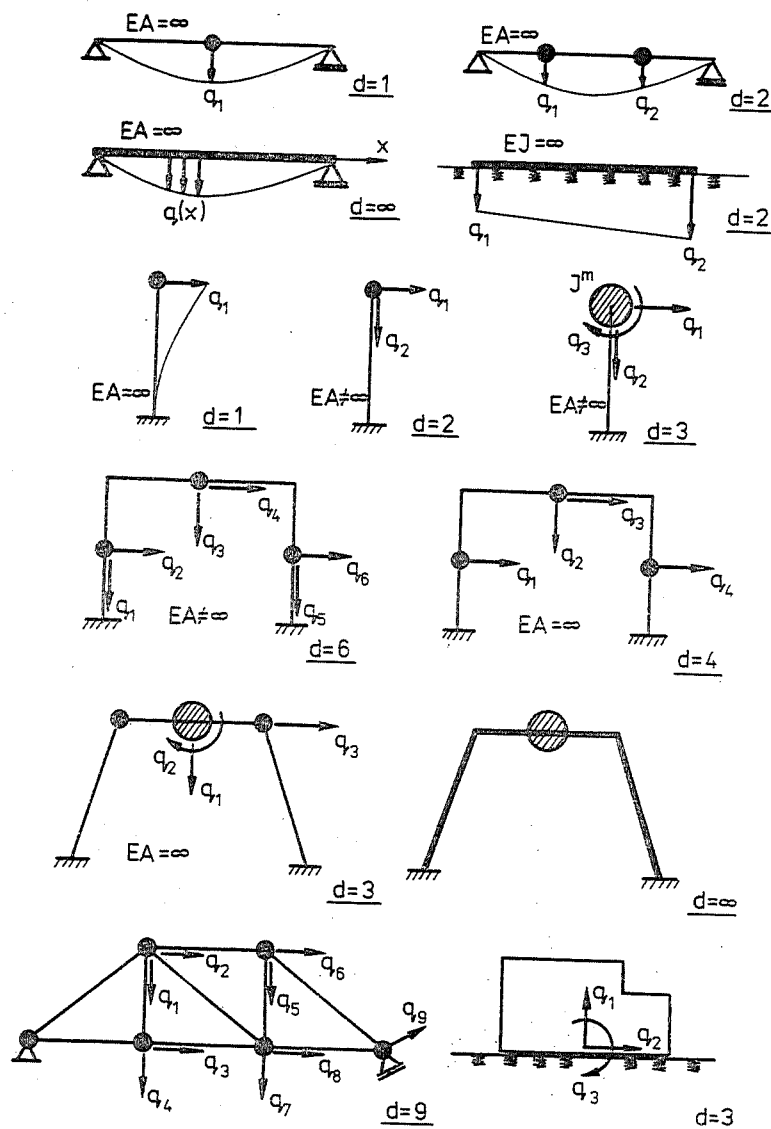
Schematem dynamicznym ustroju budowlanego nazywamy jego schemat statyczny uzupełniony informacjami istotnymi z punktu widzenia dynamiki. Do informacji tych należy opis wielkości i rozkładu mas, opis charakteru i rozkładu oporów ruchu oraz opis zewnętrznych sił czynnych (sił wzbudzących) jako funkcji miejsca i czasu.

Stan przemieszczenia punktów masowych należących do rozpatrywanego ustroju można opisać za pomocą pewnego zbioru wielkości, zwanych współrzędnymi uogólnionymi. Liczba niezależnych współrzędnych uogólnionych niezbędnych do określenia położenia wszystkich punktów masowych w danej chwili względem stanu równowagi statycznej nazywa się liczbą dynamicznych stopni swobody d . Swobodny punkt materialny ma w przestrzeni trzy dynamiczne stopnie swobody, a na płaszczyźnie dwa stopnie. Swobodna tarcza materialna ma na płaszczyźnie trzy dynamiczne stopnie swobody, a swobodna bryła materialna ma w przestrzeni sześć dynamicznych stopni swobody.

Punkty masowe, tarcze i bryły, wchodzące w skład ustroju budowlanego, są powiązane między sobą i z nieruchomym układem odniesienia (ostoją) za pomocą więzi odkształcalnych i nieodkształcalnych. Więzie odkształcalne nie zmniejszają liczby dynamicznych stopni swobody, więzie nieodkształcalne natomiast nakładają na układ dodatkowe warunki geometryczne ograniczające dynamiczne stopnie swobody układu. Liczba dynamicznych stopni swobody układu złożonego jest równa sumie lokalnych stopni swobody punktów masowych, tarcz i brył (traktowanych jako obiekty izolowane), zmniejszonej o liczbę warunków nałożonych przez więzie nieodkształcalne. W celu określenia liczby dynamicznych stopni swobody ustroju należy zatem myślowo usunąć z niego więzie odkształcalne i w tak przekształconym schemacie ustalić liczbę niezależnych i niezbędnych współrzędnych uogólnionych. W ustrojach prętowych więziami nieodkształcalnymi są na ogół więzie podporowe, a więziami odkształcalnymi - pręty sprężyste. Często zakładamy, że pręty są nieważkie, nierozciągliwe i charakteryzują się jedynie odkształcalnością giętą. W schemacie przekształconym należy je zastąpić nierozciągliwymi więziami o przegubowych końcach. Przykłady określania liczby dynamicznych stopni swobody i doboru współrzędnych uogólnionych są przedstawione na rys. 1.1. Przykłady te dotyczą ustrojów płaskich, w których modelem mas są punkty masowe pozbawione bezwładności obrotowej, tarcze masowe o niepomiątelnej bezwładności obrotowej, a także masy rozłożone. Z punktu widzenia liczby dynamicznych stopni swobody wprowadza się podział na:

- 1) układy o jednym stopniu swobody,
- 2) układy o skończonej liczbie stopni swobody (układy dyskretne),
- 3) układy o nieskończonej liczbie stopni swobody (układy ciągłe).

Podział ten jest umowny, wszystkie bowiem obiekty fizyczne są przestrzennymi tworami materialnymi zbudowanymi z tworzyw odkształcalnych, są więc układami ciągłymi o nieskończonej liczbie stopni swobody.

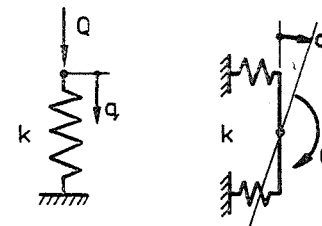


Rys. 1.1

Okazuje się jednak, że w większości przypadków można uzyskać dostatecznie dokładne rozwiązanie w bazie ograniczonej liczby współrzędnych uogólnionych. Najprostszym sposobem dyskretyzacji układu rzeczywistego jest przekształcenie ciągłego pola masowego rozpiętego na strukturze odkształcalnej do postaci dyskretnego pola masowego (dyskretyzacja fizyczna). Sposób ten, zwany krótko granulacją mas, jest omówiony w rozdziale drugim i trzecim. Inny sposób polega na zachowaniu rzeczywistej struktury pola masowego oraz na aproksymacyjnym opisie stanu przemieszczenia w ograniczonej bazie parametrów (dyskretyzacja matematyczna). Sposób ten, zastosowany w analizie dynamicznej układów ciągłych, przedstawiono w rozdziale czwartym. W rozdziale tym omówiono również niektóre zagadnienia dynamiki układów ciągłych sensu stricte, a więc bez stosowania dyskretyzacji fizycznej i matematycznej. Możliwości w tej dziedzinie są ograniczone, omawiane zagadnienia są bowiem opisane cząstkowymi równaniami różniczkowymi w przestrzeni geometryczno-czasowej i uzyskanie rozwiązań zamkniętych jest możliwe jedynie w pewnych szczególnych przypadkach.

1.3. Wiele odkształcalne

Sztwnością k izolowanej więzi liniowo sprężystej nazywamy stosunek uogólnionej siły czynnej Q do odpowiadającego jej uogólnionego przemieszczenia q (rys. 1.2). Stosunek przemieszczenia q do siły Q nazywa się podatnością δ więzi liniowo sprężystej. Zawsze $k\delta = 1$. Zakładamy, że parametry więzi sprężystych nie zależą od czasu (układy skleronomiczne). Wiąz liniowo sprężysta gromadzi energię potencjalną odkształcenia o wartości



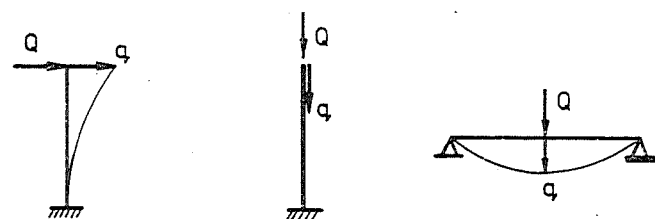
Rys. 1.2

$$E_p = \frac{1}{2} Qq = \frac{1}{2} kq^2.$$

(1.1)

Proste przykłady wyznaczania parametrów więzi sprężystych przedstawiono na rys. 1.3.

Jeśli operujemy zbiorem współrzędnych uogólnionych, to więzie w tym zbiorze są na ogół sprzężone. Dla przykładu rozpatrzmy belkę, jak na rys. 1.4, opisaną dwuelementowym zbiorem współrzędnych uogólnionych.



$$q = Ql^3/3EJ$$

$$\delta = l^3/3EJ$$

$$k = 3EJ/l^3$$

$$q = Ql/EA$$

$$\delta = l/EA$$

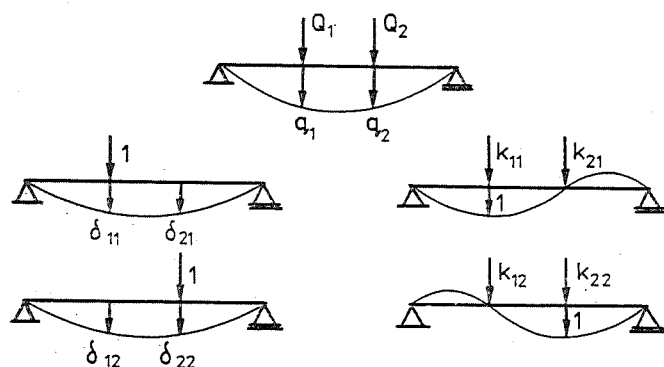
$$k = EA/l$$

$$q = Ql^3/48EJ$$

$$\delta = l^3/48EJ$$

$$k = 48EJ/l^3$$

Rys. 1.3



Rys. 1.4

Otrzymujemy tu zależności

$$q_1 = \delta_{11}Q_1 + \delta_{12}Q_2,$$

$$q_2 = \delta_{21}Q_1 + \delta_{22}Q_2,$$

(1.2)

które w zapisie macierzowym mają postać

$$\bar{q} = D\bar{Q},$$

(1.3)

gdzie

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

(1.4)

Macierz D jest macierzą podatności w obranym zbiorze współrzędnych uogólnionych. Relacja odwrotna do (1.2) ma postać

$$Q_1 = k_{11}q_1 + k_{12}q_2,$$

(1.5)

$$Q_2 = k_{21}q_1 + k_{22}q_2,$$

lub krócej w formie macierzowej

$$\bar{Q} = K\bar{q},$$

(1.6)

gdzie

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

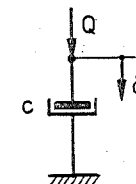
jest macierzą sztywności w obranym zbiorze współrzędnych uogólnionych. Obie macierze są kwadratowe i symetryczne, a ponadto

$$KD = DK = I.$$

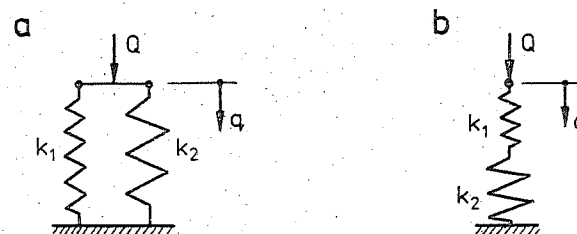
(1.7)

Oprócz więzi sprężystych w układzie mogą występować więzi, których reakcje opisują opory ruchu. Najprostszym przypadkiem takiej więzi jest tłumik wiskotyczny (rys. 1.5). Parametrem c tłumika wiskotycznego nazywamy stosunek siły czynnej Q do odpowiadającej jej prędkości przemieszczenia \dot{q} .

Zarówno więzi sprężyste, jak i tłumiki mogą występować w zestawach. Zasadniczymi typami są zestawy równoległe i szeregowy. Na rys. 1.6 przedstawiono przykłady zestawu równoległego (rys. 1.6a) i szeregowego (rys. 1.6b) więzi sprężystych.



Rys. 1.5



Rys. 1.6

W pierwszym przypadku

$$Q = k_1q + k_2q = (k_1 + k_2)q,$$

(1.8)

a więc

$$k = k_1 + k_2, \quad 1/\delta = 1/\delta_1 + 1/\delta_2.$$

(1.9)

W drugim przypadku

$$q = Q/k_1 + Q/k_2 = (\delta_1 + \delta_2)Q,$$

a więc

$$\delta = \delta_1 + \delta_2, \quad 1/k = 1/k_1 + 1/k_2. \quad (1.10)$$

W równoległym zestawie więzi sprężystych sumowaniu podlegają sztywności, a w szeregowym - podatności więzi. W przypadku zestawu tłumików rolę sztywności k_i grają parametry tłumików c_i .

1.4. Podstawowe prawa dynamiki

Podstawowe znaczenie w dynamice ma drugie prawo Newtona, które w odniesieniu do punktu materialnego brzmi: prędkość zmiany pędu punktu materialnego jest równa sile działającej na punkt. Przyjmując oznaczenia jak na rys. 1.7 mamy zatem

$$\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{u}}) = \vec{P}, \quad (1.11)$$

a w przypadku masy niezależnej od czasu

$$m \ddot{\mathbf{u}} = \vec{P}. \quad (1.12)$$

Rys. 1.7

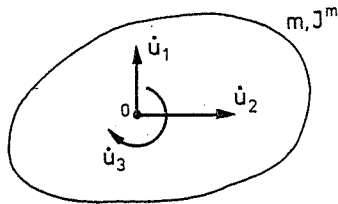
Energia kinetyczną punktu materialnego określa wzór

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2), \quad (1.13)$$

gdzie \dot{u}_1, \dot{u}_2 są ortokartezjańskimi współrzędnymi prędkości punktu. Można wykazać, że w ruchu płaskim tarczy materialnej energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2} (m \dot{u}_1^2 + m \dot{u}_2^2 + J^M \dot{u}_3^2), \quad (1.14)$$

gdzie m - masa tarczy, J^M - centralny biegunowy moment bezwładności masy, \dot{u}_1, \dot{u}_2 - współrzędne prędkości translacyjnej środka masy, \dot{u}_3 - prędkość rotacyjna, jak na rys. 1.8.



Rys. 1.8

ruchu spełniają wraz z siłą bezwładności warunki równowagi. Zasada ta jest podstawą stosowania metody kinetostatycznej w dynamice, zgodnie z

którą analiza dynamiczna układu może być przeprowadzona metodami statyki pod warunkiem uwzględnienia obciążeń kinetycznych.

Założmy, że przemieszczenie \vec{u} jest jednorodną funkcją zbioru współrzędnych uogólnionych q_i . Równanie (1.11) nie zmieni sensu, jeśli zapiszemy je w postaci

$$\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{u}}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} = \vec{P} \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i}. \quad (1.16)$$

Z zależności $\vec{u} = \vec{u}(q_i)$ wynika, że

$$\dot{\mathbf{u}} = \sum_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial q_i}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{u}}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i}) - m \dot{\mathbf{u}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \dot{q}_i}) - m \dot{\mathbf{u}} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \dot{q}_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Jednocześnie jest

$$\vec{P} d\vec{u} = \vec{P} \sum_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i} dq_i = \sum_i P_i dq_i, \quad P_i = \vec{P} \frac{\partial \vec{u}}{\partial q_i},$$

gdzie P_i jest uogólnioną siłą zewnętrzną odpowiadającą współrzędnej q_i . Równanie Newtona można zatem zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

znanej pod nazwą równań Lagrange'a.

W przypadku ustrojów odkształcalnych o zachowawczej postaci równowagi

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.18)$$

gdzie L - praca zewnętrznych sił czynnych (w sensie pracy przygotowanej), E_p - energia potencjalna odkształcenia, Φ - funkcja tłumienia (quasi-potencjał o wymiarze mocy).

Funkcję tłumienia w przypadku tłumików wiskotycznych oblicza się analogicznie jak energię kinetyczną, kładąc w miejsce masy m parametr tłumika c . Przykładowo dla tłumika przedstawionego na rys. 1.5 mamy

$$\Phi = \frac{1}{2} c \dot{q}^2. \quad (1.19)$$

Równania Lagrange'a dla ustroju budowlanego mają ostatecznie postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1}, \quad 1 = 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

lub zbiorczo w notacji wektorowej

$$\frac{d}{dt} \text{grad } E_k(\dot{\vec{q}}) - \text{grad } E_k(\vec{q}) + \text{grad } \Phi(\dot{\vec{q}}) + \text{grad } E_p(\vec{q}) = \text{grad } L(\vec{q}). \quad (1.21)$$

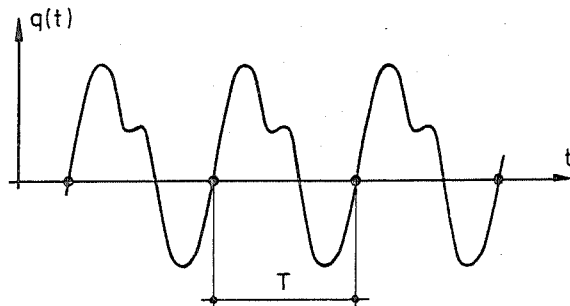
Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań ruchu dowolnego ustroju złożonego, zapisanych w bazie współrzędnych uogólnionych.

W przypadku małych drgań wokół położenia równowagi energia kinetyczna na ogół nie zależy od przemieszczeń uogólnionych q_1 . Wtedy

$$\partial E_k / \partial q_1 = 0, \quad \text{grad } E_k(\vec{q}) = \vec{0}. \quad (1.22)$$

1.5. Charakterystyka ruchów oscylacyjnych

Ruch punktu jest oscylacyjny względem pewnego położenia obojętnego, jeśli wychylenia punktu od tego położenia są ograniczone i w określonych (nieskończenie równych) odstępach czasu punkt przechodzi przez



Rys. 1.9

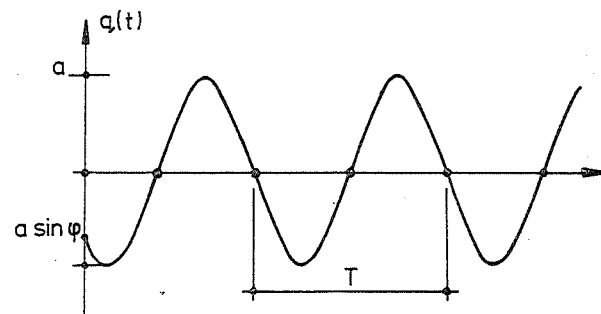
położenie obojętne. Ruch oscylacyjny spełniający warunek

$$q(t) = q(t+nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

nazywamy ruchem okresowym (periodycznym) o okresie T (rys. 1.9). Powtarzający się fragment ruchu zawarty w okresie T nazywamy cyklem (c).

Najprostszym przypadkiem ruchu okresowego jest ruch harmoniczny określony relacją

$$q(t) = a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.24)$$



Rys. 1.10

którego wykres jest przedstawiony na rys. 1.10. W opisie takiego ruchu występują następujące wielkości:

$a = \text{am } q$ - amplituda,

T - okres (s),

$\omega = 2\pi/T$ - częstość kołowa (rad/s),

$\omega t + \varphi$ - faza (rad),

φ - faza początkowa (rad).

Oprócz częstości kołowej w praktyce używa się wielkości:

$f = 1/T$ - częstość fizyczna ($\text{c/s} = \text{Hz}$),

$n = 60/T$ - częstość techniczna (c/min).

Współczynniki przeliczeniowe są podane w tabeli 1.1.

Tabela 1.1
współczynniki przeliczeniowe

| | ω | f | n |
|------------|----------|-------|--------|
| $\omega =$ | 1 | 6,283 | 0,1047 |
| $f =$ | 0,1592 | 1 | 0,0167 |
| $n =$ | 9,549 | 60 | 1 |

Forma wzoru (1.24) nosi nazwę zapisu zwiniętego. Ruch harmoniczny można również zapisać w formie rozwiniętej

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t, \quad (1.25)$$

gdzie

$$q_s = a \cos \varphi, \quad q_c = a \sin \varphi. \quad (1.26)$$

Relacja odwrotna ma postać

$$a = \sqrt{q_s^2 + q_c^2}, \quad \varphi = \arctg(q_c/q_s). \quad (1.27)$$

Przez różniczkowanie funkcji (1.24) lub (1.25) podług czasu otrzymuje się pochodne kinematyczne - prędkość i przyspieszenie,

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= a\omega \cos(\omega t + \varphi) = q_s \omega \cos \omega t - q_c \omega \sin \omega t, \\ \ddot{q}(t) &= -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -q_s \omega^2 \sin \omega t - q_c \omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Warto zauważyć, że w ruchu harmonicznym $\ddot{q} = -\omega^2 q$. W obliczeniach dynamicznych wygodniej jest na ogół stosować rozwinięty zapis ruchu harmonicznego, umożliwia to bowiem niezależne przekształcanie składnika sinusowego i cosinusowego. Ponadto zamiast niewspółmiernymi parametrami ruchu a, φ , operuje się współmiernymi wielkościami q_s, q_c .

Ruch opisany wzorem

$$q(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi) = q_s(t) \sin \omega t + q_c(t) \cos \omega t, \quad (1.29)$$

gdzie $a(t) > 0$, nazywamy ruchem quasi-harmonicznym z modulacją amplitudy.

Rozważmy ruch punktu opisany funkcją $q(t)$, która jest kombinacją współliniowych ruchów harmonicznnych

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j). \quad (1.30)$$

W przypadku, gdy ruchy składowe są synchroniczne, mamy $\omega_j = \omega = \text{const}$, $\varphi_j = \varphi = \text{const}$. Wtedy

$$q(t) = \left(\sum_j a_j \right) \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.31)$$

Ruch wypadkowy jest harmoniczny i synchroniczny z ruchami składowymi. Amplituda ruchu wypadkowego jest równa sumie amplitud składowych

$$a = \sum_j a_j. \quad (1.32)$$

W przypadku, gdy ruchy składowe cechuje jednakowa częstość $\omega_j = \omega = \text{const}$, ale nie są one zgodne w fazie, zapiszemy

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega t + \varphi_j) = a_j \cos \varphi_j \sin \omega t + a_j \sin \varphi_j \cos \omega t,$$

a zatem

$$q(t) = \left(\sum_j a_j \cos \varphi_j \right) \sin \omega t + \left(\sum_j a_j \sin \varphi_j \right) \cos \omega t. \quad (1.33)$$

Wprowadźmy wektory

$$\begin{aligned} \bar{a} &= [a_1, a_2, a_3, \dots]^T, \\ \bar{c} &= [\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3, \dots]^T, \\ \bar{s} &= [\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \sin \varphi_3, \dots]^T. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Formuła (1.33) przybierze postać

$$q(t) = \bar{a}^T \bar{c} \sin \omega t + \bar{a}^T \bar{s} \cos \omega t = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.35)$$

gdzie

$$\varphi = \arctg(\bar{a}^T \bar{s} / \bar{a}^T \bar{c}). \quad (1.36)$$

Natomiast

$$a^2 = \bar{a}^T \bar{c} \bar{c}^T \bar{a} + \bar{a}^T \bar{s} \bar{s}^T \bar{a} = \bar{a}^T (\bar{c} \bar{c}^T + \bar{s} \bar{s}^T) \bar{a} = \bar{a}^T \bar{R} \bar{a},$$

przy czym elementy macierzy \bar{R} wynoszą

$$\begin{aligned} (R)_{ij} &= \cos \varphi_i \cos \varphi_j + \sin \varphi_i \sin \varphi_j = \cos |\varphi_i - \varphi_j|, \\ (R)_{ji} &= (R)_{ij}, \quad (R)_{ii} = 1. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Wynik (1.35) wskazuje na to, że ruch wypadkowy jest ruchem harmonicznym z częstością kołową ω . Amplituda tego ruchu

$$a = \sqrt{\bar{a}^T \bar{R} \bar{a}} \geq 0 \quad (1.38)$$

wyraża się przez pierwiastek z formy kwadratowej amplitud składowych. Jądem formy kwadratowej jest tu symetryczna macierz \bar{R} , której elementami są cosinusy przesunięć fazowych między wszystkimi możliwymi parami ruchów składowych. W szczególnym przypadku dwóch ruchów

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & \cos |\varphi_2 - \varphi_1| \\ \cos |\varphi_1 - \varphi_2| & 1 \end{bmatrix},$$

a więc

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos |\varphi_1 - \varphi_2|}. \quad (1.39)$$

I tak np.

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2, & \text{jeśli } \varphi_1 - \varphi_2 &= 0, \\ a &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, & \text{jeśli } |\varphi_1 - \varphi_2| &= \pi/2, \\ a &= |a_1 - a_2|, & \text{jeśli } |\varphi_1 - \varphi_2| &= \pi. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Rozważmy w końcu przypadek sumowania ruchów asynchronicznych, to znaczy ruchów o różnych częstościach ω_j . Ruch wypadkowy nie jest tu już ruchem harmonicznym, choć jest ruchem okresowym, jeśli stosunki częstości składowych są wymierne. W tym przypadku częstości składowe tworzą ciąg proporcji

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \dots = n_1 : n_2 : n_3 : \dots, \quad (1.41)$$

gdzie n_j są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi (tj. nie mającymi w swoim zbiorze wspólnego dzielnika). Mamy wtedy $\omega_j/n_j = \text{const}$, a zatem również

$$n_j T_j = T = \text{const}. \quad (1.42)$$

Okres T ruchu wypadkowego jest najmniejszą wspólną wielokrotnością okresów składowych. Jeśli n_j są liczbami małymi, okres T jest porównywalny z okresami ruchów składowych. W przeciwnym przypadku okres T może być wielokrotnie większy od okresów ruchów składowych i osiąga nieskończoność, jeśli w zbiorze częstości składowych pojawiają się elementy o proporcjach niewymiernych (np. $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}$). Przebieg czasowy ruchu wypadkowego może mieć różnorodne kształty, niemniej podczas interferencji ruchów asynchronicznych absolutnie największe wychylenie nie może przekroczyć sumy amplitud składowych

$$\max \max |q(t)| \leq \sum_j a_j. \quad (1.43)$$

Dokładniejszą ocenę rozkładu wychyleń uzyskamy przeprowadzając następujące rozumowanie. Wprowadźmy na chwilę do definicji ruchów składowych parametr ε taki, że

$$\begin{aligned} q_j(t) &= a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j + \varepsilon) = \\ &= a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \sin \varepsilon + a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \cos \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.44)$$

i utwórzmy wektory funkcyjne

$$\begin{aligned} \vec{c}(t) &= [\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \dots]^T, \\ \vec{s}(t) &= [\sin(\omega_1 t + \varphi_1), \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \dots]^T. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Wtedy ruch wypadkowy zapiszemy w postaci

$$q(t) = \vec{a}^T \vec{c}(t) \sin \varepsilon + \vec{a}^T \vec{s}(t) \cos \varepsilon. \quad (1.46)$$

Prowadząc dalej rachunek podobnie jak w (1.35) i (1.36), otrzymamy

$$q(t) = \hat{q}(t) \cdot \sin[\varepsilon + \varphi(t)], \quad (1.47)$$

gdzie

$$\varphi(t) = \arctg[\vec{a}^T \vec{s}(t) / \vec{a}^T \vec{c}(t)]. \quad (1.48)$$

Po dokonaniu przejścia granicznego $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymamy

$$q(t) = \hat{q}(t) \sin \varphi(t), \quad (1.49)$$

przy czym zgodnie z (1.35), (1.36)

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\vec{a}^T R(t) \vec{a}} \geq 0, \quad (1.50)$$

gdzie

$$[R(t)]_{ij} = \cos |\omega_i t - \omega_j t + \varphi_i - \varphi_j| = \cos |\omega_{ij} t + \varphi_{ij}|, \quad (1.51)$$

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j, \quad \varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j.$$

Jądro $R(t)$ formy kwadratowej występującej w (1.50) jest symetryczną macierzą o elementach funkcyjnych zależnych od czasu, z wyjątkiem elementów diagonalnych zawsze równych jedności. Funkcja $\hat{q}(t)$ określona wzorem (1.50) jest obwiednią (inaczej - majorantą) ruchu wypadkowego $q(t)$, uwzględniając bowiem to, że $|\sin \varphi(t)| \leq 1$, istotnie z (1.49) otrzymamy

$$|q(t)| \leq \hat{q}(t). \quad (1.52)$$

Znak nierówności w powyższym wzorze jest słuszny dla prawie wszystkich t , równość natomiast jest prawdziwa w przeliczalnym zbiorze punktów styczności majoranty do przebiegu ruchu, przy czym zbiór ten może być pusty. Jeśli ruch wypadkowy jest ruchem okresowym, to również majoranta jest funkcją okresową, jednak oba te okresy nie muszą być sobie równe. Zauważmy, że część zmienna kwadratu majoranty jest kombinacją liniową funkcji (1.51); jeśli zatem dla $i \neq j$ wszystkie możliwe $|\omega_{ij}|$ układają się w proporcji względnie pierwszych liczb naturalnych n_{ij} , to zgodnie z (1.42) okres majoranty

$$\hat{T} = n_{ij} T_{ij} = 2\pi n_{ij} / |\omega_{ij}|. \quad (1.53)$$

W trywialnym przypadku jednego ruchu

$$\hat{q}(t) = a_1 = \text{am } q_1 = \text{const}, \quad (1.54)$$

a więc majoranta jest linią prostą równoległą do osi czasu.

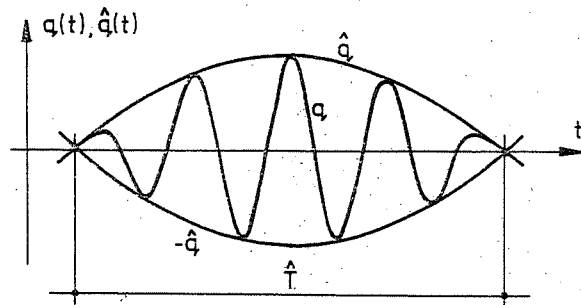
W szczególnym przypadku superpozycji dwóch ruchów asynchronicznych otrzymuje się

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos |\omega_{12} t + \varphi_{12}|}, \\ T &= 2\pi n_1 / \omega_1 = 2\pi n_2 / \omega_2, \\ \hat{T} &= 2\pi / |\omega_1 - \omega_2| = T / |n_1 - n_2|. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Majoranta pulsuje wtedy w przedziale

$$|a_1 - a_2| \leq \hat{q}(t) \leq (a_1 + a_2). \quad (1.56)$$

Pulsacja ta ujawnia się szczególnie wyraźnie, gdy $a_1 \approx a_2$. Jednocześnie pojawia się efekt akustyczny, zwany dudnieniem, zwłaszcza w przypadku $\omega_1 \approx \omega_2$, wtedy bowiem $\bar{T} \gg T_1 \approx T_2$ i cykl majoranty jest gęsto wypełniony lokalnymi oscylacjami ruchu wypadkowego (rys. 1.11).



Rys. 1.11

Wykres ruchu złożonego jest na ogół funkcją szybkozmienną o skomplikowanym przebiegu, składającym się niekiedy z wielu różnych oscylacji lokalnych w jednym cyklu ruchu. Sporządzanie wykresu ruchu i jego analiza mogą być zatem kłopotliwe. Majoranta ruchu złożonego natomiast jest zawsze funkcją nieujemną o stosunkowo łagodnym przebiegu, dlatego też sporządzanie wykresu majoranty jest mniej pracochłonne.

Rozważmy dla przykładu ruch opisany formułą

$$\begin{aligned} q(t) = q_1 + q_2 &= 2\sin 2\pi t + \cos 6\pi t = \\ &= 2\sin 2\pi t + \sin(6\pi t + \pi/2). \end{aligned}$$

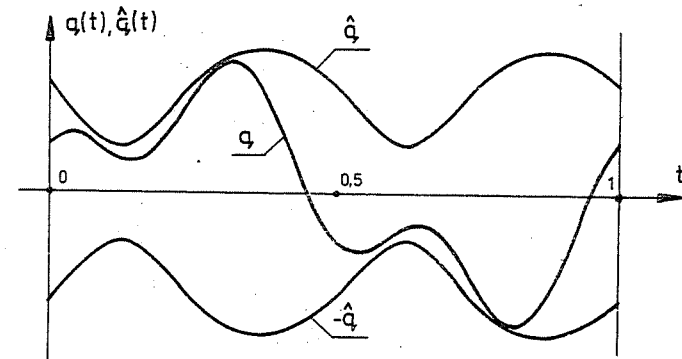
Charakterystyki ruchów składowych są następujące:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi \text{ rad/s}, & \omega_2 &= 6\pi \text{ rad/s}, \\ n_1 &= 1, & n_2 &= 3, \\ T_1 &= 1 \text{ s}, & T_2 &= 1/3 \text{ s}. \end{aligned}$$

Dla ruchu złożonego otrzymujemy:

- okres ruchu $T = 2\pi \cdot 1/2\pi = 2\pi \cdot 3/6\pi = 1 \text{ s}$,
- okres majoranty $\bar{T} = 1/|1-3| = 1/2 \text{ s}$,
- formułę majoranty $\hat{q}(t) = \sqrt{5 - 4\sin 4\pi t}$.

Wykres ruchu i majoranty ruchu przedstawiono na rys. 1.12.

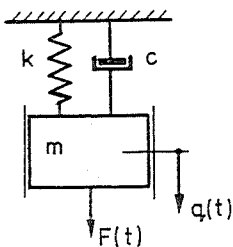


Rys. 1.12

2. UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

2.1. Równanie ruchu

Najprostszy ideowy model układu o jednym stopniu swobody przedstawiono na rys. 2.1. Masa m jest połączona z nieruchomą ośnią za pomocą więzi sprężystej o sztywności k oraz tłumika viskozycznego o parametrze c . Układ jest obciążony siłą zbudującą $F(t)$, a wychylenie masy z położenia równowagi statycznej opisuje współrzędna uogólniona $q(t)$. Bilans energetyczny układu daje rezultaty



Rys. 2.1

Po podstawieniu obliczonych wielkości do równań Lagrange'a (1.20) otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t). \quad (2.2)$$

Równanie to, zgodnie z zasadą d'Alemberta, wyraża warunek dynamicznej równowagi sił działających na rozważaną masę. Siłami tymi są: zewnętrzna siła czynna F , siła bezwładności $-m\ddot{q}$, reakcja tłumika (opór ruchu) $-c\dot{q}$ oraz reakcja sprężysta $-kq$.

2.2. Zagadnienie własne

Rozwiązaniem zagadnienia własnego nazywamy w dynamice budowli ustalenie okoliczności, w których równanie ruchu pozbawione składników reprezentujących opory ruchu i siłę zbudującą może mieć niezerowe rozwiązanie. Poszukiwana jest więc całka równania

$$m\ddot{q} + kq = 0. \quad (2.3)$$

Kładąc $q = e^{\lambda t}$ otrzymamy równanie charakterystyczne $m\lambda^2 + k = 0$, którego pierwiastkami są $\lambda_1 = i\omega$ oraz $\lambda_2 = -i\omega$, gdzie $\omega^2 = k/m$. Charakter pierwiastków wskazuje na to, że całka ogólna równania (2.3) ma postać

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t, \quad (2.4)$$

przy czym q_s, q_c są stałymi dowolnymi. Stacjonarny, harmoniczny proces opisany funkcją (2.4) nazywamy drganiami własnymi. Wielkość

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (2.5)$$

jest częstotliwością kołową drgań własnych. Jest ona indywidualną cechą rozważanego obiektu i nie zależy od czynników zewnętrznych. Drgania własne nie są procesem fizycznym, opisują one jedynie pewną dyspozycję ustroju.

2.3. Drgania swobodne

Drganiami swobodnymi nazywamy proces fizyczny spowodowany wyłącznie początkowym zaburzeniem stanu równowagi, a więc nałożeniem warunków początkowych $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Jeżeli tłumienie jest pomijalnie małe, rozwiązanie może być przyjęte w postaci (2.4), a zatem

$$\begin{aligned} q(0) = q_0 = q_c &\rightarrow q_c = q_0, \\ \dot{q}(0) = \omega q_s = \dot{q}_0 &\rightarrow q_s = \dot{q}_0 / \omega. \end{aligned}$$

Ostatecznie rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega t + \dot{q}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}, \\ \dot{q}(t) &= -q_0 \omega \sin \omega t + \dot{q}_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Drgania swobodne tłumione są opisane równaniem różniczkowym

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0. \quad (2.7)$$

Kładąc $q = e^{\lambda t}$ otrzymamy równanie charakterystyczne $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, którego pierwiastkami są $\lambda_1 = -\alpha\omega + i\omega'$, $\lambda_2 = -\alpha\omega - i\omega'$, przy czym

$$\alpha = c/2\sqrt{km}, \quad (2.8)$$

$$\omega' = \omega\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (2.9)$$

Charakter pierwiastków wskazuje na to, że całka ogólna równania (2.7) ma postać

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t} (q_s \sin \omega' t + q_c \cos \omega' t). \quad (2.10)$$

Wykorzystując jak poprzednio warunki początkowe, otrzymamy

$$q(0) = q_0 = q_0 \rightarrow q_0 = q_0,$$

$$\dot{q}(0) = \omega' q_0 - \alpha \omega q_0 = \dot{q}_0 \rightarrow q_0 = \frac{1}{\omega'} \dot{q}_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} q_0.$$

Wprowadzimy pomocniczy fazowy parametr tłumienia β taki, że

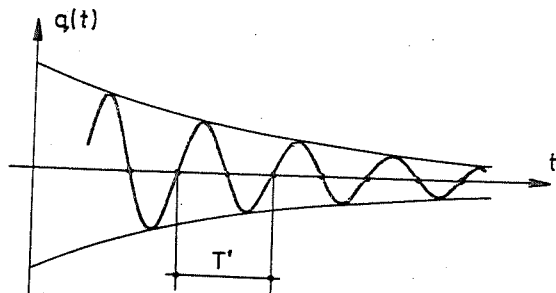
$$\alpha = \sin \beta, \quad \sqrt{1-\alpha^2} = \cos \beta. \quad (2.11)$$

Ostateczny wynik przybierze postać

$$q(t) = q_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t - \beta)}{\cos \beta} + \dot{q}_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\sin \omega' t}{\omega \cos \beta}, \quad (2.12)$$

$$\dot{q}(t) = -q_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\omega \sin \omega' t}{\cos \beta} + \dot{q}_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t + \beta)}{\cos \beta}.$$

Ruch opisany funkcjami (2.12) jest quasi-harmonicznym ruchem zanikającym, modulowanym funkcją wykładniczą $e^{-\alpha \omega t}$. Wykres ruchu jest



Rys. 2.2

poglądowo przedstawiony na rys. 2.2. Quasi-częstość kołową oraz quasi-okres drgań tłumionych określają wzory

$$\omega' = \omega \sqrt{1-\alpha^2} = \omega \cos \beta < \omega, \quad (2.13)$$

$$T' = 2\pi/\omega' = T/\sqrt{1-\alpha^2} = T/\cos \beta > T.$$

Opisane powyżej rozwiązanie o charakterze oscylacyjnym jest słuszne, gdy określony wzorem (2.8) bezwymiarowy parametr α , zwany liczbą tłumienia, zawiera się w przedziale $0 < \alpha < 1$. W przypadku $\alpha > 1$ ruch zanika w sposób nieoscylacyjny (aperiodyczny), a tłumienie okreś-

lone liczbą $\alpha = 1$ nazywamy tłumieniem krytycznym. W konstrukcjach budowlanych liczba tłumienia jest na ogół ułamkiem znacznie mniejszym od jedności, nie będziemy zatem dokładniej analizować przypadku tłumienia nadkrytycznego. Niekiedy liczbę tłumienia określa się procentowo w stosunku do tłumienia krytycznego na podstawie wzoru

$$\alpha_p = 100\alpha\% = 50 c/\sqrt{km}\%. \quad (2.14)$$

Liczbę tłumienia można wyznaczać doświadczalnie, badając stosunek wychyleń $q(t)$ do wychyleń $q(t+T')$ $= e^{-\alpha \omega T'}$ $q(t)$. Wielkość bezwymiarową

$$\vartheta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T')} = \alpha \omega T' = 2\pi\alpha/\sqrt{1-\alpha^2} = 2\pi\alpha\beta, \quad (2.15)$$

nazywamy logarytmicznym dekrementem tłumienia. Dekrement tłumienia ma sens jedynie w przypadku tłumienia podkrytycznego, jeśli zanikanie amplitud ma charakter eksponencjalny. W przypadku bardzo małego tłumienia wygodnie jest korzystać z wzoru

$$\vartheta = \frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT')}, \quad (2.16)$$

gdzie n jest liczbą naturalną większą od jedności. Z wzoru (2.15) wynika, że

$$\alpha = \vartheta/\sqrt{4\pi^2 + \vartheta^2} \approx \vartheta/2\pi, \quad (2.17)$$

przy czym relacja przybliżona jest słuszna, gdy $\vartheta \ll 2\pi$.

Do opisu tłumienia używa się również bezwymiarowego współczynnika tłumienia

$$\gamma = 2\alpha = c/\sqrt{km}, \quad (2.18)$$

który w przypadku tłumienia podkrytycznego zawiera się w przedziale $0 \leq \gamma < 2$. Dla konstrukcji budowlanych współczynnik γ zawiera się przeciętnie w granicach określonych w tab. 2.1.

Wszystkie omówione parametry tłumienia, a więc α , α_p , β , ϑ , γ , są indywidualnymi cechami obiektu, wzajemnie uzależnionymi.

W procesie drgań następuje cykliczna przemiana energii kinetycznej w potencjalną i odwrotnie, przy czym w danej chwili łączna energia drgań

$$E(t) = E_p + E_k = \frac{1}{2} k q^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2} k (q^2 + \dot{q}^2/\omega^2). \quad (2.19)$$

T a b e l a 2.1

| Współczynniki tłumienia | |
|-------------------------|-------------|
| Konstrukcje | γ |
| stalowe | 0,010-0,025 |
| drewniane | 0,030-0,050 |
| murowe | 0,040-0,080 |
| żelbetowe | 0,050-0,100 |

Załóżmy $q_0 = a$ oraz $\dot{q}_0 = 0$. Wtedy zgodnie z (2.12)

$$q(t) = a e^{-\alpha \omega t} \cos(\omega' t - \beta) / \cos \beta,$$

$$\dot{q}(t) = -a \omega e^{-\alpha \omega t} \sin \omega' t / \cos \beta,$$

a zatem

$$E(t) = \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\alpha \omega t} [\cos^2(\omega' t - \beta) + \sin^2 \omega' t] / \cos^2 \beta.$$

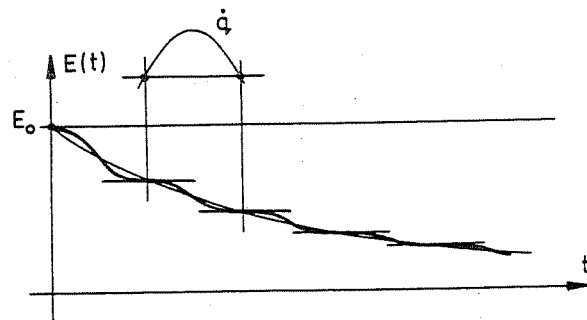
Wykorzystując tożsamość trygonometryczną

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1 + \sin(x+y) \sin(x-y)$$

i oznaczając $ka^2/2 = E_0$, ostatecznie otrzymamy

$$E(t) = E_0 \frac{e^{-2\alpha \omega t}}{1 - \alpha^2} [1 + \alpha \sin(2\omega' t - \beta)]. \quad (2.20)$$

Wykres funkcji $E(t)$ jest poglądowo przedstawiony na rys. 2.3.



Rys. 2.3

Energia drgań tłumionych zmniejsza się generalnie według funkcji wykładniczej, jednakże z cyklicznymi zaburzeniami. Strata energii następuje kosztem energii kinetycznej. Zauważmy, że

$$\dot{E}(t) = kq\dot{q} + m\dot{q}\ddot{q} = (kq + m\ddot{q})\dot{q} = -c\dot{q}^2 \leq 0.$$

Oznacza to, że funkcja $E(t)$ jest stale malejąca z wyjątkiem chwil, w których $\dot{q} = 0$. W chwilach tych funkcja $E(t)$ ma punkty przegięcia i gradient straty energii jest równy zero. Logarytmiczny dekrement energii, czyli logarytm naturalny stosunku poziomów energetycznych w odstępie jednego cyklu, jest opisany wzorem

$$\ln \frac{E(t)}{E(t+T')} = 2\alpha \omega T' = 2 \theta. \quad (2.21)$$

W przypadku drgań nietłumionych $E(t) = E_0 = \text{const.}$

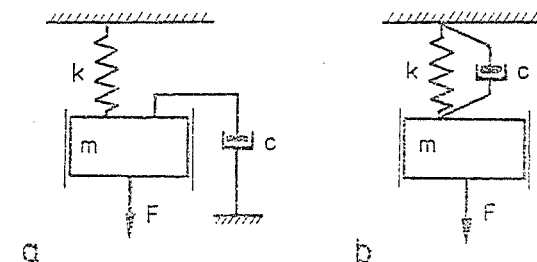
2.4. Warianty modelu tłumienia. Wyteżenie konstrukcji

Stan przemieszczenia konstrukcji odkształcalnej stanowi podstawę do określenia stanu wyteżenia konstrukcji, jeśli znane są związki fizyczne między tymi stanami. Reakcja więzi odkształcalnej, wynikająca z fizykomechanicznych cech materiału konstrukcji, zgodnie z zasadą d'Alemberta powinna być równa obciążeniu kinetycznemu złożonemu z siły wzbudzającej, siły bezwładności i innych sił o charakterze zewnętrznym w stosunku do tej więzi. Innymi słowy, siły występujące w równaniu (2.2) powinny być podzielone na dwie wzajemnie równoważące się grupy, z których jedna reprezentuje obciążenie, a druga reakcją konstrukcji na to obciążenie. Definicja obciążenia kinetycznego nie jest oczywista, konstrukcje budowlane bowiem wykazują własności tłumiące, nie zawierając na ogół w sposób jawny tłumików służących wyłącznie do rozpraszania energii. W tej sytuacji możliwe są różne warianty modelu tłumienia i definicji wyteżenia, odpowiadające ogólnie przyjętemu założeniu o wiskotycznym charakterze oporów ruchu.

Załóżmy, że konstrukcja jest zbudowana z materiału idealnie sprężystego. W tym przypadku obciążenie kinetyczne wyrazimy formułą

$$Q(t) = kq = F - m\ddot{q} - c\dot{q}, \quad (2.22)$$

w której opory ruchu zostały zakwalifikowane do grupy sił zewnętrznych i skojarzone z siłami bezwładności (rys. 2.4a).



Rys. 2.4

W przyjętym modelu tłumik wiskotyczny reprezentuje tłumienie ze strony środowiska (np. opór powietrza), a także w przybliżeniu tzw. tłumienie konstrukcyjne związane z materialnym ukształtowaniem konstrukcji. Można przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do pędu masy, a więc że

$$c = \mu m, \quad (2.23)$$

gdzie μ jest wymiarem parametrem tłumienia, mierzonym w s^{-1} . Zgodnie z tym założeniem otrzymamy bezwymiarowy współczynnik tłumienia

$$\gamma = c/\sqrt{km} = \mu m/\sqrt{km} = \mu/\omega. \quad (2.24)$$

Założmy z kolei, że opory ruchu mają charakter wyłącznie wewnętrzny (materiałowy). W tym przypadku obciążenie kinetyczne zdefiniujemy wzorem

$$Q(t) = kq + c\dot{q} = F - m\ddot{q}. \quad (2.25)$$

Można tu przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do prędkości reakcji sprężystej, a więc że

$$c = \kappa k, \quad (2.26)$$

gdzie κ jest wymiarem parametrem tłumienia materiałowego, mierzonym w sekundach (czas retardacji), co odpowiada reologicznemu modelowi ciała Voigta-Kelvina, jak na rys. 2.4b. W tym przypadku bezwymiarowy współczynnik tłumienia

$$\gamma = c/\sqrt{km} = \kappa k/\sqrt{km} = \kappa\omega. \quad (2.27)$$

Możliwy jest również wariant kombinowany, w którym

$$\begin{aligned} Q(t) &= k(q + \mu\dot{q}) = F - m(\ddot{q} + \mu\dot{q}), \\ c &= \kappa k + \mu m, \\ \gamma &= \kappa\omega + \mu/\omega. \end{aligned} \quad (2.28)$$

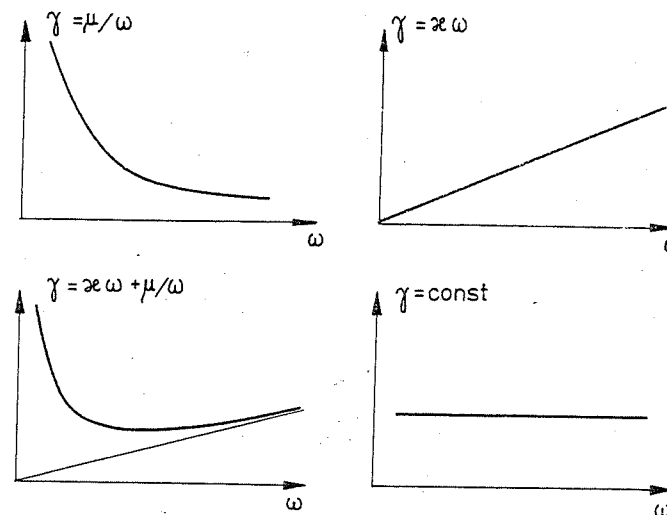
Uwzględnione są tu zarówno wewnętrzne, jak i zewnętrzne opory ruchu.

Rzeczywista natura oporów ruchu w konstrukcjach budowlanych nie jest dostatecznie dobrze poznana. Zasadnicze znaczenie przypisuje się często oporom wewnętrznym, o których istnieniu świadczy histereza wykresów $\sigma - \epsilon$. Badania doświadczalne nie potwierdzają jednak jednoznacznej zależności współczynnika γ od częstości ω , jaką otrzymaliśmy dla modelu Voigta-Kelvina i wskazują na to, że cechą własności tłumiących określonego rodzaju konstrukcji jest bezwymiarowy współczynnik tłumienia na ogół słabo zależny lub nawet niezależny od częstości. Od częstości natomiast należy raczej uzależnić parametr κ , przy czym zgodnie z wzorem (2.27)

$$\kappa = \gamma/\omega. \quad (2.29)$$

W dalszych rozważaniach będziemy w zasadzie korzystali z relacji (2.25) z uwzględnieniem (2.26) i (2.29). Nie sprawi to trudności w analizie układów o jednym stopniu swobody. Omawiając układy dyskretnie i ciągle rozpatrzmy problem tłumienia ponownie.

Wykresy zależności współczynnika γ od częstości drgań własnych, odpowiadające omówionym wariantom modelu tłumienia wiskotycznego, są poglądowo przedstawione na rys. 2.5.



Rys. 2.5

2.5. Drgania wymuszone harmoniczne

Założmy, że siła wzbudająca w równaniu (2.2) jest harmoniczną funkcją czasu. Równanie ruchu przybierze postać

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_s \sin pt + F_c \cos pt, \quad (2.30)$$

gdzie p jest częstością kołową wzbudzenia. Oznaczając $k/m = \omega^2$, $c/\sqrt{km} = \gamma$, równanie to sprowadzimy do postaci

$$\ddot{q} + \gamma\omega\dot{q} + \omega^2 q = (F_s \sin pt + F_c \cos pt) \omega^2/k. \quad (2.31)$$

W przypadku układów rzeczywistych całka ogólna równania jednorodnego jest funkcją zanikającą, skupimy zatem uwagę na całce szczególnej równania niejednorodnego, której będziemy poszukiwać w postaci funkcji harmonicznego

$$q(t) = q_s \sin pt + q_c \cos pt. \quad (2.32)$$

Równanie (2.31) po podstawieniu (2.32) powinno być spełnione tożsamościowo (w każdej chwili). Wynikają stąd dwa równania algebraiczne

$$(\omega^2 - p^2)q_s - \gamma\omega p q_c = F_s \omega^2/k,$$

$$\gamma\omega p q_s + (\omega^2 - p^2)q_c = F_c \omega^2/k.$$

Oznacząc $p/\omega = \eta$, równania te doprowadzimy do postaci

$$\begin{aligned} (1 - \eta^2)q_s - \gamma\eta q_c &= F_s/k, \\ \gamma\eta q_s + (1 - \eta^2)q_c &= F_c/k \end{aligned} \quad (2.33)$$

i obliczymy pierwiastki

$$q_s = h F_s + h' F_c, \quad q_c = -h' F_s + h F_c, \quad (2.34)$$

przy czym

$$h = \frac{1}{k} \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}, \quad h' = \frac{1}{k} \frac{\gamma \eta}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}. \quad (2.35)$$

Rzężenia ustalone można więc opisać wzorami

$$\begin{aligned} q(t) &= F_s(h \sin pt - h' \cos pt) + \\ &+ F_c(h' \sin pt + h \cos pt) = \frac{v}{k} F_s \sin(pt - \psi) + \frac{v}{k} F_c \cos(pt - \psi), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\text{am } q = \frac{v}{k} \sqrt{F_s^2 + F_c^2} = \frac{v}{k} \text{am } r,$$

gdzie

$$v = 1/\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}, \quad \psi = \arctg[\gamma\eta/(1 - \eta^2)]. \quad (2.37)$$

Przebieg czasowy przemieszczenia jest odwzorowaniem przebiegu siły wzбудzającej z opóźnieniem fazowym ψ . wielkość bezwymiarową v nazywamy współczynnikiem dynamicznym. W przypadku pomijalnie małego tłumienia

$$v = 1/|1 - \eta^2|. \quad (2.38)$$

Przypadek $\eta = 1$, odpowiadający równości $p = \omega$, nazywamy stanem rezonansowym lub krótko rezonansem. Rezonansowe opóźnienie fazowe $\psi = \pi/2$, niezależnie od mocy tłumienia, natomiast rezonansowy współczynnik dynamiczny

$$v_r = 1/\gamma. \quad (2.39)$$

Dokładne maksimum współczynnika dynamicznego znajduje się w punkcie $\eta = \sqrt{1 - \gamma^2/2} < 1$ i wynosi

$$v_{\max} = 1/(\gamma\sqrt{1 - \gamma^2/4}) > v_r. \quad (2.40)$$

pod warunkiem, że $\gamma < \sqrt{2}$. W przypadku dostatecznie małego tłumienia różnica między wartościami v_r oraz v_{\max} jest znikoma i w praktyce można stosować wzór (2.39). Gdy $\gamma < 0,28$, błąd względny jest mniejszy niż 1%, a przy $\gamma = 0,09$ błąd względny jest rzędu 1%. Rezonansowa wartość współczynnika dynamicznego wskazuje na to, jak istotne znaczenie może mieć wybór modelu tłumienia (por. rys. 2.5) oraz do-
stępną moc tłumienia.

Obciążeniem kinetycznym układu (przy założeniu modelu Voigta-Kelvina z parametrem $\kappa = \gamma/\omega$) jest siła

$$\begin{aligned} Q(t) &= k(q + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}) = \\ &= v(F_s - \gamma\eta F_c) \sin(pt - \psi) + v(F_c + \gamma\eta F_s) \cos(pt - \psi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

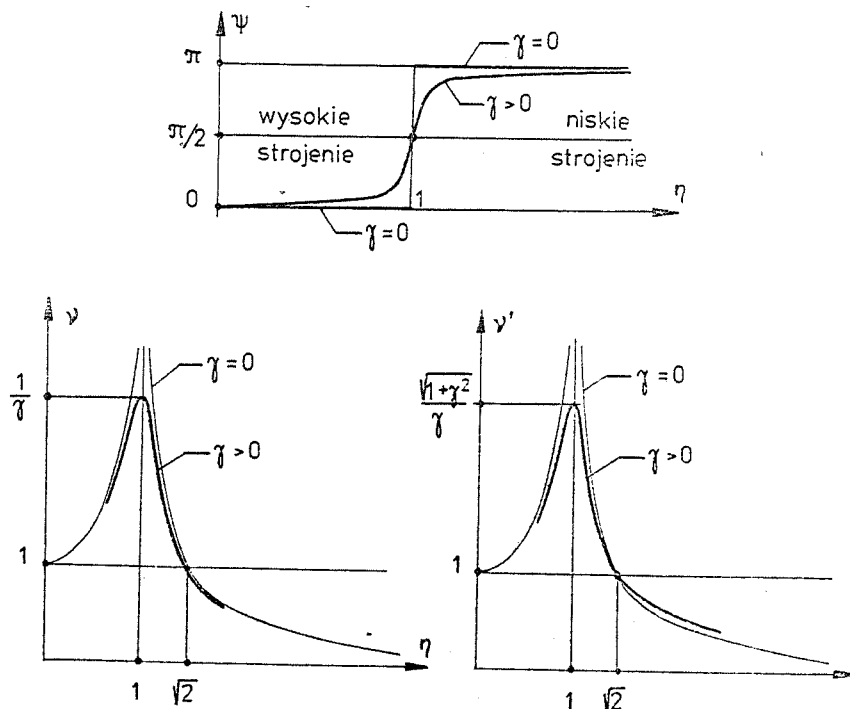
o amplitudzie

$$\text{am } Q = \sqrt{Q_s^2 + Q_c^2} = v\sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2} \cdot \text{am } F = v' \cdot \text{am } F, \quad (2.42)$$

gdzie

$$v' = v\sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2}. \quad (2.43)$$

Poglądowe wykresy funkcji ψ , v , v' są przedstawione na rys. 2.6.



Rys. 2.6

2.6. Wymuszenie bezwładnościowe

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 2.7, w którym masa m_0 , będąca częścią masy m , wykonuje ruch obrotowy na mimosrodzie e z prędkością kątową p . Podczas takiego ruchu powstaje siła odśrodkowa

$$F_0 = m_0 e p^2 = \mathcal{M}_0 p^2, \quad (2.44)$$

przy czym $\mathcal{M}_0 = m_0 e$ jest masowym momentem niewyważenia obrotowego. Rzut wirującej siły odśrodkowej na kierunek drgań określa wzór

$$F(t) = F_0 \cos pt, \quad (2.45)$$

a więc

$$\text{am } q = \frac{v}{k} F_0, \quad \text{am } Q = v' F_0. \quad (2.46)$$

Opisany układ może być modelem ustroju, w którym źródłem wzbudzenia jest maszyna wirnikowa. Wzbudzenie tego typu nazywamy wymuszeniem bezwładnościowym. Stosując wzory (2.46) należy pamiętać o tym, że wartość siły F_0 zależy od częstości kołowej wzbudzenia, współczynniki dynamiczne v oraz v' nie opisują przeto w pełni zjawiska przy częstościach wzbudzenia przyjmujących różne wartości. Pełną odpowiedź otrzymamy uwzględniając (2.44), a zatem

$$\text{am } q = \frac{v}{k} \mathcal{M}_0 p^2 = \frac{v}{k} \mathcal{M}_0 \eta^2 \omega^2 = v \eta^2 \mathcal{M}_0 / m, \quad (2.47)$$

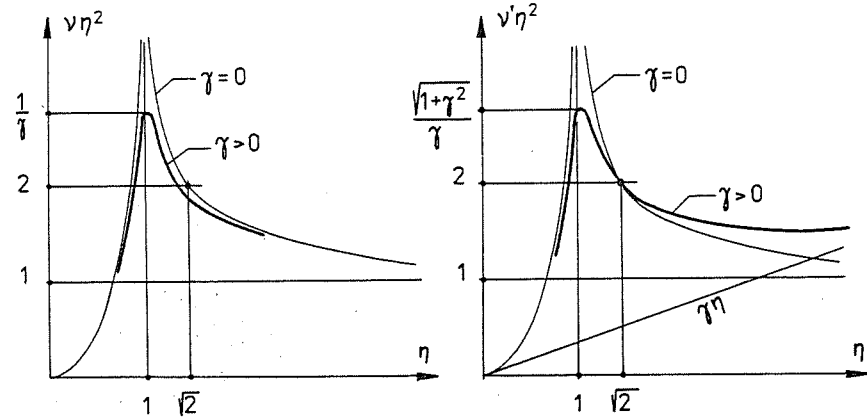
$$\text{am } Q = v' \mathcal{M}_0 p^2 = v' \mathcal{M}_0 \eta^2 \omega^2 = v' \eta^2 \mathcal{M}_0 \omega^2.$$

Jak widać, amplitudy przemieszczenia i obciążenia kinetycznego przy różnych częstościach wzbudzenia są regulowane nowymi funkcjami $v \eta^2$ oraz $v' \eta^2$. Poglądowe wykresy tych funkcji są przedstawione na rys. 2.8.

Cechą funkcji $v \eta^2$ jest to, że w strefie niskiego strojenia ($\eta > 1$) zmierza ona asymptotycznie do jedności, niezależnie od mocy tłumienia. Jeśli więc jest $p \gg \omega$, to $\text{am } q \approx \mathcal{M}_0 / m$, a stąd

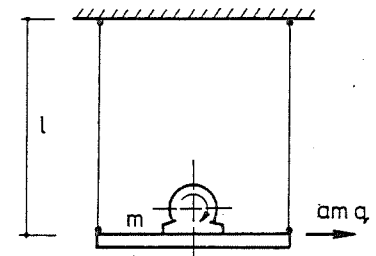
$$\mathcal{M}_0 \approx m \cdot \text{am } q. \quad (2.48)$$

Zależność ta może być podstawą doświadczalnego określania masowego momentu niewyważenia maszyny wirnikowej. Dogodnym układem pomiarowym jest np. wahadko fizyczne w formie wiszącego pomostu, na którym



Rys. 2.8

spoczywa badane urządzenie (rys. 2.9). Częstość poziomych drgań własnych wahadła wynosi w przybliżeniu $\omega = \sqrt{g/l}$ i można bez trudu dobrać tak długość wahadła l , aby było $\omega \ll p$. Wprowadzwszy masę m_0 w ruch obrotowy należy zmierzyć amplitudę poziomych drgań wymuszonych i skorzystać z wzoru (2.48). Wielkość m jest tu łączną masą badanego urządzenia i pomostu.



Rys. 2.9

2.7. Proces przejściowy

Drgania ustalone spowodowane stacjonarnym wymuszeniem harmonicznym są procesem realizującym się asymptotycznie przy założeniu, że czas obserwacji procesu jest dostatecznie odległy od chwili początkowej, w której wzbudzenie zostało zainicjowane. Przebieg zjawiska w początkowym przedziale czasu lub w przedziale końcowym, w którym wzbudzenie wygasa, nazywamy procesem przejściowym.

Założmy wstępnie, że podczas rozbiegu masy m_0 częstość wzbudzenia jest proporcjonalna do czasu (ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony), a więc

$$p(t) = \eta \omega = \dot{p} t, \quad (2.49)$$

gdzie $\dot{p} = \text{const}$ jest ustalonym przyspieszeniem kątowym masy m_0 w ruchu obrotowym (rys. 2.7), inaczej - przyspieszeniem fazy wzbudzenia. Oś η może być w tym przypadku traktowana jako przeskalowana oś czasu (istotnie, $\eta = \dot{p}t/\omega$), a funkcje (2.47), ilustrowane wykresami na rys. 2.8, można interpretować jako obwiednie chwilowych amplitud podczas rozbiegu masy m_0 przy zerowych warunkach początkowych. Jest to ilustracja procesu przejściowego, a w tym także zjawiska rezonansu przejściowego, w pewnej bowiem chwili $p(t) = \omega$ i amplitudy chwilowe osiągają kulminacje rezonansowe. Rozumowanie jest słuszne, jeśli rozbieg jest dostatecznie powolny ($\dot{p} \ll \omega^2$). Przy znaczących wartościach \dot{p}/ω^2 zagadnienie procesu przejściowego, a zwłaszcza rezonansu przejściowego komplikuje się, nie można bowiem pominąć wpływu przyspieszenia fazy wzbudzenia w procedurze poszukiwania całki równania ruchu.

Rozważmy równanie (2.2) z warunkami

$$q(t) = 0, \quad \dot{q}(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \leq 0 \quad (2.50)$$

i załóżmy, że siła wzbudzająca jest określona pewną funkcją oscylacyjną o formule

$$F(t) = F_s(t)\sin\varphi(t) + F_c(t)\cos\varphi(t). \quad (2.51)$$

Funkcje $F_s(t)$ i $F_c(t)$ dla $t > 0$ są znanymi funkcjami czasu, znane są również rozkład prędkości fazy wzbudzenia (częstości kołowej) oraz przyspieszenie fazy

$$p(t) = \dot{\varphi}(t), \quad \dot{p}(t) = \ddot{\varphi}(t), \quad (2.52)$$

natomiast funkcja

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t p(t)dt, \quad (2.53)$$

zgodnie z fizyczną rzeczywistością, nie jest znana, może być bowiem wyznaczona jedynie z dokładnością do wartości stałej. W tej sytuacji funkcja (2.51) nie jest jednoznacznie określona, znana jest natomiast jej majoranta

$$\hat{F}(t) = \sqrt{F_s^2(t) + F_c^2(t)}. \quad (2.54)$$

Równanie ruchu (2.2) zapiszemy w postaci

$$\ddot{q} + \gamma\omega\dot{q} + \omega^2q = \frac{1}{m}F(t). \quad (2.55)$$

Całki tego równania będziemy poszukiwali w postaci analogicznej do (2.51) funkcji oscylacyjnej

$$q(t) = q_s(t)\sin\varphi(t) + q_c(t)\cos\varphi(t). \quad (2.56)$$

Pochodne kinematyczne mają postać

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_s - p q_c)\sin\varphi + (\dot{q}_c + p q_s)\cos\varphi, \quad (2.57)$$

$$\ddot{q}(t) = (\ddot{q}_s - p^2 q_s - 2p\dot{q}_c - \dot{p} q_c)\sin\varphi + (\ddot{q}_c - p^2 q_c + 2p\dot{q}_s + \dot{p} q_s)\cos\varphi.$$

Wyrażenia (2.56) i (2.57) należy podstawić do równania (2.55). Funkcja (2.56) będzie całką tego równania, jeśli spełniony będzie układ sprzężonych równań różniczkowych o zmiennych w czasie współczynnikach

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\omega & -2p \\ 2p & \gamma\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_s \\ q_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 - p^2 & -\gamma\omega p - \dot{p} \\ \gamma\omega p + \dot{p} & \omega^2 - p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_s \\ q_c \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_s \\ F_c \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

przy czym nieznane funkcje $q_s(t)$ oraz $q_c(t)$ ze względu na (2.50) powinny spełniać zerowe warunki początkowe. Równania te mogą być rozwiązane jedynie metodami numerycznymi. Formuła ruchu (2.56) nie może być jednoznacznie określona ze względu na brak pełnej informacji o funkcji $\varphi(t)$, niemniej rozwiązanie równań (2.58) umożliwia wyznaczenie majoranty ruchu

$$\hat{q}(t) = \sqrt{q_s^2(t) + q_c^2(t)}. \quad (2.59)$$

Obciążenie kinetyczne zgodnie z (2.41) wyrazimy formułą

$$Q(t) = k(q + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}) = k(q_s + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_s - \frac{\gamma p}{\omega}q_c)\sin\varphi + k(q_c + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_c + \frac{\gamma p}{\omega}q_s)\cos\varphi, \quad (2.60)$$

a więc

$$Q_s(t) = k(q_s + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_s - \frac{\gamma p}{\omega}q_c), \quad Q_c(t) = k(q_c + \frac{\gamma}{\omega}\dot{q}_c + \frac{\gamma p}{\omega}q_s)$$

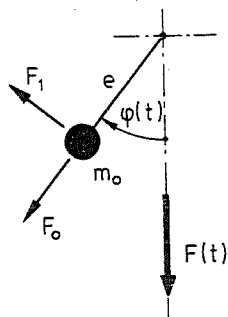
oraz

$$\hat{Q}(t) = \sqrt{Q_s^2(t) + Q_c^2(t)}. \quad (2.61)$$

W ten sposób majorancie wzbudzenia (2.54) zostały przyporządkowane majoranty rozwiązań (2.59) i (2.61).

Zauważmy, że w przedziale stacjonarnego wzbudzenia jest $p = \text{const}$, $\dot{p} = 0$, $F_s = \text{const}$, $F_c = \text{const}$. Równania (2.58) przekształcają się na układ o stałych współczynnikach z ustaloną prawą stroną. Rozwiązanie takiego układu asymptotycznie zmierza do rozwiązania znanego układu równań algebraicznych (2.33), jak być powinno.

W przypadku wymuszenia bezwładnościowego ze zmienną częstością wzbudzenia, oprócz siły odśrodkowej $r_0 = m_0 \omega^2 = \mathcal{N}_0 \omega^2$, pojawia się



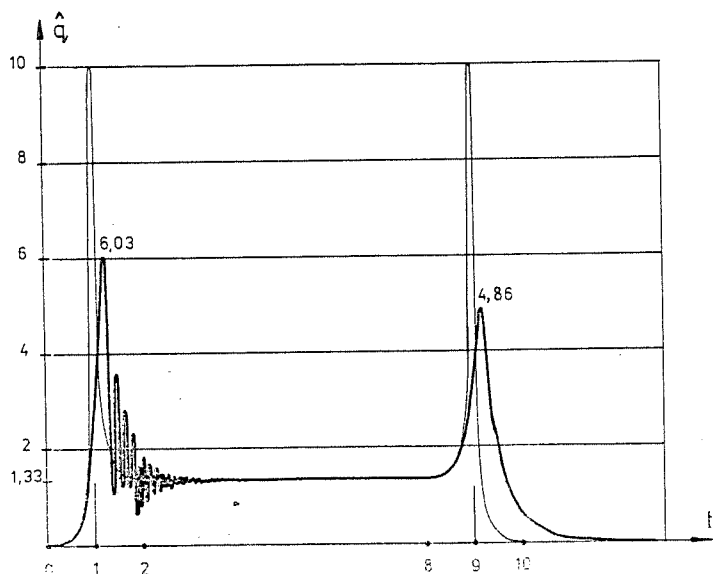
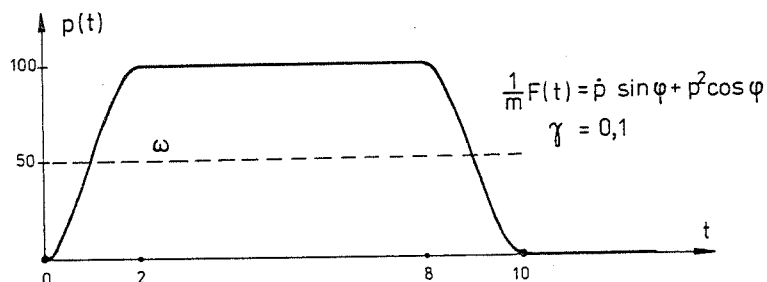
Rys. 2.10

również styczna siła bezwładności $F_1 = -m_0 \dot{e} \dot{p} = -\mathcal{N}_0 \dot{p}$ (rys. 2.10). Rzutując te siły na kierunek drgań, otrzymamy

$$F(t) = \mathcal{N}_0 \dot{p} \sin(t) + \mathcal{N}_0 p^2 \cos(t), \quad (2.62)$$

$$\hat{F}(t) = \mathcal{N}_0 \sqrt{p^4 + \dot{p}^2}.$$

Poglądowy przykład rozwiązania procesu przejściowego jest przedstawiony na rys. 2.11. Linia cienką oznaczono tło odpowiadające elementarnemu rozwiązaniu na podstawie równań (2.33). Charakterystyczną cechą zjawiska rezonansu przejściowego jest opóźnienie kulminacji



Rys. 2.11

efektu dynamicznego oraz zmniejszenie wartości rezonansowej w stosunku do wyniku określonego wzorem (2.47).

2.8. Wymuszenie kinematyczne

Rozważmy układ, jak na rys. 2.12. Ruch jest tu wymuszony określonymi drganiami $z(t)$ wykonywanymi przez ostoję. Masa m wykonuje ruch złożony ze składowej kinematycznej $z(t)$ oraz składowej względnej $q(t)$. Równanie ruchu ma postać

$$m(\ddot{z} + \ddot{q}) + c\dot{q} + kq = 0. \quad (2.63)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie ruchu względnego

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = -m\ddot{z} = F(t). \quad (2.64)$$

Siła wzbudzająca jest tu równa sile bezwładności wynikającej ze składowej kinematycznej. W przypadku wzbudzenia harmonicznego $z(t) = A \sin pt$ otrzymamy siłę wzbudzącą $F(t) = mAp^2 \sin pt$, a więc zgodnie z (2.36) i (2.42)

$$q(t) = am q \cdot \sin(pt - \psi),$$

$$am q = \frac{v}{k} mAp^2 = v\eta^2 A, \quad (2.65)$$

$$am q = v' mAp^2 = v'\eta^2 kA.$$

Całkowite przemieszczenie masy wyraża wzór

$$(z + q) = A \sin pt + v\eta^2 A \sin(pt - \psi), \quad (2.66)$$

a zatem zgodnie z (1.39)

$$am(z+q) = A \sqrt{1 + v^2 \eta^4 + 2 v \eta^2 \cos \psi}. \quad (2.67)$$

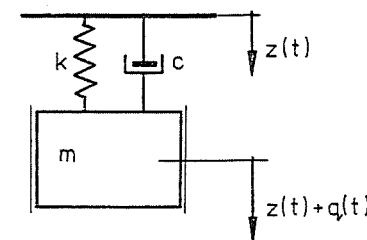
Uwzględniając to, że

$$\cos \psi = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 \psi} = (1 - \eta^2) v, \quad (2.68)$$

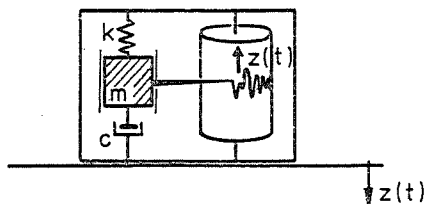
otrzymamy ostatecznie

$$am(z+q) = v \sqrt{1 + \eta^2} A = v' A. \quad (2.69)$$

Zauważmy, że przy $p \gg \omega$ jest $v\eta^2 = 1$, $\psi = \pi$, $v' = 0$; wtedy $q(t) = -A \sin pt = -z(t)$ oraz $(z+q) = 0$. Masa pozostaje w spoczynku, a jej ruch względny jest odwzorowaniem przebiegu wymuszenia kinematycznego. Zjawisko to jest wykorzystywane przy budowie bezwładnościowych



Rys. 2.12



Rys. 2.13

mierników drgań (rys. 2.13). Masa zawieszona na sprężynie w obudowie miernika odwarza za pomocą ryłka na obracającym się walcu pionowe drgania obiektu, na którym miernik został umieszczony. Mierzone mogą być drgania o częstościach dostatecznie dużych w stosunku do częstości drgań własnych zawieszanej masy.

2.9. Drgania wymuszone aperiodyczne

Rozważmy przypadek siły wzбудzającej o stałej wartości P , nagle przyłożonej w chwili $t = 0$. Równanie ruchu układu nietłumionego ma dla $t > 0$ postać

$$m\ddot{q} + kq = P, \quad (2.70)$$

a jego całka

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t + P/k. \quad (2.71)$$

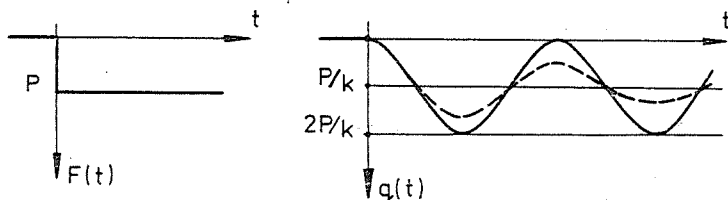
Zakładając zerowe warunki początkowe, otrzymamy $q_s = 0$ oraz $q_c = -P/k$, a zatem ostatecznie

$$q(t) = \frac{P}{k} (1 - \cos \omega t). \quad (2.72)$$

Obciążenie kinetyczne

$$Q(t) = kq = P(1 - \cos \omega t), \quad \max Q = 2P. \quad (2.73)$$

Efekt nagłego przyłożenia siły jest w początkowej fazie procesu równorzędnym podwojeniu statycznemu działaniu tej siły. W przypadku układu tłumionego początkowe efekty dynamiczne są nieco mniejsze, a rozwiązanie zmierza do wartości stałej. Przyjmując $\ddot{q} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$, otrzymamy $q \rightarrow P/k$, jak w zadaniu statycznym. Przebieg czasowy siły



Rys. 2.14

wzbudzającej i przemieszczenia jest przedstawiony na rys. 2.14. Linia przerywaną zaznaczono charakter odpowiedzi w układzie tłumionym.

Drugim ważnym przypadkiem wymuszenia aperiodycznego jest działanie siły narastającej liniowo od zera z wydatkiem P_1 na jednostkę czasu. Równanie ruchu układu nietłumionego ma postać

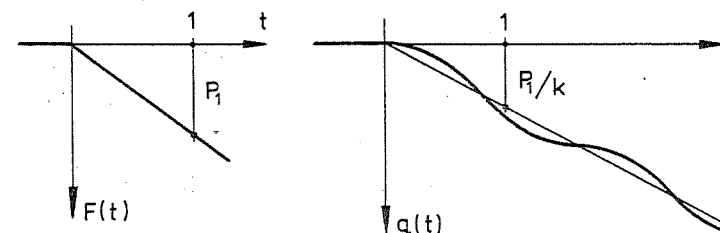
$$m\ddot{q} + kq = F(t) = P_1 t, \quad (2.74)$$

a jego rozwiązaniem po uwzględnieniu zerowych warunków początkowych jest funkcja

$$q(t) = (P_1/k) (t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t). \quad (2.75)$$

Przebieg czasowy siły wzбудzającej i przemieszczenia przedstawiono na rys. 2.15. Obciążenie kinetyczne

$$Q(t) = kq = P_1 t - (P_1/\omega) \sin \omega t = F - (P_1 T/2\pi) \sin \omega t. \quad (2.76)$$



Rys. 2.15

W omawianym zadaniu interesująca jest amplituda dynamicznego przyrostu obciążenia

$$\text{am}(Q-F) = P_1 T/2\pi. \quad (2.77)$$

Wielkość ta jest proporcjonalna do przyrostu obciążenia w okresie drgań swobodnych obiektu. Wynika stąd wniosek, że chcąc uniknąć znacznych przeciążeń dynamicznych należy układ obciążać tym wolniej, im większy jest okres jego drgań swobodnych.

Rozważmy z kolei przypadek obciążenia w formie impulsu działającego w przedziale Δt , niewspółmiernie małego wobec okresu drgań własnych obiektu. Wartość siły nie jest tu znana, wiadomo jednak, że $F\Delta t = \Pi$. Impuls Π jest popędem siły, który zostaje przetworzony na nagły przyrost pędu masy. Przy zerowych warunkach początkowych mamy po czasie realizacji impulsu $q(0+) = 0$, $\dot{q}(0+) = \Pi/m$. Równanie ruchu układu nietłumionego ma postać

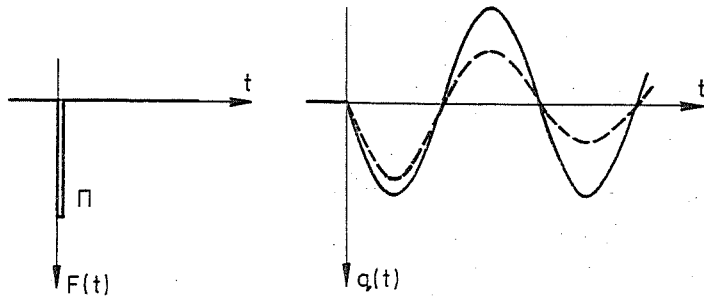
$$m\ddot{q} + kq = 0, \quad (2.78)$$

a jego całka ogólna $q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t$. Z warunków granicznych otrzymujemy $q_s = \Pi/m\omega$, $q_c = 0$, a więc

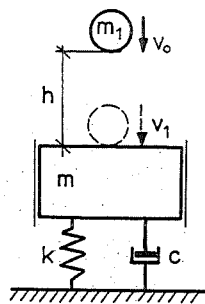
$$q(t) = \frac{\Pi}{m\omega} \sin \omega t = \frac{\Pi\omega}{k} \sin \omega t, \quad (2.79)$$

$$Q(t) = kq = \Pi\omega \sin \omega t, \quad \text{am } Q = \Pi\omega.$$

Efekt wymuszenia impulsowego są drgania swobodne. Wykres siły wzbudzającej i przemieszczenia jest przedstawiony na rys. 2.16. Linia przerywana zaznaczono charakter odpowiedzi w układzie tłumionym. Zauważmy, że efekt działania określonego impulsu zwiększa się ze wzrostem częstości drgań własnych obiektu.



Rys. 2.16



Rys. 2.17

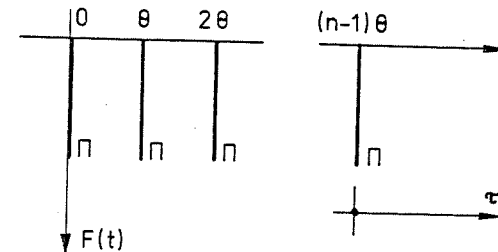
Fizyczny przypadek działania impulsu występuje podczas sprężystego uderzenia (z odskokiem) masy m przez masę m_1 z prędkością końcową v_1 (rys. 2.17). W tym przypadku impuls

$$\Pi = (1+k_u)v_1 m m_1 / (m+m_1), \quad (2.80)$$

przy czym k_u jest współczynnikiem sprężystości uderzenia, zależnym od cech materiałowych obu mas i zawartym w przedziale $(0; 1)$. W przypadku swobodnego spadania masy m_1 z wysokości h jest $v_1 = \sqrt{2gh}$, jeśli zaś masa m_1 spada z prędkością początkową v_0 , to $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Jednym z ważnych zagadnień jest problem działania serii n impulsów Π w odstępach czasu θ (rys. 2.18). Obierając nową zmienną czasową $\tau = t - (n-1)\theta$, rozwiązanie układu tłumionego wynikające z działania ostatniego (pojedynczego) impulsu można dla $\tau > 0$ zapisać w postaci

$$q(\tau) = ae^{-\alpha\omega\tau} \sin \omega'\tau = a \cdot \text{Im } e^{(-\alpha\omega + i\omega')\tau}. \quad (2.81)$$



Rys. 2.18

Uwzględniając wpływ poprzednich impulsów, otrzymamy

$$q_n(\tau) = a \cdot \text{Im} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(-\alpha\omega + i\omega')(\tau + j\theta)}. \quad (2.82)$$

Wyrażenie pod znakiem sumy jest postępem geometrycznym; wykonanie sumowania daje rezultat

$$q_n(\tau) = a \cdot \text{Im} \left(\frac{1 - e^{(-\alpha\omega + i\omega')n\theta}}{1 - e^{(-\alpha\omega + i\omega')\theta}} \cdot e^{(-\alpha\omega + i\omega')\tau} \right). \quad (2.83)$$

Wykorzystując zależności

$$1 - e^{x+iy} = 1 - e^x \cos y - ie^x \sin y = \sqrt{1 - 2e^x \cos y + e^{2x}} \cdot e^{-i\phi},$$

$$\phi = \arctg [e^x \sin y / (1 - e^x \cos y)],$$

rozwiązanie (2.82) można ostatecznie doprowadzić do postaci

$$q_n(\tau) = v_n a e^{-\alpha\omega\tau} \sin(\omega'\tau - \phi_n + \phi_1), \quad (2.84)$$

gdzie ϕ_n, ϕ_1 dotyczą odpowiednio licznika i mianownika we wzorze (2.83), natomiast

$$v_n = \sqrt{\frac{1 - 2e^{-\alpha\omega n\theta} \cos \omega'n\theta + e^{-2\alpha\omega n\theta}}{1 - 2e^{-\alpha\omega\theta} \cos \omega'\theta + e^{-2\alpha\omega\theta}}}. \quad (2.85)$$

Wynik (2.84) ponownie opisuje pewne drgania swobodne układu, które w stosunku do (2.81) charakteryzują się pewnym przesunięciem fazowym, a przede wszystkim współczynnikiem krotności v_n wyrażonym przez wzór (2.85). W przypadku nieskończonej licznej serii mamy dla $n \rightarrow \infty$

$$v_\infty = (1 - 2e^{-\alpha\omega\theta} \cos \omega'\theta + e^{-2\alpha\omega\theta})^{-1/2} = (1 - 2e^{-\theta\lambda} \cos 2\pi\lambda + e^{-2\theta\lambda})^{-1/2}, \quad (2.86)$$

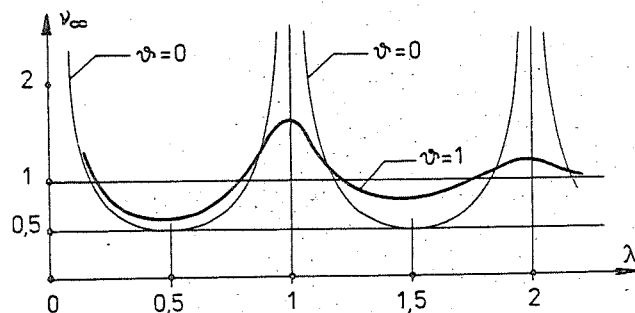
gdzie

$$\vartheta = \alpha \omega T', \quad \lambda = \theta/T'. \quad (2.87)$$

Z wzoru (2.85) wynika, że w przypadku serii ograniczonej

$$v_n = v_\infty(\lambda)/v_\infty(n\lambda). \quad (2.88)$$

Należy tu zwrócić uwagę na to, że działanie ograniczonej serii impulsów może w pewnych przypadkach dawać wyniki bardziej niekorzystne niż działanie serii nieskończenie licznej. Poglądowe wykresy funkcji $v_\infty(\lambda)$ są przedstawione na rys. 2.19. Linia cienką zaznaczono rozwiązanie z pominięciem tłumienia.



Rys. 2.19

Szczególnie prosty wynik otrzymuje się wtedy, gdy θ jest całkowitą wielokrotnością okresu drgań swobodnych (rezonans udarowy). W tym przypadku $\cos \omega' \theta = \cos 2\pi \lambda = 1$, a zatem

$$v_\infty = 1/(1 - e^{-\alpha \omega \theta}) = 1/(1 - e^{-\vartheta \lambda}), \quad (2.89)$$

przy czym najbardziej niekorzystne rezultaty daje tu zawsze seria nieskończenie liczna.

Jako kolejny przypadek wymuszania aperiodycznego rozpatrzmy uderzenie plastyczne (bez odskoku), przy którym siła wzbudzająca składa się z impulsu początkowego Π i trwale przyłożonej siły P . Sumując wyniki (2.72) i (2.79), otrzymamy

$$q(t) = \frac{1}{k}(P + \Pi \sin \omega t - P \cos \omega t), \quad (2.90)$$

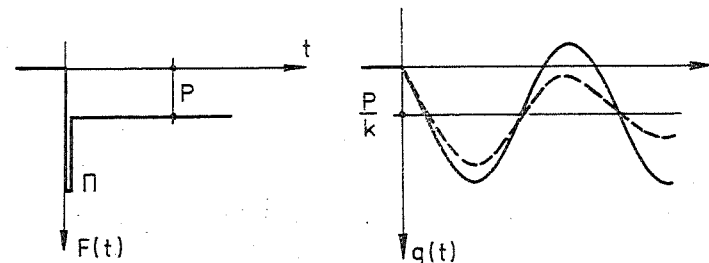
$$Q(t) = kq = P + \Pi \sin \omega t - P \cos \omega t,$$

$$\max Q = P + \sqrt{(\Pi \omega)^2 + P^2}.$$

Wykres siły wzbudzającej i przemieszczenia jest pokazany na rys. 2.20. Linia przerywaną zaznaczono charakter odpowiedzi w układzie tłu-

mionym. W przypadku uderzenia plastycznego masy m przez pionowo spadającą masę m_1 należy przyjąć $P = m_1 g$, $\Pi = m_1 v_1$, $\omega^2 = k/(m+m_1)$. Jeśli $v_1 = \sqrt{2gh}$, to

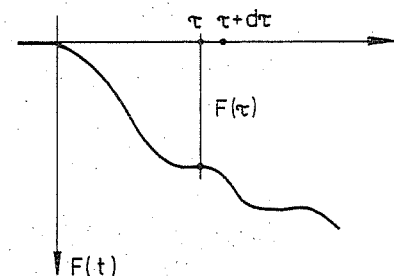
$$\max Q = m_1 g(1 + \sqrt{1 + 2\omega^2 h/g}). \quad (2.91)$$



Rys. 2.20

Rozważmy w końcu ogólny przypadek siły wzbudzającej w formie dowolnej całkowalnej funkcji czasu, jak na rys. 2.21. Siłę taką możemy myślowo podzielić na różniczkowe impulsy $d\Pi = F(\tau)d\tau$, a stąd zgodnie z (2.79)

$$\begin{aligned} dq &= \frac{d\Pi}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) = \\ &= \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.92)$$



Rys. 2.21

Przyjmując zerowe warunki początkowe, ostatecznie otrzymamy rozwiązanie w postaci całki Duhamela

$$q(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad (2.93)$$

$$Q(t) = kq = \omega \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

W przypadku układu tłumionego

$$q(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) e^{-\alpha \omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau. \quad (2.94)$$

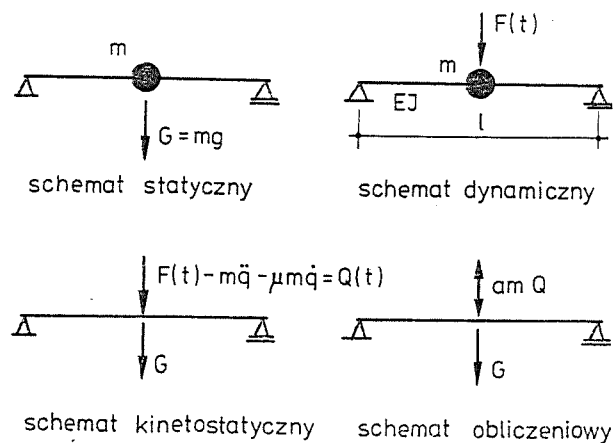
Może się zdarzyć, że funkcja $F(t)$ jest określona przez pomiar i nie ma formuły analitycznej. Rozwiązania typu (2.93) lub (2.94) moż-

na wówczas uzyskać obliczając numerycznie występujące tam całki. Na ogół wygodniej jest jednak bezpośrednio całkować numerycznie równanie ruchu (2.2).

2.10. Zasady projektowania. Zmęczenie

Prawidłowo zaprojektowana konstrukcja budowlana powinna się charakteryzować tym, że jej przemieszczenia są zawarte w granicach uznanych za dopuszczalne. Ograniczeniom mogą podlegać bądź tylko przemieszczenia statyczne, bądź łączne przemieszczenia statyczno-dynamiczne lub wyłącznie przemieszczenia czysto dynamiczne (np. w blokowych fundamentach pod maszyny). Stan przemieszczenia konstrukcji spowodowany obciążeniami dynamicznymi wynika wprost z rozwiązania równań ruchu.

Drugim kryterium poprawności konstrukcji jest określony poziom stanu wytężenia. Na pełny stan wytężenia konstrukcji składa się wytężenie statyczne wynikające z działania ciężaru własnego i statycznych obciążeń użytkowych oraz wytężenie dynamiczne. Stan dynamicznego wytężenia konstrukcji określa się metodami statyki budowli, przy czym zgodnie z zasadą d'Alemberta do obciążeń zalicza się siły wzbudzające, siły bezwładności i ewentualne opory ruchu, jeśli nadaje się im sens sił zewnętrznych. Siły te łącznie tworzą obciążenie kinetyczne $Q(t)$,



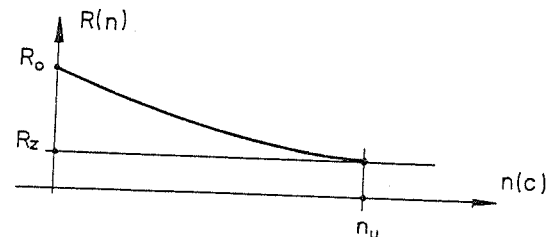
Rys. 2.22

przy czym z punktu widzenia projektowania istotne są ekstremalne wartości obciążenia kinetycznego. Idea przetworzenia statycznego i dynamicznego schematu konstrukcji na schemat obliczeniowy, przydatny do określenia stanu wytężenia, jest przedstawiona na rys. 2.22.

Przy kontroli naprężeń należy uwzględnić pewną właściwość materiałów, zwaną zmęczeniem. Liczne badania (započetkowane przez Wöhlera w XIX w.) wykazały, że w przypadku cyklicznie zmiennego stanu wytężenia podstawowa (statyczna) wytrzymałość materiału R_0 zmniejsza się w miarę wzrostu liczby cykli i przy pewnej umownej dużej ich liczbie osiąga wartość R_z , zwaną wytrzymałością zmęzeniową. Współczynnik

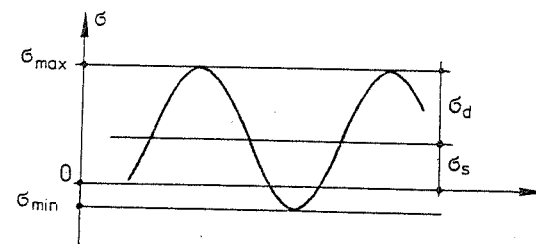
$$\zeta = R_0/R_z \quad (2.95)$$

nazywamy podstawowym współczynnikiem zmęzeniowym dla cyklu symetrycznego (rys. 2.23).



Rys. 2.23

W praktyce występują zwykle złożone stany naprężeń, statyczno-dynamiczne, charakteryzujące się asymetrią cyklu, jak na rys. 2.24.



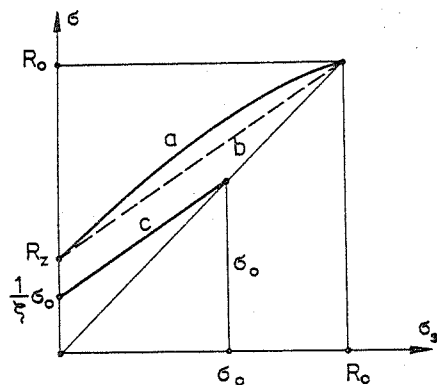
Rys. 2.24

W regularnym cyklu asymetrycznym możemy wyróżnić statyczny składnik naprężenia σ_s oraz amplitudę symetrycznego składnika dynamicznego σ_d

$$\sigma_s = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} + \sigma_{\min}|; \quad \sigma_d = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| \quad (2.96)$$

Zmianę wytrzymałości zmęzeniowej w zależności od udziału naprężeń statycznych w materiale o jednorodnych właściwościach ilustruje linia "a" na rys. 2.25. Zależność tę będziemy aproksymowali na korzyść

bezpieczeństwa odcinkiem prostym "b". Zmianę naprężenia dopuszczalnego ilustruje odcinek "c". Punkt szczytowy naprężenia dopuszczalnego jest na wysokości statycznego naprężenia dopuszczalnego σ_0 , w tym bowiem przypadku nie ma już miejsca



Rys. 2.25

na naprężenia dynamiczne, jako że $\sigma_s = \sigma_0$. Punkt początkowy linii "c" jest oparty na rzędnej $\sigma_0 R_z / R_0 = \sigma_0 / \zeta$ wynikającej z postulatu ustalonego współczynnika bezpieczeństwa; w tym przypadku $\sigma_s = 0$, co odpowiada cyklowi symetrycznemu. Odcinek "c" jest fragmentem linii prostej o równaniu

$$\sigma = \frac{1}{\zeta} \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \sigma_s, \quad (2.97)$$

a zatem warunek wytrzymałościowy ma postać

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_s + \sigma_d \leq \frac{1}{\zeta} \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \sigma_s. \quad (2.98)$$

Po przekształceniu tej nierówności otrzymuje się praktycznie przydatną relację

$$\sigma_s + \zeta \sigma_d \leq \sigma_0, \quad (2.99)$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem dopuszczalnym w warunkach statycznych, bez uwzględnienia zmęczenia. W myśl relacji (2.99) uwzględnienie zmęczenia polega na wprowadzeniu do elementarnego warunku wytrzymałościowego pozornie zwiększonych naprężeń dynamicznych.

Mnożąc relację (2.99) przez $|\sigma|_{\max} = \sigma_s + \sigma_d$ oraz dzieląc ją jednocześnie przez $\sigma_s + \zeta \sigma_d$, dochodzimy do nieco innego, ale ekwiwalentnego warunku wytrzymałościowego

$$|\sigma|_{\max} \leq \sigma_0 / \zeta_r, \quad (2.100)$$

gdzie

$$\zeta_r = \frac{\sigma_s + \zeta \sigma_d}{\sigma_s + \sigma_d}, \quad 1 \leq \zeta_r \leq \zeta, \quad (2.101)$$

jest zredukowanym współczynnikiem zmęczeniowym, uwzględniającym asymetrię cyklu. Relację (2.100) można dobrze zinterpretować fizycznie, występująca tam bowiem po prawej stronie wielkość σ_0 / ζ_r jest aktualnym w danych warunkach naprężeniem dopuszczalnym z uwzględnieniem zmęczenia przy określonej asymetrii cyklu.

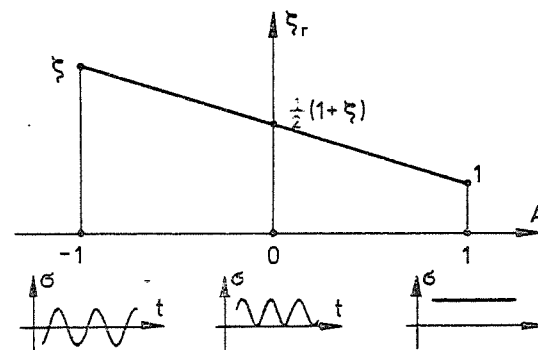
W praktyce operuje się często współczynnikiem asymetrii cyklu

$$\Delta = (\sigma_s - \sigma_d) / (\sigma_s + \sigma_d), \quad -1 \leq \Delta \leq 1. \quad (2.102)$$

Wtedy

$$\zeta_r = \frac{1}{2}(\zeta + 1) - \frac{1}{2}(\zeta - 1)\Delta. \quad (2.103)$$

Zależność zredukowanego współczynnika zmęczeniowego od współczynnika asymetrii cyklu jest przedstawiona na rys. 2.26.



Rys. 2.26

Podstawowy współczynnik zmęczeniowy można przedstawić w postaci iloczynu

$$\zeta = \zeta_m \zeta_k, \quad (2.104)$$

gdzie ζ_m zależy od cech samego materiału, natomiast $\zeta_k > 1$ jest współczynnikiem karbu, uwzględniającym kształt elementu, rodzaj obróbki, rodzaj połączenia itp.

Przedstawiony zarys teorii wytrzymałości zmęczeniowej jest jedynie uproszczonym opisem problemu, będącego jednym z bardziej złożonych i trudnych do rozstrzygnięcia zagadnień wytrzymałości dynamicznej. Szczegółowe sposoby wyznaczania współczynników zmęczeniowych są określone przez stosowne przepisy normowe.

2.11. Drgania wymuszone siłami losowymi

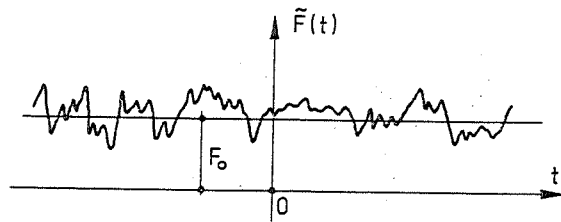
Analizując drgania wymuszone mieliśmy na myśli układy o zdeterminowanych parametrach własnych, poddane działaniu sił wzbudzących określonych zdeterminowanymi funkcjami czasu. Wyniki uzyskane na podstawie tych założeń są oczywiście także zdeterminowane. Jeśli analizu-

Jemy konkretny obiekt, to jego parametry mogą być na ogół zidentyfikowane, siła wzbudzająca natomiast w niektórych przypadkach nie może być określona w formie zdeterminowanej funkcji czasu i należy ją traktować jako funkcję losową (proces stochastyczny). W szczególnym przypadku siła ta zgodnie z wzorem (2.54) może reprezentować losowe wymuszenie kinematyczne.

Rozważmy równanie ruchu

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = \tilde{F}(t), \quad (2.105)$$

w którym siła wzbudzająca $\tilde{F}(t)$ jest procesem stochastycznym - stacjonarnym i ergodycznym (rys. 2.27). Oznacza to, że charakterystyki probabilistyczne procesu nie zależą od położenia punktu zerowego na osi czasu oraz że znajomość pewnej pojedynczej realizacji procesu w dostatecznie dużym przedziale czasu pozwala wyznaczyć charakterystyki repre-



Rys. 2.27

zentatywne dla danego procesu. Funkcje $\tilde{F}(t)$ i $\tilde{q}(t)$ możemy przedstawić w postaci

$$\tilde{F}(t) = F_0 + F(t), \quad \tilde{q}(t) = q_0 + q(t), \quad (2.106)$$

gdzie

$$F_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{F}(t) dt \quad (2.107)$$

jest wartością przeciętną procesu \tilde{F} , natomiast $F(t) = \tilde{F}(t) - F_0$ jest procesem stochastycznym o zerowej wartości przeciętnej. Odpowiedzią układu na ustalone w nieograniczonym czasie wymuszenie F_0 jest

$$q_0 = F_0/k, \quad (2.108)$$

jak w przypadku obciążenia statycznego. Odpowiednie obciążenie kinetyczne $Q_0 = kq_0 = F_0$. W dalszym ciągu możemy analizować równanie

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t) \quad (2.109)$$

z wymuszeniem o zerowej wartości przeciętnej.

Najważniejszą charakterystyką probabilistyczną procesu stochastycznego $F(t)$ jest odpowiadająca mu funkcja korelacyjna

$$K_F(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t) F(t+\tau) dt. \quad (2.110)$$

Jest to funkcja parzysta, bezwzględnie nie większa od wartości w zerze, a więc

$$K(\tau) = K(-\tau), \quad |K(\tau)| \leq K(0). \quad (2.111)$$

W punkcie $\tau = 0$ funkcja korelacyjna przyjmuje wartość wariancji procesu $F(t)$

$$K_F(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F^2(t) dt = \sigma^2(F). \quad (2.112)$$

Transformatę całkową Fouriera funkcji korelacyjnej $K_F(\tau)$

$$S_F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_F(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_F(\tau) \cos \lambda\tau d\tau \quad (2.113)$$

nazywamy gęstością widmową (spektralną) procesu $F(t)$. Jest to nieujemna funkcja parzysta o ograniczonej całce, a więc

$$S(\lambda) \geq 0, \quad S(\lambda) = S(-\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.114)$$

Parametr λ ma wymiar częstości kołowej.

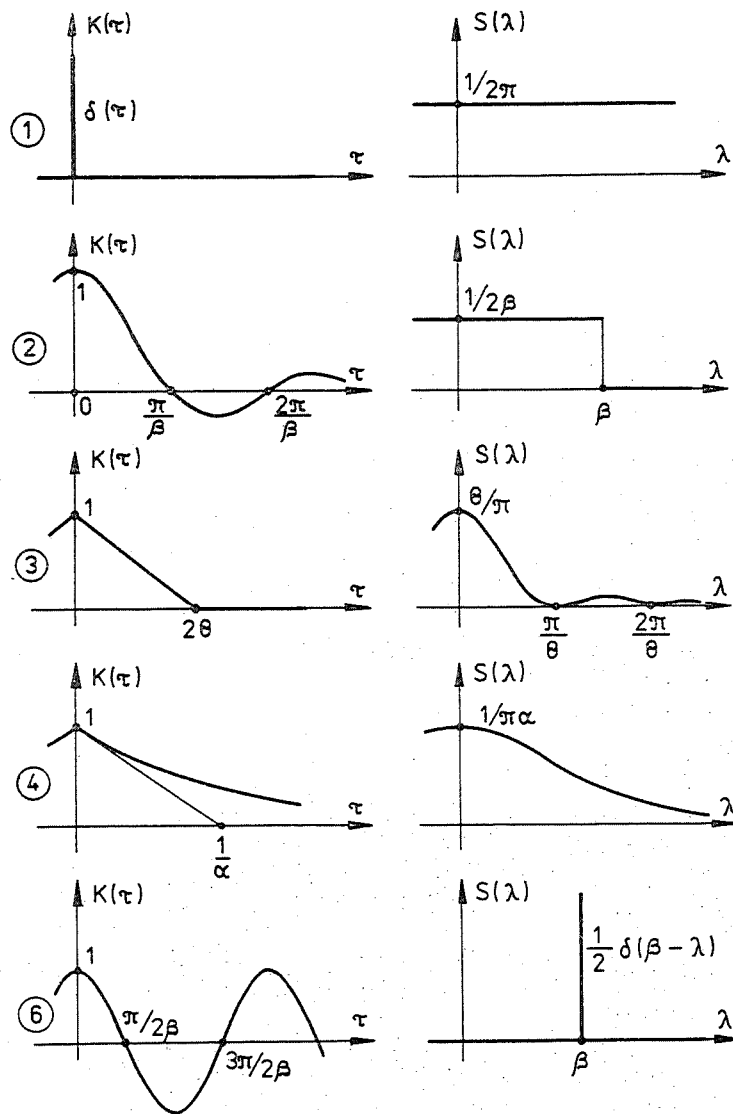
Transformacja odwrotna do (2.113) ma postać

$$K_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda = 2 \int_0^{\infty} S_F(\lambda) \cos \lambda\tau d\lambda. \quad (2.115)$$

Z (2.115) wynika, że wariancja procesu $F(t)$ może być również wyrażona wzorem

$$\sigma^2(F) = K_F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\lambda) d\lambda = 2 \int_0^{\infty} S_F(\lambda) d\lambda. \quad (2.116)$$

Funkcje korelacyjne procesów rzeczywistych aproksymuje się zwykle pewnymi typowymi formułami analitycznymi. Przykłady formuł funkcji korelacyjnych i odpowiadających im gęstości widmowych podano w tab.2.2, a niektóre wykresy - na rys. 2.28. Parametry α, β, θ są tu dowolnymi liczbami dodatnimi. Symbol $\delta(\tau)$ oznacza dystrybucję Diraca. Przypadek 1 odpowiada procesowi całkowicie nieskorelowanemu (tzw. białemu szumowi praktycznie możliwemu tylko w sensie asymptotycznym). Przypa-



Rys. 2.28

dek 2 jest opisem białego szumu z odcięciem widma dla $|\lambda| > \beta$. Przypadek 6 odpowiada procesowi harmonicznemu o zdeterminowanej częstotliwości kołowej β .

Tabela 2.2

Funkcje korelacji i gęstości widmowe

| Nr | $K(\tau)$ | $S(\lambda)$ |
|----|--|--|
| 1 | $\delta(\tau)$ | $1/2\pi$ |
| 2 | $\frac{1}{\beta\tau} \sin \beta\tau$ | $1/2\beta$ dla $ \lambda \leq \beta$ 0 dla $ \lambda > \beta$ |
| 3 | $1 - \tau /2\theta$ dla $ \tau \leq 2\theta$ 0 dla $ \tau > 2\theta$ | $\frac{\theta}{\pi} \left(\frac{\sin \theta \lambda}{\theta \lambda} \right)^2$ |
| 4 | $e^{-\alpha \tau }$ | $\frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$ |
| 5 | $e^{-\alpha \tau } \cos \beta\tau$ | $\frac{\pi}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2}{(\alpha^2 + \beta^2 - \lambda^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}$ |
| 6 | $\cos \beta\tau$ | $\frac{1}{2} \delta(\beta - \lambda)$ |

Zgodnie z wzorem (2.94), przy założeniu nieograniczonej rozległości procesu w czasie, można napisać

$$q(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau) r(t-\tau) d\tau,$$

$$r(t-\tau) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau),$$

lub po podstawieniu $t - \tau = x$

$$q(t) = \int_0^\infty K(t-x) r(x) dx. \quad (2.117)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
 K_q(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T q(t) q(t+\tau) dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^\infty \int_0^\infty K(t-x_1) K(t-x_2+\tau) r(x_1) r(x_2) dx_1 dx_2 dt = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty K_F(\tau+x_1-x_2) r(x_1) r(x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

Z kolei na podstawie (2.115)

$$K_q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda, \quad (2.119)$$

$$K_F(\tau+x_1-x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\lambda) e^{i\lambda(\tau+x_1-x_2)} d\lambda.$$

Relacje (2.119) należy podstawić do (2.118). Równość będzie spełniona, jeśli równe sobie będą funkcje podcałkowe względem λ . Po wykonaniu obustronnego mnożenia przez $e^{-i\lambda\tau}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} S_q(\lambda) &= S_F(\lambda) \cdot \int_0^{\infty} r(x_1) e^{i\lambda x_1} dx_1 \cdot \int_0^{\infty} r(x_2) e^{-i\lambda x_2} dx_2 = \\ &= S_F(\lambda) R(i\lambda) R(-i\lambda), \end{aligned} \quad (2.120)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R(i\lambda) &= \int_0^{\infty} r(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{m\omega} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha\omega - i\lambda)x} \sin \omega' x dx = \\ &= \frac{1}{m(\omega^2 - \lambda^2 - i\gamma\omega\lambda)} = \frac{\omega^2}{k(\omega^2 - \lambda^2 - i\gamma\omega\lambda)}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$R(i\lambda) \cdot R(-i\lambda) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\gamma\omega\lambda)^2}.$$

Wobec tego gęstość widmowa procesu $q(t)$

$$S_q(\lambda) = k^{-2} V_q(\lambda) S_F(\lambda), \quad (2.122)$$

gdzie

$$V_q(\lambda) = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\gamma\omega\lambda)^2} \quad (2.123)$$

natomiast wariancja tego procesu

$$\sigma^2(q) = 2k^{-2} \int_0^{\infty} V_q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda. \quad (2.124)$$

W teorii procesów stochastycznych dowodzi się, że jeżeli pewna funkcja losowa $Z(t)$ jest liniowym przekształceniem różniczkowym funkcji $q(t)$,

$$Z(t) = L(d/dt) \cdot q(t), \quad (2.125)$$

gdzie L jest wielomianem operatora d/dt o stałych współczynnikach, to gęstość widmowa procesu $Z(t)$

$$S_Z(\lambda) = |L(i\lambda)|^2 S_q(\lambda). \quad (2.126)$$

Jeżeli interesującą nas funkcją jest np. obciążenie kinetyczne zdefiniowane wzorem

$$Q(t) = kq + c\dot{q} = (k + c \frac{d}{dt})q, \quad (2.127)$$

to $L(i\lambda) = k + i\lambda c$, a zatem

$$\begin{aligned} S_Q(\lambda) &= (k^2 + c^2\lambda^2) S_q(\lambda) = \\ &= (1 + \gamma^2\lambda^2/\omega^2) V_q(\lambda) S_F(\lambda) = V_Q(\lambda) S_F(\lambda), \end{aligned} \quad (2.128)$$

gdzie

$$V_Q(\lambda) = \frac{\omega^4 + (\gamma\omega\lambda)^2}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\gamma\omega\lambda)^2} \quad (2.129)$$

Wariancja procesu $Q(t)$

$$\sigma^2(Q) = 2 \int_0^{\infty} V_Q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda. \quad (2.130)$$

Konfrontując wzór (2.116) z wzorami (2.124) i (2.130) widzimy, że w tych ostatnich pod znakiem całki pojawiają się bezwymiarowe funkcje wagi V_q oraz V_Q . Wprowadzając podstawienie $\lambda/\omega = \eta$, otrzymuje się $V_q = (v)^2$ oraz $V_Q = (v')^2$, co pozwala wyobrazić sobie kształty funkcji wagi na podstawie rys. 2.6. Jak widać, funkcje wagi spełniają rolę filtrów przy przekształcaniu widma procesu wejściowego na wariancje wielkości wyjściowych. Wzmocnieniu podlegają komponenty wymuszenia $F(t)$, których reprezentacją jest obszar widma w przedziale $0 < \lambda < \sqrt{2}\omega$ ze szczególnym uwzględnieniem punktu rezonansu $\lambda = \omega$. wartości liczbowe całek typu (2.124) i (2.130) można obliczać numerycznie w dostatecznie dużym przedziale skończonym ze względu na szybkie zanikanie funkcji wagi dla $\lambda > \sqrt{2}\omega$. W badaniu skutków wymuszenia o charakterze białego szumu mogą być przydatne wyniki

$$2 \int_0^{\infty} V_q(\lambda) d\lambda = \pi\omega/\gamma, \quad 2 \int_0^{\infty} V_Q(\lambda) d\lambda = \pi\omega(1+\gamma^2)/\gamma. \quad (2.131)$$

Znając wariancje rozwiązań, można już łatwo obliczyć prawdopodobieństwo utrzymania się rozwiązań w określonych granicach. Jeśli rozważane procesy są normalne (gaussowskie), to prawdopodobieństwo tego, że bezwzględne wychylenie nie przekroczy wartości $\xi \cdot \sigma(q)$, wynosi

$$\mathcal{P}\{|q| \leq \xi \cdot \sigma(q)\} = \Phi(\xi), \quad (2.132)$$

gdzie

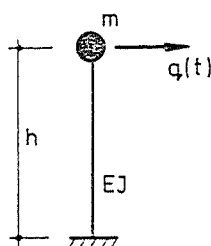
$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2/2} dx \quad (2.133)$$

jest całką prawdopodobieństwa. Wielkość σ , równą pierwiastkowi wariancji, nazywamy odchyleniem standardowym. Wzór analogiczny do (2.132) dotyczy również wielkości Q .

2.12. Przykłady liczbowe

PRZYKŁAD 2.12.1

Wyznaczyć charakterystyki giętych drgań własnych słupa o schemacie jak na rys. 2.29. Dane jest $m = 850 \text{ kg}$, $EJ = (12E6)^3 \text{ Nm}^2$, $h = 4 \text{ m}$.



Rys. 2.29

R o z w i ą z a n i e

Sztywność układu w kierunku współrzędnej uogólnionej

$$k = 3 EJ/h^3 = 3 \cdot (12E6)^3 : 4^3 = 562500 \text{ N/m}.$$

Częstość kołowa drgań własnych

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{562500 : 850} = 25,725 \text{ rad/s}.$$

Częstość fizyczna

$$f = 0,159 \cdot 25,725 = 4,09 \text{ Hz}.$$

Częstość techniczna

$$n = 9,55 \cdot 25,725 = 245,67 \text{ c/min}.$$

Okres drgań własnych

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi : 25,725 = 0,244 \text{ s}.$$

PRZYKŁAD 2.12.2

Z pomiarów wynika, że po dwudziestu cyklach amplituda drgań swobodnych zmniejszyła się dziesięciokrotnie w stosunku do amplitudy początkowej. Wyznaczyć parametry tłumienia oraz obliczyć, po ilu cyklach amplituda zmniejszy się tysiąckrotnie (co praktycznie oznacza całkowity zanik drgań).

R o z w i ą z a n i e

Na podstawie wzoru (2.16) obliczymy logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\delta = \frac{1}{20} \ln(10/1) = 0,115,$$

a zatem liczba tłumienia

$$\alpha \approx 0,115 : (2\pi) = 0,0183,$$

$$(12E6) = 12 \cdot 10^6 = 12\,000\,000.$$

bezwymiarowy współczynnik tłumienia

$$\gamma = 2 \cdot 0,0183 = 0,0366,$$

fazowy parametr tłumienia

$$\beta = \arcsin(0,0183) = 0,0183 \text{ rad}.$$

Odpowiedź na drugie pytanie otrzymamy również na podstawie wzoru (2.16), pisząc

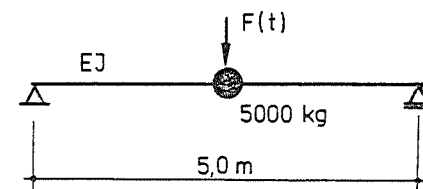
$$0,0115 = \frac{1}{n} \ln(1000/1) = 6,908 : n.$$

Stąd liczba cykli, przy której amplituda drgań zmniejszy się tysiąckrotnie, wynosi

$$n = 6,908 : 0,0115 \approx 60 \text{ c}.$$

PRZYKŁAD 2.12.3

Urządzenie o masie 5000 kg, charakteryzujące się momentem niewyważenia 2 kgm i pracujące z częstością techniczną 220 c/min, należy ustawić na stalowej konstrukcji wsporczej w formie swobodnie podpartej belki o rozpiętości 5 m, złożonej z dwóch stalowych dźwigarów dwuteowych (rys. 2.30). Naprężenie dopuszczalne dla stali wynosi 150 MPa, współczynnik zmęczenia $\zeta = 3$, współczynnik tłumienia $\gamma = 0,02$, moduł sprężystości = 206 000 MPa. Masę własną konstrukcji wsporczej pominąć.



Rys. 2.30

R o z w i ą z a n i e

Moment gnący w warunkach statycznych

$$M_g = 0,25 \cdot 5000 \cdot 9,81 \cdot 5 = 61312 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Potrzebny wskaźnik wytrzymałości

$$W = 61312 : (150E6) = (409E-6) \text{ m}^3 = 409 \text{ cm}^3.$$

Przyjmujemy wstępnie dźwigary 2 I 200, $W = 428 \text{ cm}^3$, $J = 4280 \text{ cm}^4$.

$$EJ = (206000E6) \cdot (4280E-8) = 8816800 \text{ N}\cdot\text{m}^2.$$

$$k = 48 \cdot 8816800 : 5^3 = 3385651 \text{ N/m},$$

$$\omega = \sqrt{3385651 : 5000} = 26,02 \text{ rad/s},$$

$$p = 0,1047 \cdot 220 = 23,03 \text{ rad/s},$$

$$\eta = 23,03 : 26,02 = 0,885 < 1 \text{ (wysokie strojenie)},$$

$$v' = \sqrt{1+0,02^2 \cdot 0,885^2} : \sqrt{(1-0,885^2)^2 + 0,02^2 \cdot 0,885^2} = 4,598,$$

$$F_0 = 2 \cdot 23,03^2 = 1061 \text{ N},$$

$$\text{am } Q = 4,598 \cdot 1061 = 4878 \text{ N},$$

$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 4878 \cdot 5 = 79604 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\sigma = 79604 : (428 \text{E}-6) = (186 \text{E}6) \text{ Pa} = 186 \text{ MPa} > 150 \text{ MPa}.$$

Przyjmujemy w drugim przybliżeniu dźwigary 2 I 220, $W = 556 \text{ cm}^3$,

$$J = 6120 \text{ cm}^4.$$

$$EJ = (206000 \text{E}6) \cdot (6120 \text{E}-8) = 12607200 \text{ Nm}^2,$$

$$k = 48 \cdot 12607200 : 5^3 = 4841165 \text{ N/m},$$

$$\omega = \sqrt{4841165 : 5000} = 31,12 \text{ rad/s},$$

$$\eta = 23,03 : 31,12 = 0,740 < 1 \quad (\text{wysokie strojenie}),$$

$$v' = \sqrt{1+0,02^2 \cdot 0,74^2} : \sqrt{(1-0,74^2)^2 + 0,02^2 \cdot 0,74^2} = 2,209,$$

$$\text{am } Q = 2,209 \cdot 1061 = 2344 \text{ N},$$

$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 2344 \cdot 5 = 70102 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\sigma = 70102 : (556 \text{E}-6) = (126 \text{E}6) \text{ Pa} = 126 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa}.$$

Przekrój dźwigarów 2 I 220 jest wystarczający.

PRZYKŁAD 2.12.4.

Poprzednie zadanie rozwiązać przy częstotliwości wzbudzenia 320 c/min.

R o z w i ą z a n i e

Przyjmujemy wstępnie dźwigary 2 I 220, $W = 556 \text{ cm}^3$, $\omega = 31,12 \text{ rad/s}$, $p = 0,1047 \cdot 320 = 33,5 \text{ rad/s} > \omega$ (niskie strojenie). Sprawdzamy wyężenie w rezonansie przejściowym z pominięciem wpływu przyspieszenia fazy.

$$v' = \sqrt{1+0,02^2} : 0,02 = 50,$$

$$F_0 = 2 \cdot 31,12^2 = 1937 \text{ N},$$

$$\text{am } Q = 50 \cdot 1937 = 96850 \text{ N},$$

$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 96850 \cdot 5 = 424500 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\sigma = 424500 : (556 \text{E}-6) = (763 \text{E}6) \text{ Pa} = 763 \text{ MPa} \gg 150 \text{ MPa}.$$

Przyjmujemy w następnym przybliżeniu 2 I 260, $W = 884 \text{ cm}^3$,

$$J = 11480 \text{ cm}^4,$$

$$EJ = (206000 \text{E}6) \cdot (11480 \text{E}-8) = 23648800 \text{ Nm}^2,$$

$$k = 48 \cdot 23648800 : 5^3 = 9081139 \text{ N/m},$$

$$\omega = \sqrt{9081139 : 5000} = 42,62 \text{ rad/s},$$

$$\eta = 33,5 : 42,62 = 0,786 < 1 \quad (\text{wysokie strojenie}),$$

$$v' = \sqrt{1+0,02^2 \cdot 0,786^2} : \sqrt{(1-0,786^2)^2 + 0,02^2 \cdot 0,786^2} = 2,615,$$

$$F_0 = 2 \cdot 33,5^2 = 2244 \text{ N},$$

$$\text{am } Q = 2,615 \cdot 2244 = 5868 \text{ N},$$

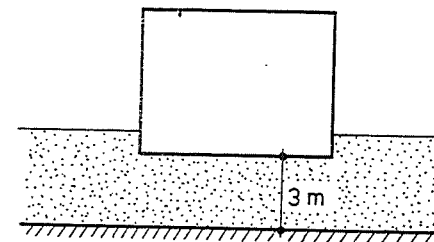
$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 5868 \cdot 5 = 83317 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\sigma = 83317 : (884 \text{E}-6) = (94,3 \text{E}6) \text{ Pa} = 94,3 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa}.$$

Przekrój dźwigarów 2 I 260 jest wystarczający.

PRZYKŁAD 2.12.5

Budynek jest posadowiony na warstwie piasku o grubości 3 m i module ścisłości 120 MPa. Pod piaskiem jest lita skała (rys. 2.31).



Rys. 2.31

Napężenie statyczne na grunt wynosi 0,2 MPa. Podczas propagacji powierzchniowej fali sejsmicznej podłoże osiąga amplitudy pionowe $A = 100 \mu\text{m}$ przy częstotliwości 6 Hz. Wyznaczyć przemieszczenia pionowe budynku i napężenia na grunt z uwzględnieniem wpływów dynamicznych, przyjmując $\gamma = 0,10$.

R o z w i ą z a n i e

Zadanie rozwiążemy rozpatrując stan na jednostkę powierzchni fundamentu.

$$k = (120 \text{E}6) : 3 = (4 \text{E}7) \text{ N/m}^3,$$

$$m = (0,2 \text{E}6) : 9,81 = 20387 \text{ kg/m}^2,$$

$$\omega = \sqrt{(4 \text{E}7) : 20387} = 44,29 \text{ rad/s},$$

$$p = 6,283 \cdot 6 = 37,70 \text{ rad/s},$$

$$\eta = 37,70 : 44,29 = 0,851 < 1 \quad (\text{wysokie strojenie}),$$

$$v' = \sqrt{1+0,1^2 \cdot 0,851^2} : \sqrt{(1-0,851^2)^2 + 0,1^2 \cdot 0,851^2} = 3,477.$$

Bez względu na przemieszczenie budynku według (2.69)

$$\text{am}(z + q) = 3,477 \cdot 100 = 348 \mu\text{m}.$$

Obciążenie kinetyczne według (2.65)

$$\text{am } Q = 3,477 \cdot 0,851^2 \cdot (4 \text{E}7) \cdot (100 \text{E}-6) = 10072 \text{ N/m}^2 = 0,01 \text{ MPa}.$$

Łączne największe napężenie na grunt

$$\sigma = 0,2 + 0,01 = 0,21 \text{ MPa}.$$

PRZYKŁAD 2.12.6

Układ o masie 1000 kg jest poddany działaniu długiej serii sprężystych uderzeń masą 100 kg wolno spadającą z wysokości 2 m. Współczynnik sprężystości uderzenia wynosi 0,6, współczynnik tłumienia $\gamma = 0,04$, sztywność układu - 2 MN/m. Odstęp czasowy impulsów wynosi około 0,5 s. Wyznaczyć impuls uderzenia oraz obciążenie kinetyczne w najniekorzystniejszym przypadku.

R o z w i ą z a n i e

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 6,246 \text{ m/s},$$

$$\Pi = (1+0,6) \cdot 6,246 \cdot 1000 \cdot 100 : (1000+100) = 911 \text{ Ns},$$

$$\omega = \sqrt{(2E6) : 1000} = 44,72 \text{ rad/s},$$

$$\text{am } Q_1 = 911 \cdot 44,72 = 40740 \text{ N},$$

$$\alpha = 0,5 \cdot 0,04 = 0,02,$$

$$\alpha \omega \theta = 0,02 \cdot 44,72 \cdot 0,5 = 0,4472.$$

W najbardziej niekorzystnym przypadku według (2.89)

$$\text{am } Q_\infty = 40740 : (1 - e^{-0,4472}) = 112983 \text{ N}.$$

PRZYKŁAD 2.12.7

Na obiekt o masie 4000 kg i sztywności 650000 N/m spada masa 1500 kg (bez odskoku) z wysokości 1,2 m. Wyznaczyć obciążenie obiektu przed uderzeniem, podczas uderzenia i po uderzeniu.

R o z w i ą z a n i e

$$\omega^2 = 650000 : (4000+1500) = 118 \text{ (rad/s)}^2.$$

Obciążenie kinetyczne podczas uderzenia według (2.91)

$$\max Q = 1500 \cdot 9,81 \cdot (1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 118 \cdot 1,2 : 9,81}) = 95136 \text{ N}.$$

Obciążenie obiektu przed uderzeniem

$$Q_0 = 4000 \cdot 9,81 = 39240 \text{ N}.$$

Obciążenie obiektu podczas uderzenia

$$Q_1 = 39240 + 95136 = 134376 \text{ N}.$$

Obciążenie obiektu po uderzeniu

$$Q_2 = 39240 + 1500 \cdot 9,81 = 53955 \text{ N}.$$

PRZYKŁAD 2.12.8

Układ o masie 4000 kg i sztywności 1 MN/m jest obciążony siłą losowo zmienną o zerowej wartości przeciętnej i o wariancji $\sigma^2(F) = 900 \text{ N}^2$. Gęstość widmowa wzbudzenia jest białym szumem z ograniczeniem $|\lambda| \leq 30 \text{ rad/s}$. Współczynnik tłumienia $\gamma = 0,04$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przemieszczenie układu nie przekroczy normy 200 μm , a obciążenie kinetyczne - normy 300 N.

R o z w i ą z a n i e

$$\omega = \sqrt{(1E6) : 4000} = 15,81 \text{ rad/s},$$

$$\sqrt{2}\omega = \sqrt{2} \cdot 15,81 = 23,36 \text{ rad/s} < 30 \text{ rad/s}.$$

Gęstość widmowa wzbudzenia według tab. 2.2, poz. 2

$$S_F(\lambda) = \begin{cases} 900 : (2 \cdot 30) = 15 \text{ N}^2\text{s} & \text{dla } |\lambda| \leq 30 \text{ rad/s}, \\ 0 & \text{dla } |\lambda| > 30 \text{ rad/s}. \end{cases}$$

Wariancja przemieszczenia

$$\begin{aligned} \sigma^2(q) &= 2 k^{-2} \int_0^\infty v_q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda \approx k^{-2} S_F(0) \cdot 2 \int_0^\infty v_q(\lambda) d\lambda = \\ &= k^{-2} S_F(0) \cdot \pi \omega / \gamma = (1E6)^{-2} \cdot 15 \cdot \pi \cdot 15,81 : 0,04 = (1,86E-8) \text{ m}^2; \end{aligned}$$

odchylenie standardowe przemieszczenia

$$\sigma(q) = \sqrt{(1,86E-8)} = (1,365E-4) \text{ m} = 136 \mu\text{m}.$$

Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia normy przemieszczeń

$$\mathcal{P}\{|q| \leq 200\} = \Phi(200 : 136) = 0,8584.$$

Wariancja obciążenia kinetycznego

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q) &= 2 \int_0^\infty v_Q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda \approx S_F(0) \cdot 2 \int_0^\infty v_Q(\lambda) d\lambda = S_F(0) \cdot \pi \omega (1 + \gamma^2) / \gamma = \\ &= 15 \cdot \pi \cdot 15,81 \cdot (1 + 0,04^2) : 0,04 = 18656 \text{ N}^2. \end{aligned}$$

Odchylenie standardowe obciążenia kinetycznego

$$\sigma(Q) = \sqrt{18656} = 137 \text{ N}.$$

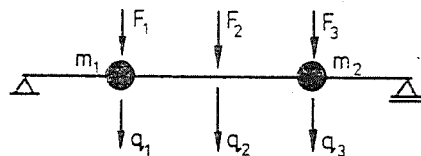
Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia normy obciążenia

$$\mathcal{P}\{|Q| \leq 300\} = \Phi(300 : 137) = 0,9714.$$

3. UKŁADY DISKRETNE

3.1. Równanie ruchu

W analizie dynamicznej układów dyskretnych operujemy trzema rodzajami współrzędnych. Współrzędne zewnętrzne (np. kartezjańskie x_1, x_2) służą do opisu konfiguracji obiektu w położeniu równowagi statycznej. Współrzędne lokalne u_j , zależne od czasu, opisują wychylenie elementów obiektu z położenia równowagi statycznej. Współrzędne uogólnione Lagrange'a q_i , zależne od czasu, są zbiorem niezależnych informacji geometrycznych, za pomocą których można wyrazić wszystkie przemieszczenia lokalne. Liczba współrzędnych uogólnionych n nie może być mniejsza od liczby dynamicznych stopni swobody d . Na ogół przyjmuje się współrzędne uogólnione zgodnie z dynamicznymi stopniami swobody,



Rys. 3.1

układ ma dwa dynamiczne stopnie swobody.

W przypadku małych organów współrzędne lokalne są liniową transformacją współrzędnych uogólnionych, przy czym współczynniki transformacji zależą wyłącznie od konfiguracji obiektu. Przykład transformacji współrzędnych w układzie płaskim przedstawiono na rys. 3.2. Spełniona jest tu relacja macierzowa

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

lub krócej

$$\bar{u} = A \bar{q}. \quad (3.2)$$

Załóżmy, że stan przemieszczenia mas w badanym układzie jest opisany zbiorem współrzędnych lokalnych tworzących wektor

$$\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, \dots]^T. \quad (3.3)$$

Zbiorowi temu przyporządkowujemy zbiór mas (mas sensu stricto lub masowych momentów bezwładności $m_j = J_j^m$, stosownie do rodzaju współrzędnej lokalnej - translacyjnej lub rotacyjnej), uporządkowany w macierz diagonalną

$$\{m\} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, \dots). \quad (3.4)$$

Energia kinetyczna układu wyrazi się wzorem

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{u}_j^2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{u}}^T \{m\} \dot{\bar{u}}, \quad (3.5)$$

przy czym wzór ten jest słuszny, gdy współrzędne lokalne są zredukowane do środków rozważanych mas, a współrzędne translacyjne są ortokartezjańskie. Jeśli dla zwioku mas jest określona transformacja współrzędnych $\bar{u} = A_m \bar{q}$, to

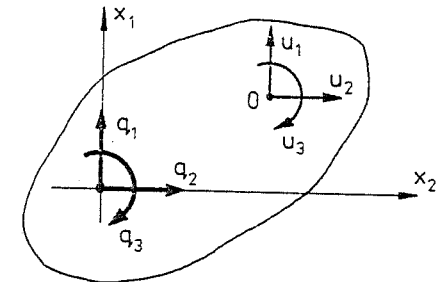
$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T A_m^T \{m\} A_m \dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T B \dot{\bar{q}}. \quad (3.6)$$

Energia kinetyczna jest formą kwadratową prędkości uogólnionych; jądrem tej formy jest kwadratowa symetryczna macierz bezwładności B . Na przykład dla $n = 3$ otrzymujemy ogólnie

$$E_k = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + b_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2^2 + b_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + b_{31} \dot{q}_3 \dot{q}_1 + b_{32} \dot{q}_3 \dot{q}_2 + b_{33} \dot{q}_3^2), \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad (3.7)$$

oraz

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$



Rys. 3.2

Z konfrontacji wzorów (3.7) i (3.8) wynika związek między strukturą formy kwadratowej a strukturą jej macierzowego jądra. Elementy b_{ij} dla $i \neq j$ nazywamy współczynnikami sprzężenia bezwzględnościowego. W bazie minimalnej, a więc gdy $n = d$, macierz B jest nieosobliwa i dodatnio określona; $\det B > 0$. Jeśli zaś $n > d$, to macierz B jest określona nieujemnie i jest osobliwa; $\det B = 0$.

Zakładamy dalej, że w układzie znajdują się więzy sprężyste o sztywnościach k_j , uporządkowanych w macierz diagonalną

$$\{k\} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3, \dots) \quad (3.9)$$

z którymi są skojarzone współrzędne lokalne u_j , będące wynikiem transformacji $\bar{u} = A_k \bar{q}$. Energia potencjalna odkształcenia wyrazi się wzorem

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \sum_j k_j u_j^2 = \frac{1}{2} \bar{u}^T \{k\} \bar{u} = \\ &= \frac{1}{2} \bar{q}^T A_k^T \{k\} A_k \bar{q} = \frac{1}{2} \bar{q}^T K \bar{q} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Jest to forma kwadratowa przemieszczeń uogólnionych; jądrem tej formy jest kwadratowa symetryczna macierz sztywności K . Elementy k_{ij} dla $i \neq j$ nazywamy współczynnikami sprzężenia statycznego. Jeśli postać równowagi jest zachowawcza, to macierz sztywności jest nieosobliwa i dodatnio określona; $\det K > 0$. Macierzą odwrotną do K jest macierz podatności $D = K^{-1}$. Jeśli współrzędne uogólnione są niesprzeczne z ograniczeniami kinematycznymi, to również $\det D > 0$. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że wymienione warunki są spełnione.

Ustrój może zawierać tłumiki viskozyczne o parametrach c_j , uporządkowanych w macierz diagonalną

$$\{c\} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3, \dots) \quad (3.11)$$

z którymi są skojarzone współrzędne lokalne u_j , będące wynikiem transformacji $\bar{u} = A_c \bar{q}$. Funkcja tłumienia wyrazi się wzorem

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_j c_j \dot{u}_j^2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{u}}^T \{c\} \dot{\bar{u}} = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T A_c^T \{c\} A_c \dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T C \dot{\bar{q}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Funkcja ta jest formą kwadratową prędkości uogólnionych; jądrem tej formy jest kwadratowa symetryczna macierz tłumienia C .

Zakładamy w końcu, że rozważany ustrój jest obciążony siłami zewnętrznymi P_j uporządkowanymi w wektor

$$\bar{P} = [P_1, P_2, P_3, \dots]^T \quad (3.13)$$

którym można przyporządkować współrzędne lokalne u_j będące wynikiem transformacji $\bar{u} = A_p \bar{q}$. Prace tych sił określa wzór

$$\begin{aligned} L &= \sum_j P_j u_j = \bar{u}^T \bar{P} = \bar{q}^T A_p^T \bar{P} = \\ &= \bar{q}^T \bar{F} = q_1 F_1 + q_2 F_2 + q_3 F_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Praca sił zewnętrznych jest formą liniową przemieszczeń uogólnionych; współczynnikami tej formy są siły uogólnione F_i odpowiadające uogólnionym współrzędnym q_i .

Podstawiając wyniki bilansu energetycznego do równań Lagrange'a (1.21), otrzymamy macierzowe równanie ruchu układu dyskretnego

$$B \ddot{\bar{q}} + C \dot{\bar{q}} + K \bar{q} = \bar{F} \quad (3.15)$$

zapisane w bazie współrzędnych uogólnionych. Równanie to wyraża postulat równowagi dynamicznej, a do jego sformułowania została wykorzystana macierz sztywności. Przez analogię do nomenklatury używanej w statyce będziemy je nazywali równaniem metody przemieszczeń.

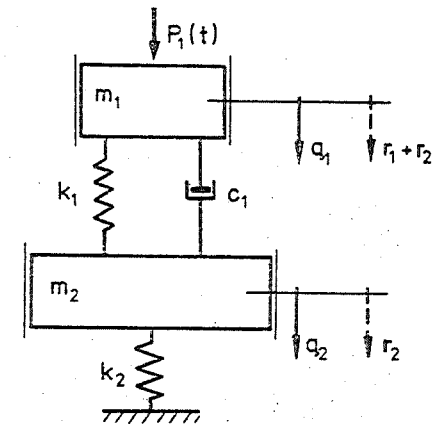
Równania ruchu można również zapisać metodą sił, wykorzystując macierz podatności i postulując ciągłość przemieszczeń. W tym celu pomnożymy (3.15) lewostronnie przez D i otrzymamy

$$D B \ddot{\bar{q}} + D C \dot{\bar{q}} + \bar{q} = D \bar{F} \quad (3.16)$$

Rys. 3.3

Rozważmy dla przykładu ustrój o schemacie przedstawionym na rys. 3.3. Ustrój ma dwa dynamiczne stany swobody. Bilans energetyczny daje rezultaty

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) \quad , \\ E_p &= \frac{1}{2} [k_1 (q_2 - q_1)^2 + k_2 q_2^2] = \\ &= \frac{1}{2} [k_1 q_1^2 - 2k_1 q_1 q_2 + (k_1 + k_2) q_2^2] \quad , \\ \Phi &= \frac{1}{2} c_1 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 = \frac{1}{2} (c_1 \dot{q}_1^2 - 2c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_1 \dot{q}_2^2) \quad , \\ L &= P_1 q_1 \quad , \end{aligned}$$



a zatem

$$B = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Równania ruchu napisane explicite mają postać

$$m_1 \ddot{q}_1 + c_1 \dot{q}_1 - c_1 \dot{q}_2 + k_1 q_1 - k_1 q_2 = P_1,$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - c_1 \dot{q}_1 + c_1 \dot{q}_2 - k_1 q_1 + (k_1 + k_2) q_2 = 0.$$

Zauważmy, że w macierzy sztywności pojawiło się sprzężenie statyczne, macierz bezwładności natomiast nie jest sprzężona. Okoliczność ta nie jest charakterystyczna dla rozważanego obiektu i wynika wyłącznie ze szczególnego doboru współrzędnych uogólnionych. Gdybyśmy obrali nowe współrzędne uogólnione $r_1 = q_1 - q_2$, $r_2 = q_2$ (rys. 3.3), to macierze układu przybrałyby postać

$$B = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 + m_2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 \end{bmatrix}.$$

W tym przypadku pojawiło się sprzężenie bezwładnościowe, brak natomiast sprzężenia statycznego. Możliwy jest również taki dobór współrzędnych uogólnionych, przy których pojawiają się oba typy sprzężeń lub oba jednocześnie znikają. W tym ostatnim przypadku współrzędne uogólnione nazywamy współrzędnymi głównymi.

3.2. Zagadnienie własne

Wychodząc z równania ruchu typu (3.15) otrzymuje się równanie drgań własnych

$$B \ddot{\bar{q}} + K \bar{q} = \bar{0}. \quad (3.17)$$

Przewidując rozwiązanie harmoniczne założymy $\ddot{\bar{q}} = -\omega^2 \bar{q}$. Równanie uchu przybierze postać

$$(K - \omega^2 B) \bar{q} = \bar{0}. \quad (3.18)$$

Jest to układ liniowych jednorodnych równań algebraicznych, który może mieć niezerowe rozwiązanie, gdy

$$\det(K - \omega^2 B) = 0. \quad (3.19)$$

Po rozwinięciu wyznacznika otrzymuje się równanie algebraiczne względem ω^2 , zwane równaniem charakterystycznym zagadnienia własnego. Pierwiastkami równania są częstości kołowe drgań własnych $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$. Pierwiastki te są rzeczywistymi ograniczonymi liczbami dodatnimi, przy czym liczba pierwiastków jest dokładnie równa liczbie dynamicznych stopni swobody układu (mogą występować pierwiastki wielokrotne). Pojawienie się pierwiastków zerowych świadczyłoby o niezachowawczej postaci równowagi rozważanego ustroju.

Każdej częstości ω_1 odpowiada takie rozwiązanie $\bar{q} = \bar{w}_1$, że

$$(K - \omega_1^2 B) \bar{w}_1 = \bar{0}. \quad (3.20)$$

Wektor \bar{w}_1 nazywamy wektorem własnym i-tej formy drgań. Określa on z dokładnością do stałego czynnika rozkład uogólnionych przemieszczeń podczas drgań z częstością ω_1 . Zbiór wektorów własnych tworzy macierz własną

$$W = [\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1d} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nd} \end{bmatrix}, \quad n \geq d. \quad (3.21)$$

Relacja (3.20) może być zapisana kompleksowo w formie

$$KW = BW \{\omega^2\}, \quad (3.22)$$

gdzie

$$\{\omega\} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d) \quad (3.23)$$

jest diagonalną macierzą widmową.

Pomnożmy związek (3.22) lewostronnie przez W^T i wykonajmy transpozycję tego iloczynu; otrzymamy dwie relacje

$$W^T KW = W^T BW \{\omega^2\}, \quad W^T KW = \{\omega^2\} W^T BW, \quad (3.24)$$

z których wynika, że czynnik $W^T BW$ jest komitatywny z czynnikiem diagonalnym $\{\omega^2\}$. W ogólnym przypadku warunek ten może być spełniony tylko wtedy, gdy czynnik $W^T BW$ jest również macierzą diagonalną. Musi więc być

$$W^T BW = \{m^0\}, \quad W^T KW = \{m^0\} \cdot \{\omega^2\} = \{k^0\}, \quad (3.25)$$

co oznacza, że macierz własna jest ortogonalna z wagą bezwładności 1 z wagą sztywności. Mamy więc w przypadku $i \neq j$

$$\bar{w}_i^T B \bar{w}_j = 0 \quad \bar{w}_i^T K \bar{w}_j = 0 \quad (3.26)$$

oraz dla $i = j$

$$\bar{w}_i^T B \bar{w}_i = m_i^0 > 0, \quad \bar{w}_i^T K \bar{w}_i = k_i^0 > 0, \quad i = 1, \dots, d, \quad (3.27)$$

gdzie m_i^0, k_i^0 są odpowiednio masami głównymi i sztywnościami głównymi odpowiadającymi i -tej formie drgań, przy czym

$$k_i^0 = \omega_i^2 m_i^0. \quad (3.28)$$

Opisane prawidłowości nazywamy zasadą ortogonalności drgań własnych. Zasadę tę można zinterpretować fizycznie, jeśli zauważymy, że iloczyn $K\bar{w}_j$ jest wektorem uogólnionych reakcji sprężystych ustroju spowodowanych stanem przemieszczenia \bar{w}_j , iloczyn $B\bar{w}_j$ natomiast jest proporcjonalny do wektora uogólnionych sił bezwładności pojawiających się podczas drgań harmonicznych według formy \bar{w}_j . Z relacji (3.26) wynika, że praca zarówno sił bezwładności, jak i reakcji sprężystych odpowiadających formie \bar{w}_j na przemieszczeniach \bar{w}_i jest równa zeru, jeśli $i \neq j$.

Jeśli pewna częstość własna ω_1 jest jednokrotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego (3.19), to nietrywialnym rozwiązaniem równania (3.20), a więc wektorem własnym \bar{w}_1 , jest każda niezerowa kolumna lub dowolna niezerowa kombinacja liniowa kolumn macierzy dołączonej do $(K - \omega_1^2 B)$, oznaczanej symbolem $\text{adj}(K - \omega_1^2 B)$. Niezerowe kolumny tej macierzy są do siebie proporcjonalne. Sposób ten zawodzi, gdy ω_1 jest pierwiastkiem wielokrotnym, w tym bowiem przypadku $\text{adj}(K - \omega_1^2 B) = 0$. Znane są algorytmy umożliwiające wyznaczenie wektorów własnych odpowiadających wielokrotnym wartościom własnym (por. rozdz. 5). Tu ograniczymy się do wyjaśnienia, że jeśli ω_1 jest r -krotną częstością drgań własnych, to równanie (3.20) ma r liniowo niezależnych rozwiązań $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r$, które na ogół nie spełniają warunków ortogonalności. Jeden z tych wektorów może być utożsamiony z wektorem własnym rozważanej r -grupy. Pozostałe $(r-1)$ wektorów własnych r -grupy można wyznaczyć tworząc takie kombinacje liniowe rozwiązań \bar{v}_j , aby każda para wektorów własnych r -grupy spełniała warunki ortogonalności z wagą B lub K . Rozwiązanie nie jest jedyne, niemniej jednak każda prawidłowo wyznaczona r -grupa wektorów własnych może być zaakceptowana.

Każdy wektor własny jest określony z dokładnością do stałego czynnika i może być dowolnie unormowany według wzoru

$$\bar{w}_{j,\text{norm}} = \bar{w}_j / N_j. \quad (3.29)$$

Za normę wektora własnego przyjmuje się często modularnie największy element wektora

$$N_j = \max_i |\bar{w}_{ij}|. \quad (3.30)$$

W tym przypadku wszystkie elementy wektora unormowanego zawierają się w przedziale $(-1, +1)$. Inny sposób polega na przyjęciu

$$N_j = \sqrt{\bar{w}_j^T B \bar{w}_j} \quad (3.31)$$

Wtedy po unormowaniu jest $m_j^0 = 1$ oraz $k_j^0 = \omega_j^2$, a więc $\{m^0\} = I$, $\{k^0\} = \{\omega^2\}$.

Zagadnienie własne można również rozwiązać wychodząc z równań metody sił. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} DB\bar{q} + \bar{q} &= \bar{0} && \text{zamiast (3.17),} \\ (DB - \omega^{-2}I)\bar{q} &= \bar{0} && \text{zamiast (3.18)} \\ \det(DB - \omega^{-2}I) &= 0 && \text{zamiast (3.19),} \\ (DB - \omega_1^{-2}I)\bar{w}_1 &= \bar{0} && \text{zamiast (3.20),} \\ DBW &= W\{\omega^{-2}\} && \text{zamiast (3.22).} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Należy tu podkreślić, że wektory własne nie są ortogonalne z wagą D . Ponadto jeśli $n > d$, to w rozwiązaniu równania charakterystycznego względem ω^{-2} mogą się pojawić pierwiastki $\omega^{-1} = 0$, a więc $\omega = \infty$; pierwiastki te należy odrzucić.

Przebieg czasowy drgań własnych układu dyskretnego jest kombinacją prostych drgań harmonicznych o częstościach kołowych ω_1 oraz w rozkładach przemieszczeń proporcjonalnych do form \bar{w}_1 . Mamy więc

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= \sum_{i=1}^d \bar{w}_i (s_i \sin \omega_i t + c_i \cos \omega_i t) = \\ &= W\{\sin \omega t\} \bar{s} + W\{\cos \omega t\} \bar{c}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \{\sin \omega t\} &= \text{diag}(\sin \omega_1 t), & \{\cos \omega t\} &= \text{diag}(\cos \omega_1 t), \\ \bar{s} &= [s_1, s_2, \dots, s_d]^T, & \bar{c} &= [c_1, c_2, \dots, c_d]^T. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Elementy wektorów \bar{s} oraz \bar{c} są stałymi dowolnymi.

3.3. Drgania swobodne

Załóżmy, że zaburzenie stanu równowagi statycznej układu dyskretnego wynika z nałożenia warunków początkowych $\bar{q}(0) = \bar{q}_0$ oraz $\dot{\bar{q}}(0) = \dot{\bar{q}}_0$, przy czym baza \bar{q} jest bazą minimalną ($n = d$). Jeśli wpływ tłumienia jest pomijalnie mały, można wykorzystać rozwiązanie (3.33), skąd

$$\begin{aligned}\bar{q}_0 &= W\bar{c} \longrightarrow \bar{c} = W^{-1}\bar{q}_0, \\ \dot{\bar{q}} &= W\{\omega\}\dot{\bar{s}} \longrightarrow \dot{\bar{s}} = \{\omega^{-1}\}W^{-1}\dot{\bar{q}}_0.\end{aligned}$$

Przebieg czasowy nietłumionych drgań swobodnych jest ostatecznie określony wektorem funkcyjnym

$$\bar{q}(t) = W \left\{ \cos \omega t \right\} W^{-1}\bar{q}_0 + W \left\{ \frac{\sin \omega t}{\omega} \right\} W^{-1}\dot{\bar{q}}_0. \quad (3.35)$$

Drgania swobodne tłumione określimy na podstawie równania ruchu

$$B\ddot{\bar{q}} + C\dot{\bar{q}} + K\bar{q} = \bar{0}. \quad (3.36)$$

Wprowadzimy tu założenie, że macierz tłumienia da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej macierzy bezwładności i sztywności

$$C = \mu B + \kappa K. \quad (3.37)$$

Po wprowadzeniu zmiany zmiennych $\bar{q} = W\bar{r}$ oraz po wykonaniu premultiplikacji równania (3.36) przez W^T , równanie to dzięki zasadzie ortogonalności sprowadzi się do postaci

$$\{m^0\}\ddot{\bar{r}} + \{c^0\}\dot{\bar{r}} + \{k^0\}\bar{r} = \bar{0}, \quad (3.38)$$

przy czym $\{c^0\} = W^T C W$. Jest to układ separowanych równań typu (2.7), a zatem według (2.12)

$$\bar{r}(t) = \left\{ e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t - \beta)}{\cos \beta} \right\} \bar{r}_0 + \left\{ e^{-\alpha \omega t} \frac{\sin \omega' t}{\omega \cos \beta} \right\} \dot{\bar{r}}_0, \quad (3.39)$$

$$\bar{q}(t) = W \left\{ e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t - \beta)}{\cos \beta} \right\} W^{-1}\bar{q}_0 + W \left\{ e^{-\alpha \omega t} \frac{\sin \omega' t}{\omega \cos \beta} \right\} W^{-1}\dot{\bar{q}}_0,$$

gdzie

$$\left\{ e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t - \beta)}{\cos \beta} \right\} = \text{diag} \left(e^{-\alpha_1 \omega_1 t} \frac{\cos(\omega'_1 t - \beta_1)}{\cos \beta_1} \right), \quad (3.40)$$

$$\left\{ e^{-\alpha \omega t} \frac{\sin \omega' t}{\omega \cos \beta} \right\} = \text{diag} \left(e^{-\alpha_1 \omega_1 t} \frac{\sin \omega'_1 t}{\omega_1 \cos \beta_1} \right).$$

Występująca we wzorach (3.35) i (3.39) macierz W^{-1} nie musi być obliczana przez formalne odwracanie macierzy W , z zasady ortogonalności wynika bowiem, że $W^{-1} = \{m^0\}^{-1} W^T B = \{k^0\}^{-1} W^T K$.

Zauważmy, że dzięki założeniu (3.37) każdej formie własnej \bar{w}_1 można było niezależnie przyporządkować quasi-częstotliwość ω'_1 oraz liczbę tłumienia α_1 . Jeśli założenie (3.37) nie jest spełnione, rozwiązanie komplikuje się, iloczyn $W^T C W$ nie jest wtedy bowiem diagonalny i równania (3.38) pozostają sprzężone przez macierz tłumienia. W takim przypadku równanie (3.36) wygodniej jest bezpośrednio całkować numerycznie.

3.4. Drgania wymuszone harmonicznie

Przyjmijmy w równaniu (3.15) wektor sił wzbudzających w postaci

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_s \sin pt + \bar{F}_c \cos pt, \quad (3.41)$$

gdzie p jest częstotliwością kołową wzbudzenia. Rozwiązania stacjonarnego będziemy poszukiwać w formie analogicznego wektora funkcyjnego

$$\bar{q}(t) = \bar{q}_s \sin pt + \bar{q}_c \cos pt. \quad (3.42)$$

Spełni on równanie ruchu (3.15), jeśli spełniony będzie układ algebraicznych równań macierzowych

$$\begin{aligned}(K - p^2 B)\bar{q}_s - pC\bar{q}_c &= \bar{F}_s, \\ pC\bar{q}_s + (K - p^2 B)\bar{q}_c &= \bar{F}_c,\end{aligned} \quad (3.43)$$

który można zapisać w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} (K - p^2 B) & -pC \\ pC & (K - p^2 B) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_s \\ \bar{F}_c \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Rozwiązanie równań (3.44) daje w wyniku poszukiwane wektory liczbowe \bar{q}_s, \bar{q}_c , dzięki czemu formuła (3.42) staje się jednoznacznie określona. Jeśli wpływ tłumienia jest pomijalnie mały, równanie (3.44) upraszcza się do postaci

$$(K - p^2 B)\bar{q} = \bar{F}, \quad (3.45)$$

prawdziwej zarówno dla składnika sinusowego, jak i cosinusowego.

Wychodząc z równania typu (3.16), w analogiczny sposób dochodzi się do równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} (I - p^2 DB) & -pDC \\ pDC & (I - p^2 DB) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\bar{F}_s \\ D\bar{F}_c \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

które w przypadku $C = 0$ upraszczają się do postaci

$$(I - p^2 DB)\bar{q} = D\bar{F}. \quad (3.47)$$

Opisana metoda nosi nazwę metody bezpośredniej. Rozwiązanie zagadnienia własnego nie jest tu potrzebne, konieczne jest natomiast rozwiązywanie układów równań algebraicznych. Trudności tej można uniknąć, jeśli znane jest rozwiązanie zagadnienia własnego, a więc jeśli znamy widmo częstotliwości własnych $\{\omega\}$ oraz macierz własną W . Założmy ponadto, że macierz tłumienia spełnia założenie (3.37) i znana jest specyfikacja bezwymiarowych współczynników tłumienia γ_1 odpowiadających kolej-

nym formom drgań własnych. W tych okolicznościach zadanie można rozwiązać metodą transformacji własnej, którą stosowaliśmy już w analizie drgań swobodnych tłumionych. Podstawmy

$$\bar{q} = W \bar{r} \quad (3.48)$$

i wykonajmy premultiplikację równania (3.15) przez W^T . W wyniku otrzymamy

$$W^T B W \ddot{\bar{r}} + W^T C W \dot{\bar{r}} + W^T K W \bar{r} = W^T \bar{F} = \bar{R}(t). \quad (3.49)$$

W dalszym ciągu wykorzystamy zasadę ortogonalności (3.25), ponadto zaś uwzględnimy relację

$$W^T C W = \left\{ \gamma \sqrt{k^0 m^0} \right\} = \text{diag}(\gamma_1 \sqrt{k_1^0 m_1^0}), \quad (3.50)$$

dzięki czemu równanie (3.49) sprowadzi się do postaci diagonalnej

$$\{m^0\} \ddot{\bar{r}} + \left\{ \gamma \sqrt{k^0 m^0} \right\} \dot{\bar{r}} + \{k^0\} \bar{r} = \bar{R}(t), \quad (3.51)$$

jak dla zbioru niezależnych układów o jednym stopniu swobody.

Rozwiązanie (3.51) polega na niezależnym rozwiązywaniu równań typu

$$m_1^0 \ddot{\bar{r}}_1 + \gamma_1 \sqrt{k_1^0 m_1^0} \dot{\bar{r}}_1 + k_1^0 \bar{r}_1 = R_1(t) \quad (3.52)$$

i może być uzyskane dla dowolnego rodzaju wzbudzenia.

W szczególnym przypadku wymuszenia harmonicznego

$$\bar{R}(t) = W^T(\bar{F}_s \sin pt + \bar{F}_c \cos pt) = \bar{R}_s \sin pt + \bar{R}_c \cos pt, \quad (3.53)$$

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_s \sin pt + \bar{r}_c \cos pt.$$

Wykorzystując wyniki (2.35), można napisać

$$\begin{aligned} \bar{F}_s &= \{h\} \bar{R}_s + \{h'\} \bar{R}_c, \\ \bar{F}_c &= -\{h'\} \bar{R}_s + \{h\} \bar{R}_c, \end{aligned} \quad (3.54)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \{h\} &= \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_d), \\ \{h'\} &= \text{diag}(h'_1, h'_2, \dots, h'_d), \\ h_1 &= (1 - \eta_1^2)/k_1^0 [(1 - \eta_1^2)^2 + \gamma_1^2 \eta_1^2], \\ h'_1 &= \gamma_1 \eta_1 / k_1^0 [(1 - \eta_1^2)^2 + \gamma_1^2 \eta_1^2], \\ \eta_1 &= p / \omega_1. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Uwzględniając zależności $\bar{q} = W \bar{r}$ oraz $\bar{R} = W^T \bar{F}$, otrzymamy

$$\bar{q}_s = W\{h\} W^T \bar{F}_s + W\{h'\} W^T \bar{F}_c = H \bar{F}_s + H' \bar{F}_c, \quad (3.56)$$

$$\bar{q}_c = -W\{h'\} W^T \bar{F}_s + W\{h\} W^T \bar{F}_c = -H' \bar{F}_s + H \bar{F}_c,$$

lub w formie blokowej

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & H' \\ -H' & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_s \\ \bar{F}_c \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

gdzie

$$H = W\{h\} W^T, \quad H' = W\{h'\} W^T. \quad (3.58)$$

Jeśli wpływ tłumienia jest pomijalnie mały, $H' = 0$; związki (3.56) i (3.57) upraszczają się do postaci

$$\bar{q} = H \bar{F}, \quad (3.59)$$

prawdziwej zarówno dla składnika sinusowego, jak i cosinusowego, przy czym

$$h_1 = 1/k_1^0 (1 - \eta_1^2). \quad (3.60)$$

3.5. Warianty modelu tłumienia. Wytyczenie konstrukcji

W przypadku konstrukcji budowlanych nie zawierających jawnych tłumików ponownie pojawia się problem opisu oporów ruchu, a więc doboru macierzy C i definicji obciążenia kinetycznego \bar{Q} w bazie współrzędnych uogólnionych \bar{q} .

Zakładając zewnętrzny charakter oporów ruchu należałoby przyjąć

$$C = \mu B, \quad \bar{Q} = K \bar{q} = \bar{F} - B(\ddot{\bar{q}} + \mu \dot{\bar{q}}). \quad (3.61)$$

W przypadku modelu Voigta-Kelvina będzie natomiast

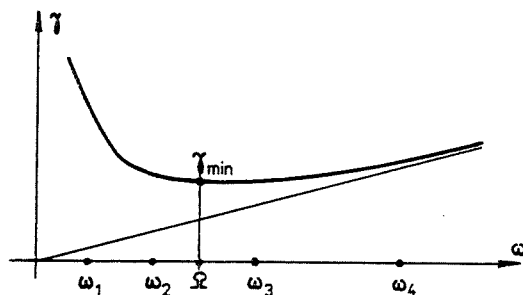
$$C = \kappa K, \quad \bar{Q} = K(\bar{q} + \kappa \dot{\bar{q}}) = \bar{F} - B \dot{\bar{q}}. \quad (3.62)$$

Z poprzednich rozważań wiadomo jednak, że oba te warianty prowadzą do specyfikacji bezwymiarowego współczynnika tłumienia dla kolejnych głównych form drgań według relacji $\gamma_1 = \mu/\omega_1$ lub $\gamma_1 = \kappa \omega_1$, na ogół niezgodnych z doświadczeniem.

Lepsze rezultaty można otrzymać przyjmując wariant kombinowany

$$\begin{aligned} C &= \mu B + \kappa K, \\ \bar{Q} &= K(\bar{q} + \kappa \dot{\bar{q}}) = \bar{F} - B(\ddot{\bar{q}} + \mu \dot{\bar{q}}). \end{aligned} \quad (3.63)$$

W tym przypadku kolejnym głównym formom drgań odpowiadają bezwymiarowe współczynniki tłumienia (rys. 3.4).



Rys. 3.4

$$\gamma_1 = \kappa \omega_1 + \mu / \omega_1, \quad (3.64)$$

przy czym w punkcie $\omega = \sqrt{\mu/\kappa} = \Omega$ współczynnik tłumienia osiąga minimum $\gamma_{\min} = 2\sqrt{\mu\kappa}$. Jeżeli wielkość Ω uznamy za najbardziej istotną w zadaniu częstotliwość kołową, z którą należy skojarzyć miarodajny współczynnik tłumienia $\gamma = \gamma_{\min}$, to przyjęte założenie prowadzi do wyników

$$\mu = \frac{1}{2} \gamma \Omega, \quad \kappa = \frac{1}{2} \gamma / \Omega. \quad (3.65)$$

Można również wybrać dwie istotne częstotliwości własne ω_1, ω_2 i zażądać, aby w obu przypadkach relacja (3.64) dała w wyniku $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Rozwiązaniem wynikających stąd dwóch równań są parametry μ oraz κ .

Zauważmy, że trudności doboru macierzy tłumienia zmniejszają się w przypadku stosowania metody transformacji własnej, mamy tam bowiem możliwość dowolnej specyfikacji współczynników γ_i dla kolejnych głównych form drgań, a więc także możliwość przyjęcia $\gamma_1 = \gamma = \text{const}$. Jest to jednoznaczne z założeniem

$$C = B W \{ \gamma \omega / m^0 \} W^T B = K W \{ \gamma / \omega k^0 \} W^T K, \quad (3.66)$$

Jednakże problem definicji obciążenia kinetycznego pozostaje tu nie rozstrzygnięty.

W analizie ustalonych harmonicznym drgań układów dyskretnych niektórzy autorzy zalecają przyjmować model Voigta-Kelvina z parametrami $\kappa = \gamma/p$, gdzie γ jest miarodajnym dla danej konstrukcji ustalonym bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia, p zaś jest częstotliwością kołową wzbudzenia. Wtedy

$$C = \frac{\gamma}{p} K, \quad (3.67)$$

$$\bar{Q} = K(\bar{q} + \frac{\gamma}{p} \dot{\bar{q}}) = \bar{F} + p^2 B \bar{q}.$$

Założenie to można zinterpretować przechodząc do współrzędnych głównych. Po dokonaniu transformacji własnej otrzymuje się

$$c_i^0 = \frac{\gamma}{p} k_i^0, \quad (3.68)$$

$$\gamma_i = c_i^0 / \sqrt{k_i^0 m_i^0} = \gamma \omega_i / p = \gamma / \eta_i,$$

Zauważmy, że w strefie rezonansowej, w której tłumienie jest istotne, będzie $p \approx \omega_r$, a więc $\gamma_r \approx \gamma$. Poza obszarem rezonansu natomiast bezwymiarowe współczynniki tłumienia $\gamma_i = \gamma / \eta_i$ różnią się od wartości γ , co jednak nie ma istotnego znaczenia, w obszarze pozarezonansowym bowiem wpływ małego tłumienia jest pomijalny. Założenie (3.67) odpowiada więc praktycznie hipotezie ustalonego dekrementu tłumienia. Należy przy tym pamiętać, że omawiane założenie może być przyjęte jedynie w przypadku słabo tłumionych układów w stacjonarnych procesach harmonicznym.

Analiza drgań upraszcza się znacznie, jeśli opory ruchu są pomijalne. W tym przypadku mamy

$$C = 0, \quad \bar{Q} = K \bar{q} = \bar{F} - B \ddot{\bar{q}}, \quad (3.69)$$

przy czym stosując metodę sił równanie drgań można zapisać bezpośrednio w bazie uogólnionych obciążeń kinetycznych \bar{Q}

$$B D \ddot{\bar{q}} + \bar{Q} = \bar{F}. \quad (3.70)$$

W przypadku drgań wymuszonych harmonicznym zamiast (3.47) otrzymuje się równanie

$$(I - p^2 B D) \bar{Q} = \bar{F}. \quad (3.71)$$

3.6. Proces przejściowy

Rozważmy równanie ruchu

$$B \ddot{\bar{q}} + C \dot{\bar{q}} + K \bar{q} = \bar{F}(t), \quad \det B > 0, \quad (3.72)$$

z warunkami $\bar{q}(0) = 0, \dot{\bar{q}}(0) = 0$ dla $t \leq 0$. Założymy, że wymuszenie pojawia się w chwili $t = 0$ i jest opisane niestacjonarną oscylacyjną funkcją czasu

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_s(t) \sin \varphi(t) + \bar{F}_c(t) \cos \varphi(t), \quad (3.73)$$

$$\dot{\varphi} = p(t), \quad \ddot{\varphi} = \dot{p}(t),$$

przy czym znane są wektory funkcyjne $\bar{F}_s(t), \bar{F}_c(t)$ oraz funkcja rozkładu kołowej częstotliwości wzbudzenia $p(t)$. Funkcja $\bar{F}(t)$ jest zatem znana z dokładnością do fazy początkowej, niemniej majoranty elementów wektora $\bar{F}(t)$

$$\hat{F}_1(t) = \sqrt{F_{1s}^2(t) + F_{1c}^2(t)} \quad (3.74)$$

są określone jednoznacznie.

Całki równania (3.72) będziemy poszukiwali w postaci funkcji oscylacyjnej podobnej do (3.73)

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= \bar{q}_s(t) \sin \varphi(t) + \bar{q}_c(t) \cos \varphi(t), \\ \dot{\bar{q}}(t) &= (\dot{\bar{q}}_s - p\bar{q}_c) \sin \varphi + (\dot{\bar{q}}_c + p\bar{q}_s) \cos \varphi, \\ \ddot{\bar{q}}(t) &= (\ddot{\bar{q}}_s - 2p\dot{\bar{q}}_c - p\bar{q}_c - p^2\bar{q}_s) \sin \varphi + \\ &+ (\ddot{\bar{q}}_c + 2p\dot{\bar{q}}_s + p\bar{q}_s - p^2\bar{q}_c) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Formuły (3.73) i (3.75) należy podstawić do (3.72). Postulat spełnienia równania (3.72) tożsamościowo względem φ prowadzi do układu równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_s \\ \ddot{\bar{q}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & -2pB \\ 2pB & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_s \\ \dot{\bar{q}}_c \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} K - p^2B & -pC - pB \\ pC + pB & K - p^2B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_s \\ \bar{F}_c \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

przy czym ze względu na przyjęte warunki graniczne równania (3.72) funkcje $\bar{q}_s(t)$ i $\bar{q}_c(t)$ powinny spełniać zerowe warunki początkowe. Jest to układ równań różniczkowych o zmiennych w czasie współczynnikach, a zatem rozwiązanie może być uzyskane jedynie metodami numerycznymi.

Założmy dalej, że przedmiotem zainteresowania jest zbiór wielkości kinematycznych lub kinetycznych, określonych liniowym wyrażeniem różniczkowym

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t) &= \bar{Y}_s(t) \sin \varphi + \bar{Y}_c(t) \cos \varphi = \\ &= S_0 \bar{q} + S_1 \dot{\bar{q}} + S_2 \ddot{\bar{q}} + S_f \bar{F}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

gdzie S_0, S_1, S_2, S_f są pewnymi macierzami o elementach stałych lub zależnych od czasu. Uwzględniając (3.75) otrzymamy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{Y}_s \\ \bar{Y}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_0 - p^2 S_2 & -p S_1 - p S_2 \\ p S_1 + p S_2 & S_0 - p^2 S_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_s \\ \bar{q}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_1 & -2p S_2 \\ 2p S_2 & S_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_s \\ \dot{\bar{q}}_c \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}}_s \\ \ddot{\bar{q}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_f & 0 \\ 0 & S_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{F}_s \\ \bar{F}_c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

I tak np. jeśli $\bar{Y}(t) = \bar{Q}(t) = K\bar{q} + C\dot{\bar{q}}$, to $S_0 = K, S_1 = C, S_2 = S_f = 0$. Przebieg czasowy majoranty wielkości $Y_j(t)$ określa wzór

$$\hat{Y}_j(t) = \sqrt{Y_{js}^2 + Y_{jc}^2}. \quad (3.79)$$

W ten sposób znane majoranty wymuszenia (3.74) zostają przetworzone na majoranty (3.79) dowolnej odpowiedzi układu.

Zauważmy, że w przedziale stacjonarnego wzbudzenia, gdy $p = \text{const}$, $\bar{F}_s = \text{const}$, $\bar{F}_c = \text{const}$, relacja (3.76) staje się układem równań o stałych współczynnikach z ustaloną prawą stroną. Całka takiego układu równań zmierza asymptotycznie do postaci, którą otrzymalibyśmy przyjmując $\dot{\bar{q}}_s = \dot{\bar{q}}_c = \ddot{\bar{q}}_s = \ddot{\bar{q}}_c = 0$, a więc do postaci określonej znanym równaniem (3.44), jak być powinno.

3.7. Wymuszenie kinematyczne

Rozważmy obiekt, którego ruch jest opisany wektorem współrzędnych uogólnionych $\bar{q}(t)$. Założmy, że na obiekt nie działają żadne zewnętrzne siły wzbudzające, niektóre natomiast elementy obiektu (np. elementy ostoi) wykonują znany ruch opisany za pomocą dodatkowego zbioru współrzędnych $\bar{z}(t)$. Równanie ruchu można zapisać w postaci blokowej

$$\begin{bmatrix} B_{qq} & B_{qz} \\ B_{zq} & B_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \ddot{\bar{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{qq} & C_{qz} \\ C_{zq} & C_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qz} \\ K_{zq} & K_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{Z}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

gdzie $\bar{Z}(t)$ jest wektorem nieznanых sił w zbiorze \bar{z} . Układ macierzowych równań (3.80) po rozwinięciu przybiera postać

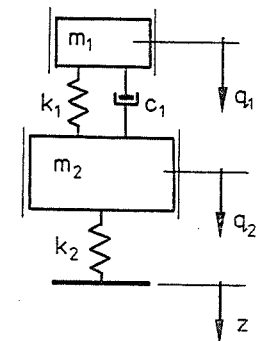
$$B_{qq}\ddot{\bar{q}} + B_{qz}\ddot{\bar{z}} + C_{qq}\dot{\bar{q}} + C_{qz}\dot{\bar{z}} + K_{qq}\bar{q} + K_{qz}\bar{z} = \bar{0}, \quad (3.81)$$

$$B_{zq}\ddot{\bar{q}} + B_{zz}\ddot{\bar{z}} + C_{zq}\dot{\bar{q}} + C_{zz}\dot{\bar{z}} + K_{zq}\bar{q} + K_{zz}\bar{z} = \bar{Z}(t). \quad (3.82)$$

Nadajmy równaniu (3.81) formę

$$\begin{aligned} B_{qq}\ddot{\bar{q}} + C_{qq}\dot{\bar{q}} + K_{qq}\bar{q} &= \\ &= -B_{qz}\ddot{\bar{z}} - C_{qz}\dot{\bar{z}} - K_{qz}\bar{z}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Równanie to stanowi podstawę do uzyskania rozwiązania $\bar{q}(t)$, jako skutku wymuszenia kinematycznego $\bar{z}(t)$. Jeśli rozwiązanie $\bar{q}(t)$ jest już rozpoznane, to na podstawie relacji (3.82) można w miarę potrzeby zidentyfikować siły $\bar{Z}(t)$.



Rys. 3.5

Dla przykładu wyprowadzimy równanie ruchu obiektu o schemacie przedstawionym na rys. 3.5. Wektor $\bar{z}(t)$ jest tu jednoelementowy. Bilans energetyczny daje rezultaty

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2),$$

$$\Phi = \frac{1}{2} c_1 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 = \frac{1}{2}(c_1 \dot{q}_1^2 - 2c_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_1 \dot{q}_2^2),$$

$$E_p = \frac{1}{2}[k_1(q_2 - q_1)^2 + k_2(z - q_2)^2] = \\ = \frac{1}{2}[k_1 q_1^2 + (k_1 + k_2) q_2^2 + k_2 z^2 - 2k_1 q_1 q_2 - 2k_2 q_2 z],$$

a zatem

$$B = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}.$$

Równanie ruchu typu (3.83) ma postać

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\bar{q}} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 \end{bmatrix} \dot{\bar{q}} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} \cdot z(t),$$

natomiast na podstawie (3.82)

$$Z(t) = [0, -k_2] \bar{q} + k_2 z = k_2(z - q_2).$$

Siła $Z(t)$ w omówionym przykładzie jest reakcją podłoża (ostoi).

3.8. Drgania wymuszone aperiodycznie

Drgania wymuszone układu dyskretnego opisuje równanie ruchu

$$B\ddot{\bar{q}} + C\dot{\bar{q}} + K\bar{q} = \bar{F}(t). \quad (3.84)$$

Założmy, że w chwili $t = 0$ obiekt był w stanie równowagi statycznej, a w przedziale $t > 0$ został poddany wymuszeniu o dowolnym rozkładzie w czasie, przy czym rozkład ten jest jednakowy dla wszystkich elementów wektora wymuszenia, a więc $\bar{F}(t) = \bar{G} \cdot f(t)$. Po zastosowaniu transformacji własnej $\bar{q} = W\bar{F}$, $\bar{R} = W^T \bar{G}$, równanie ruchu przybiera postać

$$\{m^0\} \ddot{\bar{r}} + \{\gamma \sqrt{k^0 m^0}\} \dot{\bar{r}} + \{k^0\} \bar{r} = \bar{R} \cdot f(t), \quad (3.85)$$

Jak dla zbioru niezależnych układów o jednym stopniu swobody. Zgodnie z wzorem (2.94) można napisać

$$r_1(t) = \frac{1}{m_1^0 \omega_1^0} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha_1 \omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1'(t-\tau) d\tau \cdot R_1, \quad (3.86)$$

a więc

$$\bar{q}(t) = W\{z(t)\} W^T \bar{G}, \quad (3.87)$$

gdzie

$$\{z(t)\} = \text{diag} \left(\frac{1}{m_1^0 \omega_1^0} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha_1 \omega_1(t-\tau)} \sin \omega_1'(t-\tau) d\tau \right). \quad (3.88)$$

I tak np. jeśli w chwili $t = 0$ zostało nagle przyłożone obciążenie o rozkładzie \bar{P} w bazie \bar{q} , to zgodnie z (2.72) rozwiązanie z pominięciem tłumienia ma postać

$$\bar{q}(t) = W \left\{ \frac{1}{k} (1 - \cos \omega t) \right\} W^T \bar{P}.$$

W przypadku wymuszeń o różnych przebiegach w czasie należy skorzystać z zasady superpozycji (tylko w zakresie całki szczególnej z zerowymi warunkami początkowymi).

W bardziej skomplikowanych przypadkach równanie (3.84) wygodniej jest na ogół bezpośrednio całkować numerycznie.

3.9. Belki i ramy płaskie

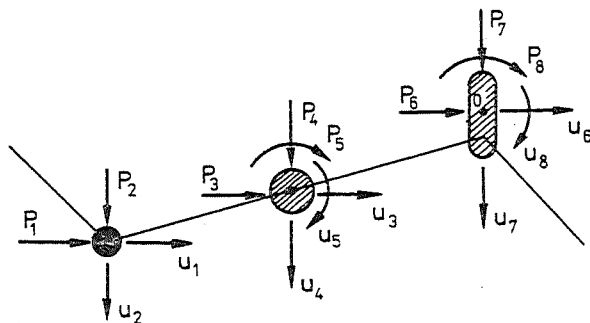
Rozpatrywać będziemy płaskie układy belkowe lub ramowe, złożone z nieważkich prętów prostych. Osie prętów przecinają się w węzłach geometrycznych. W ustroju można wyróżnić węzły masowe w postaci mas skupionych pozbawionych bezwładności obrotowej i mas o niepomijalnej bezwładności obrotowej. Każdej masie przyporządkujemy dwie lokalne współrzędne translacyjne (zaczepione w środku masy i wzajemnie prostopadłe), ponadto każdej masie z bezwładnością obrotową - lokalną współrzędną rotacyjną, jak na rys. 3.6. Po ustaleniu numeracji współrzędnych lokalnych zestawimy je w uporządkowany zbiór w postaci wektora

$$\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, \dots]^T, \quad (3.89)$$

przy czym współrzędne, w kierunku których ruch nie jest możliwy, mogą być pominięte. Zbiorowi współrzędnych lokalnych przyporządkujemy zbiór mas uporządkowany w postaci macierzy diagonalnej

$$\{m\} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, \dots), \quad (3.90)$$

przy czym elementy skojarzone ze współrzędnymi translacyjnymi są równe wartościom odpowiednich mas, natomiast skojarzone ze współrzędnymi rotacyjnymi są równe biegunowym momentom bezwładności odpowiednich mas, $m_j = J_j^m$.



Rys. 3.6.

Założmy, że stan przemieszczenia ustroju prętowego jest określony zbiorem współrzędnych uogólnionych tworzących wektor

$$\bar{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_n]^T, \quad (3.91)$$

który transformuje się na współrzędne lokalne według relacji $\bar{u} = A_m \bar{q}$. Macierz bezwładności układu, zgodnie z wzorem (3.6), wyrazi się wzorem

$$B = A_m^T \{m\} A_m. \quad (3.92)$$

Rozważany ustrój może być obciążony zewnętrznymi siłami wzbudzającymi; założmy, że są to siły skupione lub skupione momenty, działające w węzłach masowych i opisane w bazie masowych współrzędnych lokalnych (rys. 3.6) przez wektor

$$\bar{P} = [P_1, P_2, P_3, \dots]^T. \quad (3.93)$$

Obciążenie to przekształcamy zgodnie z (3.14) na wektor obciążeń uogólnionych

$$\bar{F} = A_m^T \bar{P}. \quad (3.94)$$

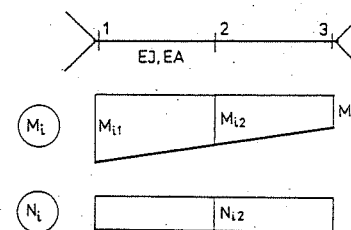
Dalszy ciąg analizy dynamicznej ustroju prętowego można przeprowadzić metodą sił lub metodą przemieszczeń.

Metoda sił

W przypadku zastosowania metody sił należy wyznaczyć macierz podatności w bazie współrzędnych uogólnionych \bar{q} . Elementy tej macierzy oblicza się za pomocą znanego wzoru Mohra

$$\delta_{ij} = \int \frac{1}{EI} M_i M_j ds + \int \frac{1}{EA} N_i N_j ds, \quad (3.95)$$

gdzie M_i, M_j, N_i, N_j są odpowiednio wykresami momentów gnących i sił osiowych od obciążeń $Q_i = 1$ lub $Q_j = 1$, a całkowanie przebiega po zarysie osiowym całego ustroju. We wzorze tym pominięto składnik reprezentujący wpływ odkształcalności postaciowej (w razie potrzeby składnik ten może być bez trudu uwzględniony). Macierz podatności można wyznaczyć obliczając kolejno jej elementy δ_{ij} sposobem Wereszozagina lub globalnie przez operacje macierzowe. Wykorzystamy tu fakt, że momenty gnące na długości prętów są funkcjami liniowymi, a siły osiowe na długości prętów są stałe. Obierzmy w każdym przecie dwa przekroje przywęzłowe i przekrój środkowy, jak na rys. 3.7. Przekroje te na zarysie osiowym badanego ustroju prętowego utworzą zbiór przekrojów. Wykres momentów gnących może być określony za pomocą dyskretnego zbioru



Rys. 3.7

liczb w postaci wektora \bar{M} w bazie zbioru przekrojów. Ogólnie jest

$$\bar{M} = \mathcal{N}_a \bar{Q}, \quad (3.96)$$

gdzie \mathcal{N}_a jest macierzą wpływu obciążeń jednostkowych $Q_i = 1$ na momenty gnące. Analogicznie w podzbiorze przekrojów środkowych można dyskretnie opisać wykres sił osiowych jako wektor

$$\bar{N} = \mathcal{N}_a^s \bar{Q}, \quad (3.97)$$

gdzie \mathcal{N}_a^s jest macierzą wpływu obciążeń jednostkowych $Q_i = 1$ na siły osiowe. Na podstawie wzoru (3.95) można wykazać, że macierz podatności

$$D = \mathcal{N}_a^T \left\{ \frac{r}{6EI} \right\} \mathcal{N}_a + \mathcal{N}_a^{sT} \left\{ \frac{1}{EA} \right\} \mathcal{N}_a^s, \quad (3.98)$$

przy czym dla przekrojów przywęzłowych jest $r = 1$, natomiast dla przekrojów środkowych $r = 4$.

Znając macierze B i D można już rozwiązać zagadnienie własne i wykorzystać to rozwiązanie w analizie drgań wymuszonych metodą transformacji własnej.

W przypadku wymuszenia harmonicznego stosuje się zwykle metodę bezpośrednią. Analizując drgania wymuszone harmonicznym z uwzględnieniem tłumienia, należy wykorzystać równania (3.46) i wyznaczyć stan przemieszczeń uogólnionych. Jeżeli macierz tłumienia założymy w postaci (3.62) lub (3.67), obciążenie kinetyczne wyrazi się wzorem

$$\bar{Q}_s = \bar{F}_s + p^2 B \bar{Q}_s, \quad \bar{Q}_o = \bar{F}_o + p^2 B \bar{Q}_o. \quad (3.99)$$

Momenty gnące \bar{M}_s, \bar{M}_o oraz siły osiowe \bar{N}_s, \bar{N}_o obliczymy według wzorów (3.96) i (3.97). Siły tnące, stałe na długości prętów, obliczymy jako pochodne przebiegu momentów gnących w zbiorze przekrojów środkowych. Na przykład dla pręta, jak na rys. 3.7

$$T_{1-3} = T_2 = \frac{1}{l} (M_3 - M_1). \quad (3.100)$$

Można również obliczyć amplitudalne wykresy sił przekrojowych według wzorów

$$\text{am } M = \sqrt{M_s^2 + M_o^2}, \quad \text{am } T = \sqrt{T_s^2 + T_o^2}, \quad \text{am } N = \sqrt{N_s^2 + N_o^2}. \quad (3.101)$$

Wykresy amplitudalne są jednocześnie dynamicznymi obwiedniami (po czasie) sił przekrojowych. Obwiednie sił osiowych i tnących mają na długości prętów przebieg stały, a obwiednie momentów gnących są na ogół krzywoliniowe z wyjątkiem przedziałów, w których wykresy M_s, M_o są proporcjonalne.

Jeżeli wpływ tłumienia jest pomijalny, stan przemieszczenia obliczamy z równań (3.47). Obciążenie kinetyczne można obliczyć sposobem pośrednim według (3.99) lub niezależnie od przemieszczeń wprost z równań (3.71), oddzielnie dla \bar{F}_s i \bar{F}_o .

Dodatkowego wyjaśnienia wymaga problem określenia macierzy podatności w przypadku schematu prętowego statycznie niewyznaczalnego. Przycinamy wtedy więzie nadliczbowe i obieramy w ich kierunku dodatkowe współrzędne uogólnione tworzące wektor \bar{X} oraz dodatkowe siły uogólnione \bar{X} . W pierwszym etapie wyznaczamy macierz podatności \bar{D} w bazie poszerzonej

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{x} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{X} \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

określając w tej bazie również macierz wpływu. Poszerzona macierz podatności ma strukturę blokową

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{qq} & D_{qx} \\ D_{xq} & D_{xx} \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

przy czym $D_{qx} = D_{xq}^T$. Warunek ciągłości przemieszczeń w zbiorze \bar{x} ma postać $D_{xq} \bar{Q} + D_{xx} \bar{X} = \bar{0}$, a stąd

$$\bar{X} = -D_{xx}^{-1} D_{xq} \bar{Q}. \quad (3.104)$$

Natomiast z tożsamości $D_{qq} \bar{Q} + D_{qx} \bar{X} = D \bar{Q}$ po uwzględnieniu (3.104) dostajemy

$$D = D_{qq} - D_{qx} D_{xx}^{-1} D_{xq}. \quad (3.105)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób macierz podatności ustroju statycznie niewyznaczalnego w bazie \bar{q} . Procedura rozwiązania zadania dynamicznego przebiega dalej jak poprzednio - z tym, że po wyznaczeniu obciążenia kinetycznego \bar{Q} należy również obliczyć \bar{X} według (3.104) i zbudować wektor \bar{Q} , który posłuży do określenia sił przekrojowych w wyniku transformacji przez poszerzone macierze wpływu.

M e t o d a p r z e m i e s z c z e ń

W przypadku zastosowania metody przemieszczeń należy wyznaczyć macierz sztywności w bazie współrzędnych \bar{q} . Elementy tej macierzy oblicza się również na podstawie wzoru Mohra, który po pominięciu wpływu odkształcalności postaciowej ma formę

$$k_{ij} = \int \frac{1}{EI} M_i M_j ds + \int \frac{1}{EA} N_i N_j ds, \quad (3.106)$$

przy czym w tym przypadku M_i, M_j, N_i, N_j są wykresami sił przekrojowych od jednostkowych przemieszczeń $q_i = 1$ lub $q_j = 1$.

Macierzowy sposób obliczania macierzy sztywności polega na określeniu macierzy wpływu $\mathcal{M}_q, \mathcal{N}_q$, wyrażających w tym przypadku transformację jednostkowych przemieszczeń ze zbioru \bar{q} na siły przekrojowe w zbiorze przekrojów, oraz na wykorzystaniu wzoru

$$K = \mathcal{M}_q^T \left\{ \frac{1}{6EI} \right\} \mathcal{M}_q + \mathcal{N}_q^T \left\{ \frac{1}{EA} \right\} \mathcal{N}_q. \quad (3.107)$$

Znając macierze B i K można już rozwiązać zagadnienie własne i wykorzystać to rozwiązanie w analizie drgań wymuszonych metodą transformacji własnej.

W przypadku wymuszenia harmonicznego stosuje się zwykle metodę bezpośrednią. Analizując drgania wymuszone należy wykorzystać równania (3.44) i wyznaczyć stan przemieszczeń uogólnionych. Obliczanie obciążenia kinetycznego nie będzie przydatne, niemniej jeśli akceptujemy definicję tego obciążenia zgodnie z (3.67), to

$$\bar{M} = M_q (\bar{q} + \frac{\gamma}{p} \dot{\bar{q}}), \quad (3.108)$$

$$\bar{N} = N_q (\bar{q} + \frac{\gamma}{p} \dot{\bar{q}}). \quad (3.109)$$

Mając na uwadze to, że w przypadku rozwiązania harmonicznego

$$\bar{q} = \bar{q}_s \sin pt + \bar{q}_c \cos pt, \quad (3.110)$$

$$\dot{\bar{q}} = p \bar{q}_s \cos pt - p \bar{q}_c \sin pt,$$

otrzymamy ostatecznie

$$\bar{M}_s = M_q (\bar{q}_s - \gamma \bar{q}_c), \quad \bar{M}_c = M_q (\bar{q}_c + \gamma \bar{q}_s), \quad (3.111)$$

$$\bar{N}_s = N_q (\bar{q}_s - \gamma \bar{q}_c), \quad \bar{N}_c = N_q (\bar{q}_c + \gamma \bar{q}_s). \quad (3.112)$$

Siły tnące i wielkości amplitudalne oblicza się analogicznie jak w metodzie sił. Jeśli wpływ tłumienia jest pomijalny, stan przemieszczenia otrzymujemy rozwiązując równanie (3.45), a we wzorach (3.111), (3.112) należy przyjąć $\gamma = 0$.

Dodatkowego wyjaśnienia wymaga problem określenia macierzy sztywności w przypadku, gdy obrane współrzędne uogólnione \bar{q} nie wyczerpują geometrycznych stopni swobody siatki prętowej ustroju (np. gdy niektóre węzły geometryczne nie są węzłami masowymi). Należy wtedy dobrać dodatkowe współrzędne uogólnione w formie wektora \bar{x} w taki sposób, aby w bazie poszerzonej \bar{q} uzyskać schemat geometrycznie wyznaczalny. W pierwszym etapie wyznaczymy w poszerzonej bazie \bar{q} macierz sztywności \bar{K} o strukturze

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qx} \\ K_{xq} & K_{xx} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

przy czym $K_{xq} = K_{qx}^T$. Macierzowy sposób zbudowania takiej macierzy wymaga przygotowania macierzy wpływu również w bazie poszerzonej. Warunek równowagi w zbiorze \bar{x} ma postać $K_{xq}\bar{q} + K_{xx}\bar{x} = \bar{0}$, a stąd

$$\bar{x} = -K_{xx}^{-1}K_{xq}\bar{q}. \quad (3.114)$$

Natomiast w tożsamości $K_{qq}\bar{q} + K_{qx}\bar{x} = K\bar{q}$ po uwzględnieniu (3.114) dostajemy

$$K = K_{qq} - K_{qx}K_{xx}^{-1}K_{xq}. \quad (3.115)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób dla ustroju geometrycznie niewyznaczalnego macierz sztywności w bazie \bar{q} . Macierz tę wykorzystamy w rozwiązywaniu zadania dynamicznego uzyskując stan przemieszczenia \bar{q} . Następnie według (3.114) obliczymy nadliczbowe przemieszczenia \bar{x} i zbudujemy wektor \bar{q} , który po transformacji analogicznej do (3.111), (3.112) z zastosowaniem poszerzonych macierzy wpływu doprowadzi do określenia sił przekrojowych.

Przekształcania macierzy sztywności można uniknąć, jeśli bazę podstawową obierzemy od razu w wersji poszerzonej, wyczerpującej geometryczne stopnie swobody ustroju ($\bar{n} > d$; $\det \bar{B} = 0$); jest to możliwe ze względu na jednorodny przemieszczeniowy charakter niewiadomych \bar{q} oraz \bar{x} , jednakże liczba równań w zadaniu dynamicznym zwiększa się. Macierzowe równanie ruchu ma wtedy postać

$$\begin{bmatrix} B_{qq} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\bar{q}} \\ \ddot{\bar{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{qq} & C_{qx} \\ C_{xq} & C_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qx} \\ K_{xq} & K_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_q \\ \bar{0} \end{bmatrix}. \quad (3.116)$$

Łatwo wykazać, że jeśli $C = \mu B + \kappa K$, to niewiadome ze zbioru \bar{x} mogą być wyeliminowane.

W przypadku zastosowania metody sił przyjęcie bazy podstawowej od razu w wersji poszerzonej nie jest możliwe ze względu na niejednorodny charakter niewiadomych \bar{q} oraz \bar{x} . W tych okolicznościach należałoby stosować metodę mieszaną.

Problem odkształcalności osiowej

Jeżeli w analizie dynamicznej ustroju prętowego uwzględniamy osiową odkształcalność prętów, dobierając stosownie do tego założenia dostateczną liczbę i rodzaj współrzędnych uogólnionych, to w opisanym poprzednio postępowaniu bierze udział macierz wpływu N i w końcowym etapie obliczeń można wyznaczyć siły przekrojowe łącznie z siłami osiowymi. Jeśli zaś wpływ odkształcalności osiowej prętów ma być pominięty, procedurę metody sił i metody przemieszczeń należy zmodyfikować. Przede wszystkim wzory (3.95), (3.98), (3.106) i (3.107) należy ograniczyć jedynie do członu momentowego, a zatem wyznaczanie macierzy wpływu N jest zbędne (w metodzie przemieszczeń nawet nie jest możliwe). Współrzędne uogólnione należy dobrać z uwzględnieniem założenia o osiowej nieodkształcalności prętów. Rozmiar równań ruchu się zmniejsza i obliczenia są prostsze, nie można jednak w jednolitym algorytmie uzyskać poprawnego rozkładu sił osiowych (wzory (3.97), (3.109), (3.112) przestają być aktualne).

W przypadku metody sił konflikt polega na tym, że uogólnione obciążenie kinetyczne \bar{Q} jest ekwiwalentne z rzeczywistym obciążeniem lokalnym jedynie w aspekcie rozkładu momentów gnących i sił tnących. Prawidłowy obraz sił osiowych uzyskuje się dopiero po obciążeniu ustroju siłami kinetycznymi w bazie lokalnej \bar{u} . Jeśli akceptujemy model tłumienia wewnętrznego, to lokalne obciążenie kinetyczne ogólnie wyraża się wzorem

$$\bar{U} = \bar{P} - \{m\}\ddot{\bar{u}} = \bar{P} - \{m\}_M \ddot{\bar{u}}. \quad (3.117)$$

W przypadku stacjonarnych drgań wymuszonych harmonicznie

$$\bar{U} = \bar{F} + p^2 \{m\} A_m \bar{q}, \quad (3.118)$$

jeśli natomiast $\gamma = 0$ i korzystamy z równania (3.71), to

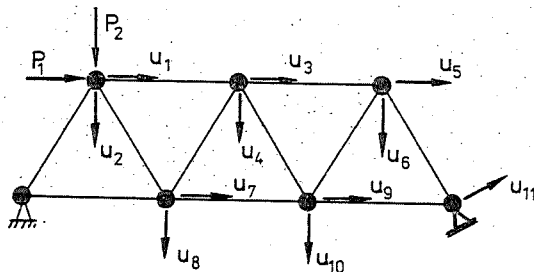
$$\bar{U} = \bar{F} + p^2 \{m\} A_m B \bar{q}. \quad (3.119)$$

Znając lokalne obciążenie kinetyczne \bar{U} , można już bez trudu obliczyć siły osiowe. W zadaniu statycznie niewyznaczalnym należy uwzględnić również siły nadliczbowe \bar{X} .

W przypadku metody przemieszczeń istotą konfliktu jest nieoznaczona wartość iloczynu nieskończenie dużej sztywności osiowej i zerowego wydłużenia pręta. A zatem i w tym przypadku należy obliczyć lokalne obciążenie kinetyczne według wzorów (3.117) lub (3.118), następnie zaś należy wykorzystać postulat równowagi sił działających na myślowo wycięte węzły geometryczne ustroju prętowego. W każdym węźle powinny być spełnione dwa równania równowagi rzutów sił. W równaniach tych wystąpią siłowe elementy wektora \bar{U} , znane przywęzłowe siły tnące oraz nieznanne przywęzłowe siły osiowe. Równania te stanowią podstawę do obliczenia sił osiowych; mogą także posłużyć do kontroli rachunków, jako że liczba równań może okazać się większa od liczby niewiadomych.

3.10. Kratownice

Rozważmy kratownicę statycznie wyznaczalną lub niewyznaczalną, złożoną z prętów przyrzutowych o sztywnościach osiowych EA_j , długościach l_j oraz masach całkowitych m_j , połączonych przegubowymi węzłami. Traktując kratownicę jako układ dyskretny przemodelujemy ją na nieważką sprężystą strukturę kratową, w której węzłach są skoncentrowane masy skupione pozbawione bezwładności obrotowej, jak na rys. 3.8. Masy te reprezentują masę własną i użytkową kratownicy. Każdej masie przyporządkujemy dwie lokalne współrzędne translacyjne (ortokartezjańskie), przy czym masom w węzłach podporowych należy przyporządkować współrzędne z uwzględnieniem występujących tam ograniczeń kinematycznych. Uo-



Rys. 3.8

gólnione współrzędne Lagrange'a najwygodniej w tym przypadku przyjąć zgodnie ze współrzędnymi lokalnymi. Mamy więc

$$\bar{q} = \bar{u}, \quad A_m = I, \quad B = \{m\}. \quad (3.120)$$

Przemodelowanie masy własnej kratownicy polega tu na skupieniu w węzłach połówek mas prętów zbiegających się w danym węźle, stąd

$$b_{i11} = m_i = M_i + \frac{1}{2} \sum_j m_j, \quad (3.121)$$

gdzie M_i jest skupioną masą użytkową skojarzoną ze współrzędną q_i , natomiast sumowanie po j dotyczy wiązki prętów skojarzonych z q_i . Równanie ruchu kratownicy sformułujemy metodą przemieszczeń, należy zatem wyznaczyć macierz sztywności układu. Jako lokalne współrzędne stamu odkształcenia prętów obierzemy wydłużenia prętów Δ_j , które w zbiorze prętów tworzą wektor

$$\bar{\Delta} = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots]^T. \quad (3.122)$$

Wektor ten można przedstawić w formie transformacji współrzędnych Lagrange'a

$$\bar{\Delta} = A_K \bar{q}. \quad (3.123)$$

Energię potencjalną odkształcenia kratownicy określa wzór

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_j \Delta_j^2 EA_j / l_j = \frac{1}{2} \bar{\Delta}^T \{EA/l\} \bar{\Delta} = \frac{1}{2} \bar{q}^T A_K^T \{EA/l\} A_K \bar{q}, \quad (3.124)$$

stąd macierz sztywności

$$K = A_K^T \{EA/l\} A_K. \quad (3.125)$$

Kratownica może być obciążona siłami wzbudzającymi w formie sił skupionych przyłożonych w węzłach. Jeśli siły te określimy w formie wektora \bar{F} w bazie lokalnej \bar{u} , to ze względu na (3.120) otrzymamy $\bar{F} = \bar{F}$. Macierz tłumienia C należy zdefiniować stosownie do wybranego modelu tłumienia. Równanie ruchu ma postać (3.15). Po wyznaczeniu stamu przemieszczenia węzłów należy wyznaczyć stan wyężenia w formie wektora sił w zbiorze prętów.

$$\bar{N}(t) = \{EA/l\} (\bar{\Delta} + u \dot{\bar{\Delta}}) = \{EA/l\} A_K (\bar{q} + u \dot{\bar{q}}). \quad (3.126)$$

W przypadku drgań stacjonarnych wymuszonych harmonicznymi macierz tłumienia można przyjąć według wzoru (3.67). Wtedy

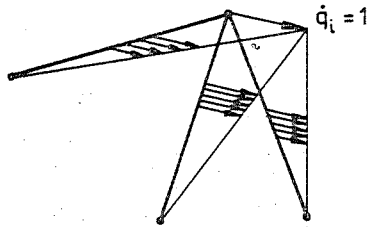
$$\bar{N}_s = \{EA/l\} A_K (\bar{q}_s - \gamma \bar{q}_c), \quad \bar{N}_c = \{EA/l\} A_K (\bar{q}_c + \gamma \bar{q}_s), \quad (3.127)$$

$$\text{am } N_j = \sqrt{N_{js}^2 + N_{jc}^2},$$

przy czym \bar{q}_s, \bar{q}_c spełniają równania (3.44).

Jeśli wpływ tłumienia jest pomijalny, wykorzystamy równania (3.45), a we wzorach (3.127) podstawimy $\gamma = 0$.

Gdy masa własna kratownicy stanowi znaczną część ogólnej masy obiektu, przyjęcie w schemacie dynamicznym mas zgranulowanych w węzłach może okazać się zbyt dużym uproszczeniem. Należy zatem ulepszyć konstrukcję macierzy bezwładności. Pozostawmy w mocy założenia o quasi-statycznym rozkładzie odkształceń prętów kratownicy; przyjmijmy jednak rzeczywisty rozkład jej masy. W tej sytuacji mamy do czynienia ze skalarowym polem masowym (μ) rozpiętym na siatce kratownicy. Zauważmy, że uogólnionej prędkości $\dot{q}_1 = 1$ odpowiada wektorowe pole prędkości \vec{V}_1 rozpięte na siatce kratownicy w zakresie wiązki prętów skojarzonej ze współrzędną q_1 (rys. 3.9). Energia kinetyczna kratownicy wyraża się wzorem



Rys. 3.9

$$E_k = \frac{1}{2} \int (\mu) \left(\sum_i \vec{V}_i \dot{q}_i \right)^2 ds = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \mathbf{B} \dot{\vec{q}}, \quad (3.128)$$

gdzie całkowanie przebiega na grafie struktury kratowej. Stąd

$$b_{ik} = \int (\mu) \vec{V}_i \vec{V}_k ds. \quad (3.129)$$

Wykonanie całkowania daje rezultaty:

dla $i = k$

$$b_{ii} = M_i + \frac{1}{3} \sum_j m_j, \quad (3.130)$$

gdzie sumowanie po j dotyczy wiązki prętów skojarzonych z q_i ;

dla $i \neq k$

$$b_{ik} = \frac{1}{6} m_{(ik)} \cos(q_i, q_k), \quad (3.131)$$

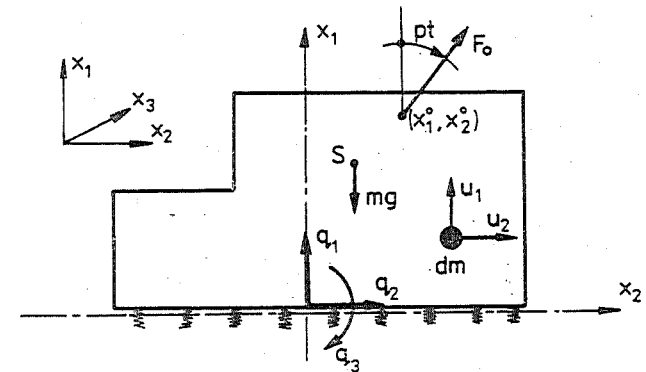
gdzie $m_{(ik)}$ jest masą pręta łączącego węzły skojarzone ze współrzędnymi q_i, q_k . Jeśli węzły te nie są połączone prętem, to oczywiście $m_{(ik)} = 0$. Macierz bezwładności ze względu na (3.131) nie będzie już macierzą diagonalną.

3.11. Bryła na podłożu sprężystym

Jednym z ważnych zagadnień w dynamice budowli jest analiza drgań bryły sztywnej na podłożu sprężystym, bryła taka jest bowiem modelem blokowego fundamentu pod maszyny.

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 3.10 i przyjmijmy następujące założenia:

- podstawa bryły leży w poziomej płaszczyźnie x_2x_3 , przy czym osie x_2, x_3 są głównymi centralnymi osiami podstawy,
- układ jest symetryczny względem płaszczyzny x_1x_2 w zakresie rozkładu mas, sił wzbudzających i cech podłoża,
- podłoże sprężyste jest nieinercyjne i charakteryzuje się modułami sztywności k_1, k_2 przy przesuwie w kierunku x_1, x_2 oraz modułem k_3 przy obrocie wokół osi x_3 ,
- drgania są wymuszone harmonicznie siłą wirującą w płaszczyźnie x_1x_2 .



Rys. 3.10

Uwzględniając przyjęte założenia problem można sprowadzić do analizy drgań płaskich w płaszczyźnie x_1x_2 , opisanych trzema współrzędnymi uogólnionymi, jak na rys. 3.10. Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne ma postać

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2^0 \\ 0 & 1 & x_1^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \mathbf{A}_m \vec{q}. \quad (3.132)$$

Energję kinetyczną układu opisuje wzór

$$E_k = \frac{1}{2} \int (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) dm = \frac{1}{2} \int \dot{\vec{u}}^T \dot{\vec{u}} dm = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \int \mathbf{A}_m^T \mathbf{A}_m dm \dot{\vec{q}}, \quad (3.133)$$

przy czym

$$\mathbf{A}_{mm}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.134)$$

Macierz bezwładności ma zatem postać

$$\mathbf{B} = \int \mathbf{A}_{mm}^T dm = \begin{bmatrix} m & 0 & -S_{13} \\ 0 & m & S_{23} \\ -S_{13} & S_{23} & \frac{m}{3} \end{bmatrix}, \quad (3.135)$$

gdzie m - masa bryły, S_{ij} - moment statyczny masy bryły względem płaszczyzny $x_i x_j$, $J_3^m = J_{23}^m + J_{13}^m$ - moment bezwładności masy bryły względem osi x_3 .

Energia potencjalna odkształcenia podłoża wynosi

$$E_p = \frac{1}{2}(k_1 A q_1^2 + k_2 A q_2^2 + k_3 J_3 q_3^2), \quad (3.136)$$

stąd macierz sztywności

$$\mathbf{K} = \text{diag}(k_1 A, k_2 A, k_3 J_3), \quad (3.137)$$

gdzie A - pole podstawy bryły, J_3 - moment bezwładności pola podstawy względem osi x_3 .

Macierz tłumienia należy przyjąć stosownie do wybranego modelu tłumienia (zakłada się zwykle tłumienie materiałowe w podłożu; $C = \kappa K$).

Praca siły wzbudzającej

$$\begin{aligned} L &= (q_1 - x_2^0 q_3) F_0 \cos pt + (q_2 + x_1^0 q_3) F_0 \sin pt = \\ &= q_1 F_0 \cos pt + q_2 F_0 \sin pt + q_3 (x_1^0 F_0 \sin pt - x_2^0 F_0 \cos pt), \end{aligned} \quad (3.138)$$

stąd wektor uogólnionych sił wzbudzających

$$\bar{\mathbf{F}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} F_0 \sin pt + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -x_2 \end{bmatrix} F_0 \cos pt. \quad (3.139)$$

Równanie ruchu ma znaną postać

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \bar{\mathbf{F}}(t). \quad (3.140)$$

Ciążar bryły drgającej jest na ogół znaczny, wskazane jest zatem ująć w rachunku pewien efekt drugiego rzędu, polegający na uwzględnieniu dodatkowego momentu od siły ciężkości zaczepionej w ruchomym środ-

ku ciężkości. Wynika stąd dodatkowy wektor sił wzbudzających

$$\Delta \bar{\mathbf{F}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgr_1^s q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_{23} g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

Poprawkę tę należy przenieść na lewą stronę równania ruchu i związać z blokiem sztywności. Otrzymujemy w ten sposób uzupełnioną postać macierzy sztywności

$$\tilde{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_1 A, k_2 A, k_3 J_3 - S_{23} g). \quad (3.142)$$

Rozwiązanie równania drgań wymuszonych (metodą bezpośrednią lub metodą transformacji własnej) daje w wyniku wektor $\bar{\mathbf{q}}$, na którego podstawie możemy obliczyć wektor uogólnionych obciążeń kinetycznych

$$\bar{\mathbf{Q}}(t) = \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{B}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{p}^2 \mathbf{B}\bar{\mathbf{q}}. \quad (3.143)$$

Elementy tego wektora są uogólnionymi siłami dynamicznego działania bryły na podłoże. I tak: Q_1 jest siłą normalną do podstawy bryły, Q_2 - siłą styczną, Q_3 zaś jest momentem względem osi x_3 . Znając te siły można już wyznaczyć dynamiczne naprężenia (zwłaszcza normalne) w płaszczyźnie kontaktu bryły z podłożem, przy czym należy obliczać oddzielnie naprężenia w zakresie sinusowym i cosinusowym. Dopiero te wyniki powinny być sprowadzone do wartości amplitudalnej

$$\text{am } \sigma = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_c^2}. \quad (3.144)$$

Wektor $\bar{\mathbf{q}}$ stanowi również podstawę do obliczenia lokalnych przemieszczeń wybranych punktów bryły, według wzoru (3.132). Obliczając w wybranym punkcie lokalne amplitudy kartezjańskie

$$\text{am } u_1 = \sqrt{u_{1s}^2 + u_{1c}^2}, \quad \text{am } u_2 = \sqrt{u_{2s}^2 + u_{2c}^2}, \quad (3.145)$$

określamy klatkę trajektorii ruchu badanego punktu. Trajektorja ta w przypadku ustalonych drgań harmoniczných jest elipsą wpisaną w klatkę (rys. 3.11). Należy zwrócić uwagę na to, że wymiary klatki są zależne od kierunków współrzędnych lokalnych, podczas gdy sama trajektorja jest figurą inwariantną, a więc opisującą zachowanie się punktu w sposób obiektywny. Interesujące są zatem charakterystyki trajektorii, a zwłaszcza orientacja osi głównych oraz długości półosi elipsy, zwanych amplitudami głównymi. Wywód jest następujący:

$$\begin{aligned}
 u^2(t) &= u_1^2 + u_2^2 = \bar{u}^T \bar{u} = \\
 &= (\bar{u}_s^T \sin pt + \bar{u}_c^T \cos pt)(\bar{u}_s \sin pt + \bar{u}_c \cos pt) = \\
 &= \bar{u}_s^T \bar{u}_s \sin^2 pt + \bar{u}_c^T \bar{u}_c \cos^2 pt + \bar{u}_s^T \bar{u}_c \sin 2pt = \\
 &= \frac{1}{2} \bar{u}_s^T \bar{u}_s (1 - \cos 2pt) + \frac{1}{2} \bar{u}_c^T \bar{u}_c (1 + \cos 2pt) + \bar{u}_s^T \bar{u}_c \sin 2pt = \\
 &= \frac{1}{2} (\bar{u}_c^T \bar{u}_c + \bar{u}_s^T \bar{u}_s) + \frac{1}{2} (\bar{u}_c^T \bar{u}_c - \bar{u}_s^T \bar{u}_s) \cos 2pt + \bar{u}_s^T \bar{u}_c \sin 2pt = \\
 &= \frac{1}{2} (\bar{u}_c^T \bar{u}_c + \bar{u}_s^T \bar{u}_s) + \sqrt{\frac{1}{4} (\bar{u}_c^T \bar{u}_c - \bar{u}_s^T \bar{u}_s)^2 + (\bar{u}_s^T \bar{u}_c)^2} \cos(2pt - 2\theta),
 \end{aligned} \quad (3.146)$$

gdzie

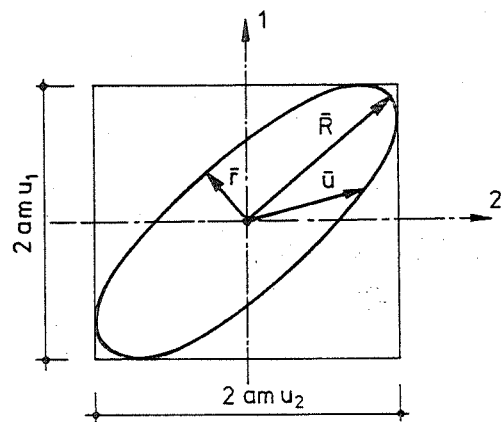
$$2\theta = \arctg \frac{2\bar{u}_s^T \bar{u}_c}{\bar{u}_c^T \bar{u}_c - \bar{u}_s^T \bar{u}_s}. \quad (3.147)$$

Wobec tego

$$\left. \begin{aligned} R &= \max u(t) \\ r &= \min u(t) \end{aligned} \right\} = \sqrt{\frac{1}{2} (\bar{u}_c^T \bar{u}_c + \bar{u}_s^T \bar{u}_s)} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\bar{u}_c^T \bar{u}_c - \bar{u}_s^T \bar{u}_s)^2 + (\bar{u}_s^T \bar{u}_c)^2} \quad (3.148)$$

Wzór powyższy określa wartości amplitud głównych, nie określa jednak ich orientacji geometrycznej. Zauważmy, że główna amplituda maksymalna wystąpi w przypadku $\cos(2pt - 2\theta) = 1$, a więc przy $pt = \theta$. Wtedy

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \bar{u}_s \sin \theta + \bar{u}_c \cos \theta. \quad (3.149)$$



Rys. 3.11

Głównej amplitudzie minimalnej odpowiada $\cos(2pt - 2\theta) = -1$, a więc $pt = \theta + \pi/2$. Stąd

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \bar{u}_s \cos \theta - \bar{u}_c \sin \theta. \quad (3.150)$$

Wzory (3.149) i (3.150) opisują amplitudy główne w sensie wektorowym (przez ich rzuty na osie x_1, x_2), co umożliwia określenie geometrycznej orientacji trajektorii ruchu. Ponadto zamiast wzoru (3.148) można wykorzystać relacje

$$R = \sqrt{\bar{R}^T \bar{R}}, \quad r = \sqrt{\bar{r}^T \bar{r}}. \quad (3.151)$$

3.12. Wykorzystanie analizy wymiarowej

Omawiając rozmaite zagadnienia dynamiki budowli operowaliśmy formułami, w których występują wymiarowe parametry obiektu i obciążenia. Formuły te można wykorzystać do rozwiązywania zadań liczbowych operując konsekwentnie liczbowymi wartościami wielkości wymiarowych w konwencjonalnym układzie jednostek fizycznych SI. Jednostki te nie muszą być explicite wypisywane w rachunkach pośrednich, można bowiem łatwo przewidzieć miarę wyników końcowych. Dzięki temu możliwe jest operowanie zbiorami (wektorami, macierzami) o elementach niewspółmiernych (np. translacje i rotacje), co jest ważne zwłaszcza w przypadku stosowania techniki komputerowej. Jeśli przedmiotem analizy jest obiekt opisany parametrami ogólnymi (tzn. nieliczbowymi), zadanie może być rozwiązywane analogicznie pod warunkiem, że znane są proporcje w każdej wymiarowo jednorodnej grupie parametrów. Obieramy w tym celu wzorzec stanowiący podstawę zdefiniowania niekonwencjonalnych jednostek długości (\mathcal{L}), masy (\mathcal{M}) i czasu (\mathcal{T}), co umożliwia zdefiniowanie jednostek pochodnych potrzebnych do opisu wielkości na wejściu i na wyjściu. Rachunki pośrednie można wtedy wykonywać na niemianowanych wartościach liczbowych, analogicznie jak podczas operowania układem konwencjonalnym.

W przypadku analizy dynamicznej belek i ram za wzorzec przyjmuje się zwykle porównawczą długość l_0 , przekrojącą sztywność giętą EJ_0 oraz porównawczą masę skupioną m_0 . Z zależności

$$l_0 = \mathcal{L}, \quad m_0 = \mathcal{M}, \quad EJ_0 = \mathcal{M} \mathcal{L}^3 \mathcal{T}^{-2} \quad (3.152)$$

wynika, że niekonwencjonalnymi jednostkami podstawowymi są

$$\mathcal{L} = l_0, \quad \mathcal{M} = m_0, \quad \mathcal{T} = \sqrt{m_0 l_0^3 / EJ_0}. \quad (3.153)$$

Jednostki niekonwencjonalne występujące w analizie belek i ram są zestawione w tabeli 3.1.

T a b e l a 3.1

Jednostki niekonwencjonalne dla belek i ram

| Rodzaj wielkości | Wymiar formalny | Jednostka |
|---------------------------------------|-----------------|-------------------------|
| Długość; przemieszczenie translacyjne | L | l_0 |
| Przemieszczenie rotacyjne | 1 | 1 |
| Przekrojowa sztywność giętna | ML^3T^{-2} | EJ_0 |
| Masa skupiona | M | m_0 |
| Moment bezwładności masy | ML^2 | $m_0 l_0^2$ |
| Siła skupiona; osiowa, tnąca | MLT^{-2} | EJ_0/l_0^2 |
| Moment skupiony; giący | ML^2T^{-2} | EJ_0/l_0 |
| Częstość kołowa | T^{-1} | $\sqrt{EJ_0/m_0 l_0^3}$ |

Sztywność osiowa prętów należy wyrazić w postaci

$$EA = s \frac{EJ_0}{l_0^2}, \quad (3.154)$$

gdzie parametr bezwymiarowy

$$s = 1 \sqrt{A/J_0} \quad (3.155)$$

jest smukłością pręta w płaszczyźnie obciążenia.

W analizie drgań wywołanych siłami zbudzającymi wygodnie jest wprowadzić niezależną jednostkę siły $\mathcal{P} = P_0$ do opisu obciążenia. W tym przypadku wyniki proporcjonalne do obciążenia (np. przemieszczenia i siły przekrojowe w procesach niestacjonarnych z zerowymi warunkami początkowymi i w harmonicznych procesach stacjonarnych) należy dodatkowo pomnożyć przez

$$\mathcal{P} M^{-1} L^{-1} T^{-2} = P_0 l_0^2 / EJ_0. \quad (3.156)$$

W przypadku analizy dynamicznej kratewnic bierzemy zwykle porównawczą długość l_0 , przekrojową sztywność osiową EJ_0 oraz porównawczą masę skupioną m_0 . Niekonwencjonalnymi jednostkami podstawowymi są

$$L = l_0, \quad M = m_0, \quad T = \sqrt{m_0 l_0 / EJ_0}. \quad (3.157)$$

Jednostki występujące w analizie kratewnic są zestawione w tabeli 3.2.

T a b e l a 3.2

Jednostki niekonwencjonalne dla kratewnic

| Rodzaj wielkości | Wymiar formalny | Jednostka |
|--|-----------------|-----------------------|
| Długość; przemieszczenie translacyjne | L | l_0 |
| Przekrojowa sztywność osiowa; siła skupiona; siła osiowa | MLT^{-2} | EA_0 |
| Masa skupiona | M | m_0 |
| Częstość kołowa | T^{-1} | $\sqrt{EA_0/m_0 l_0}$ |

Jeśli do opisu sił zbudzających wprowadzimy niezależną jednostkę $\mathcal{P} = P_0$, to wyniki proporcjonalne do obciążenia należy dodatkowo pomnożyć przez

$$\mathcal{P} M^{-1} L^{-1} T^{-2} = P_0 / EA_0. \quad (3.158)$$

W przypadku analizy drgań bryły na podłożu sprężystym bierzemy długość porównawczą l_0 , gęstość masy ρ_0 oraz porównawczą sztywność podłoża k_0 . Niekonwencjonalnymi jednostkami podstawowymi są

$$L = l_0, \quad M = \rho_0 l_0^3, \quad \mathcal{P} = \sqrt{\rho_0 l_0 / k_0}. \quad (3.159)$$

Jednostki występujące w analizie drgań bryły są zestawione w tabeli 3.3.

T a b e l a 3.3

Jednostki niekonwencjonalne dla bryły

| Rodzaj wielkości | Wymiar formalny | Jednostka |
|---------------------------------------|-----------------|---------------------------|
| Długość; przemieszczenie translacyjne | L | l_0 |
| Przemieszczenie rotacyjne | 1 | 1 |
| Gęstość masy | ML^{-3} | ρ_0 |
| Sztywność podłoża | $ML^{-2}T^{-2}$ | k_0 |
| Siła skupiona | MLT^{-2} | $k_0 l_0^3$ |
| Moment skupiony | ML^2T^{-2} | $k_0 l_0^4$ |
| Napężenie | $ML^{-1}T^{-2}$ | $k_0 l_0$ |
| Częstość kołowa | T^{-1} | $\sqrt{k_0 / \rho_0 l_0}$ |

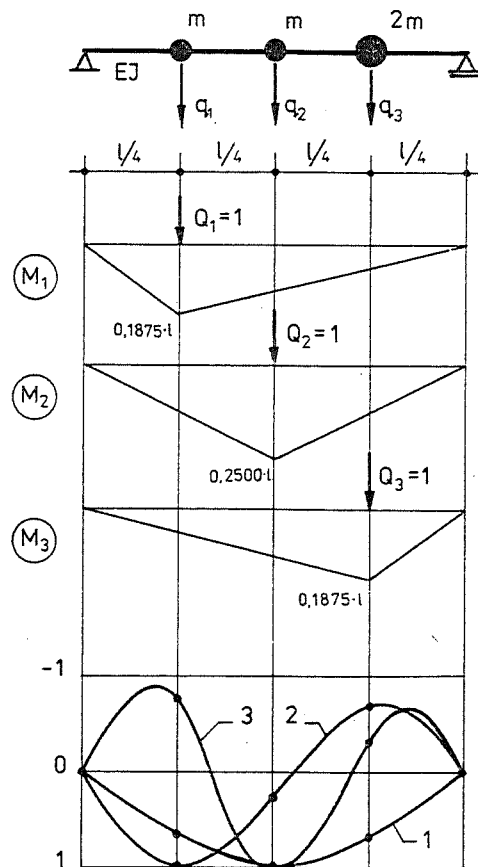
Jeżeli do opisu siły wzbudzającej wprowadzimy niezależną jednostkę $\mathcal{P} = P_0$, to wyniki proporcjonalne do obciążenia należy dodatkowo pomnożyć przez

$$\mathcal{P} M^{-1} \mathcal{L}^{-1} \tau^2 = P_0 / k_0 l_0^3. \quad (3.160)$$

Należy pamiętać o tym, aby w przypadku korzystania z (3.142) przyspieszenie ziemskie g zostało wyrażone liczbowo w jednostkach $\mathcal{L} \tau^{-2} = k_0 / \rho_0$. Wartość liczbowa tej jednostki powinna być zadeklarowana w m/s^2 .

3.13. Przykłady liczbowe

PRZYKŁAD 3.13.1



Rys. 3.12

Dana jest swobodnie podparta belka pryzmatyczna, jak na rys. 3.12. Masa własna i użytkowa zostały zastąpione trzema masami skupionymi. Należy rozwiązać zagadnienie własne, pomijając odkształcalność osiową belki. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej.

Rozwiązanie

Jako wielkości porównawcze bierzemy l , EJ , m . Trzema masami skupionymi przyporządkowujemy trzy współrzędne lokalne. Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody. Współrzędne uogólnione bierzemy zgodnie z lokalnymi, a więc $\bar{q} = \bar{u}$, $A_m = I$,

$$B = \{m\} = \text{diag}(1 \ 1 \ 2).$$

Układ jest statycznie wyznaczalny; wybieramy metodę sił. Sporządzamy wykresy momentów gnących M_1 od $Q_1 = 1$ (rys. 3.12) i wyznaczamy macierz podatności w bazie \bar{q} sposobem Werszszagina. Wynik ma postać

$$D = \begin{bmatrix} 0,011719 & 0,014323 & 0,009115 \\ 0,014323 & 0,020833 & 0,014323 \\ 0,009115 & 0,014323 & 0,011719 \end{bmatrix}.$$

Dalej obliczamy

$$DB = \begin{bmatrix} 0,011719 & 0,014323 & 0,018230 \\ 0,014323 & 0,020833 & 0,028646 \\ 0,009115 & 0,014323 & 0,023438 \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne zagadnienia własnego, po skrótownym oznaczeniu $\omega^2 = \lambda$, ma postać $\det(DB - \lambda I) = 0$, a po rozwinięciu

$$\lambda^3 - (5,5990E-2)\lambda^2 + (2,2548E-4)\lambda - (1,2363E-7) = 0.$$

Pierwiastki równania i częstości kołowe są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 0,0516726 \longrightarrow \omega_1 = 4,3992 \\ \lambda_2 &= 0,0036645 \longrightarrow \omega_2 = 16,519 \\ \lambda_3 &= 0,0006529 \longrightarrow \omega_3 = 39,136 \end{aligned} \right\} \cdot \sqrt{EJ/ml^3}.$$

Wyznaczenie wektora własnego \bar{w}_1 :

$$(DB - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -0,039954 & 0,014323 & 0,018230 \\ 0,014323 & -0,030840 & 0,028646 \\ 0,009115 & 0,014323 & -0,028235 \end{bmatrix},$$

$$\text{adj}(DB - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 0,00046047 & . & . \\ 0,00066552 & . & . \\ 0,00048625 & . & . \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 0,6919 \\ 1,0000 \\ 0,7306 \end{bmatrix}.$$

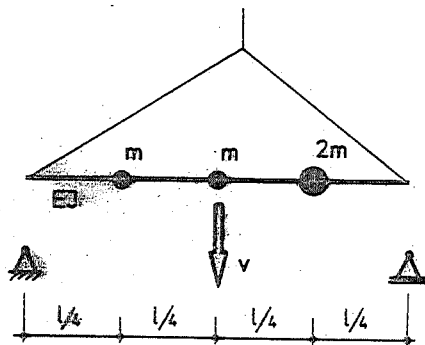
Analogicznie, wykorzystując λ_2 i λ_3 , wyznacza się pozostałe wektory własne. Macierz własna ostatecznie ma postać

$$W = \begin{bmatrix} 0,6919 & 1,0000 & -0,7588 \\ 1,0000 & 0,3120 & 1,0000 \\ 0,7306 & -0,6870 & -0,3251 \end{bmatrix}.$$

Obrazy głównych form drgań są przedstawione na rys. 3.12.

PRZYKŁAD 3.13.2

Belka opisana w przykładzie 3.13.1 jest podczas montażu opuszczana na podpory z prędkością v (rys. 3.13). Należy wyznaczyć przebieg czasowy obciążenia kinetycznego od chwili ustawienia belki na podporach. Tłumienie pominać.



Rys. 3.13

Rozwiązanie

Belka od chwili ustawienia na podporach wykonuje drgania swobodne zainicjowane początkowym pędem mas poruszających się z prędkością v . Obciążeniem kinetycznym są siły bezwładności. Z wzoru (3.35) wynika, że przy $\ddot{q}_0 = 0$

$$\ddot{q}(t) = W \left\{ \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right\} W^{-1} \dot{q}_0.$$

Jednocześnie wiadomo, że $W^{-1} = \{m^0\}^{-1} W^T B$, a więc

$$\ddot{q}(t) = -B \ddot{q} = (BW) \{ \omega \sin \omega t \} \{m^0\}^{-1} (BW)^T \dot{q}_0.$$

Przebieg obliczeń jest następujący:

$$B = \text{diag}(1 \quad 1 \quad 2) \cdot m,$$

$$BW = \begin{bmatrix} 0,6919 & 1,0000 & -0,7588 \\ 1,0000 & 0,3120 & 1,0000 \\ 1,4612 & -1,3740 & -0,6502 \end{bmatrix} \cdot m,$$

$$\{m^0\} = W^T BW = \begin{bmatrix} 2,5463 & 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0001 & 2,0413 & -0,0001 \\ 0,0000 & -0,0001 & 1,7872 \end{bmatrix} \cdot m \approx$$

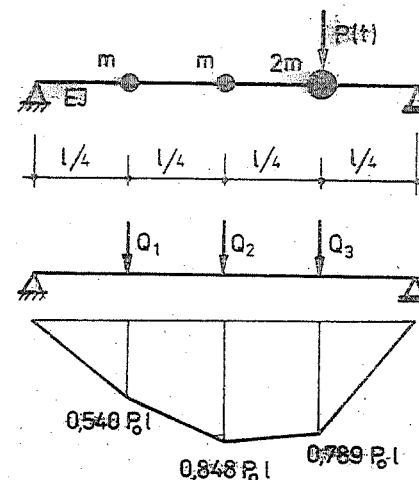
$$\approx \text{diag}(2,5463 \quad 2,0413 \quad 1,7872) \cdot m,$$

$$\{m^0\}^{-1} = \text{diag}(0,3927 \quad 0,4899 \quad 0,5595) \cdot \frac{1}{m},$$

$$\dot{q} = [1 \quad 1 \quad 1]^T \cdot v,$$

$$\ddot{q}(t) = \begin{bmatrix} 3,7692 \sin \omega_1 t - 0,5017 \sin \omega_2 t + 6,7960 \sin \omega_3 t \\ 5,4476 \sin \omega_1 t - 0,1565 \sin \omega_2 t - 8,9563 \sin \omega_3 t \\ 7,9604 \sin \omega_1 t + 0,6893 \sin \omega_2 t + 5,8234 \sin \omega_3 t \end{bmatrix} \cdot v \sqrt{EJm/l^3}.$$

PRZYKŁAD 3.13.3



Rys. 3.14

Belka określona w przykładzie 3.13.1 jest poddana działaniu siły wzbudzającej $P = P \sin pt$, jak na rys. 3.14. Należy wyznaczyć obwiednię dynamicznych momentów gnących. Tłumienie pominać. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej, przyjmując $p = 4\sqrt{EJ/ml^3}$.

R o z w i ą z a n i e

Tak jak poprzednio, jako wielkości porównawcze obieramy 1, EJ, m oraz dodatkowo P_0 . Wektor uogólnionych obciążeń ma postać $\bar{F}_s = \bar{F}_s = [0 \ 0 \ 1]^T$, $\bar{F}_0 = \bar{0}$.

Ponieważ tłumienie pomijamy, można wykorzystać równanie $(I - p^2 BD)\bar{Q}_s = \bar{F}_s$, przyjmując w obliczeniach $p = 4$ i uwzględniając $BD = (DE)^T$. Układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} 0,8125 & -0,2292 & -0,1458 \\ -0,2292 & 0,6667 & -0,2292 \\ -0,2917 & -0,4583 & 0,6250 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{1s} \\ Q_{2s} \\ Q_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a stąd

$$\bar{Q}_s = \begin{bmatrix} 0,9269 \\ 1,3598 \\ 3,0291 \end{bmatrix} \cdot P_0, \quad \bar{Q}_0 = \bar{0}.$$

Schemat obciążenia kinetycznego i wykres momentów gnących jest przedstawiony na rys. 3.14. W rozważanym przypadku $am M = M_s$. Obwiednię dynamicznych momentów gnących uzyskamy uzupełniając wykres $am M$ lustrzanym odbiciem po stronie rzędnych ujemnych.

PRZYKŁAD 3.15.4

Na nieważkiej swobodnie podpartej belce spoczywa urządzenie o masie m , centralnym momencie bezwładności $J^m = 0,01 \text{ ml}^2$, poddane działaniu siły F_0 wirującej z częstością kątową p (rys. 3.15). Metodą przemieszczeń należy napisać równania stacjonarnych drgań wymuszonych. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej, przyjmując $h_0 = h_1 = 0,1 \text{ l}$, $a = 0,4 \text{ l}$, $b = 0,6 \text{ l}$, $p = 5 \sqrt{EJ/\text{ml}^3}$, $\gamma = 0,04$ (tłumienie wewnętrzne). Osiową odkształcalność belki pominąć.

R o z w i ą z a n i e

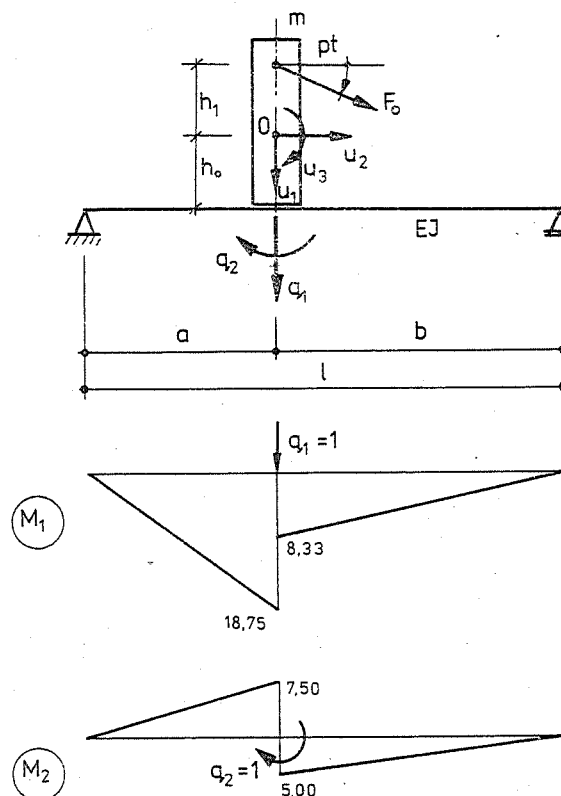
Jako wielkości porównawcze obieramy 1, EJ, m, F_0 . Przyjmujemy współrzędne lokalne ruchu środka masy \bar{u} oraz dwuelementowy wektor współrzędnych Lagrange'a \bar{q} , jako że układ ma dwa dynamiczne stopnie swobody.

Diagonalna macierz mas w bazie \bar{u} :

$$\{m\} = \text{diag}(1 \quad 1 \quad 0,01).$$

Macierz transformacji współrzędnych uogólnionych na lokalne:

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Rys. 3.15

Macierz bezwładności w bazie \bar{q} :

$$B = A_m^T \{m\} A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Wektor obciążeń w bazie współrzędnych lokalnych \bar{u} :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & \sin pt \\ 1 & -\cos pt \\ 0,1 & \cos pt \end{bmatrix}.$$

Wektor obciążeń uogólnionych w bazie \bar{q} :

$$\bar{F} = A_m^T \bar{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sin pt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \cdot \cos pt.$$

W celu wyznaczenia macierzy sztywności sporządzamy wykresy momentów M_1 od $q_1 = 1$, $q_2 = 0$ oraz M_2 od $q_1 = 0$, $q_2 = 1$. Po obliczeniu całek Mohra otrzymujemy macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} 60,764 & -10,417 \\ -10,417 & 12,500 \end{bmatrix}.$$

Macierz tłumienia według (3.67) przyjmujemy $C = \frac{\gamma}{p} K$, a stąd $pC = \gamma K = 0,04 K$. Równanie stacjonarnych drgań wymuszonych ma postać ogólną (3.44). Po wykonaniu działań otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} 35,764 & -10,417 & -2,431 & 0,417 \\ -10,417 & 12,000 & 0,417 & -0,500 \\ 2,431 & -0,417 & 35,764 & -10,417 \\ -0,417 & 0,500 & -10,417 & 12,000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_s \\ \bar{q}_s \\ \bar{q}_s \\ \bar{q}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

Jednostką wymiarową przemieszczeń q_{1s} , q_{1c} jest $F_0 l^3/EJ$, natomiast przemieszczeń q_{2s} , q_{2c} jest $F_0 l^2/EJ$. Wykresy momentów gnących możemy wyznaczyć korzystając z (3.111), a więc

$$M_s = [M_1, M_2] \cdot (\bar{q}_s - \gamma \bar{q}_c),$$

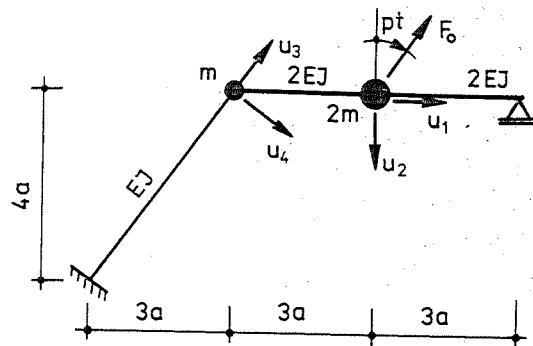
$$M_c = [M_1, M_2] \cdot (\bar{q}_c + \gamma \bar{q}_s),$$

$$M = \sqrt{M_s^2 + M_c^2}.$$

Uzyskane z obliczeń wartości liczbowe momentów gnących należy pomnożyć przez $F_0 l$. Omówiony przykład jest dokładniejszym ujęciem problemu poruszonego w przykładzie 2.12.3.

PRZYKŁAD 3.13.5

Dana jest rama zbudowana z pryzmatycznych prętów, jak na rys. 3.16. Masa własna i użytkowa zostały zastąpione dwiema centrycznymi masami skupionymi o pomijalnej bezwładności obrotowej. Jedna z mas jest



Rys. 3.16

obciążona siłą F_0 wirującą z częstością kątową $p = 0,82 \omega_1$. Należy wyznaczyć częstości drgań własnych, rozwiązać zagadnienie stacjonarnych drgań wymuszonych oraz sporządzić wykresy dynamicznych sił przekrojowych. Wpływ tłumienia i osiowej odkształcalności prętów pominąć. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej.

Rozwiązanie

Jako wielkości porównawcze bierzemy a , EJ , m , F_0 . Przyjmujemy cztery współrzędne lokalne, jak na rys. 3.16. Diagonalna macierz mas w bazie \bar{u} ma postać

$$\{m\} = \text{diag}(2 \ 2 \ 1 \ 1).$$

W przypadku uwzględniania odkształcalności osiowej prętów wszystkie współrzędne lokalne byłyby niezależne, układ miałby cztery stopnie swobody i należałoby przyjąć $\bar{q} = \bar{u}$, $B = \{m\}$. Jeśli zaś pominiemy wpływ osiowej odkształcalności prętów, to $u_3 = 0$ oraz $u_4 = \frac{5}{4} u_1$. Rozważany układ ma więc w tym przypadku dwa dynamiczne stopnie swobody i można przyjąć $q_1 = u_1$ oraz $q_2 = u_2$. Stąd

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1,25 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = A_m^T \{m\} A_m = \begin{bmatrix} 3,5625 & 0 \\ 0 & 2,0000 \end{bmatrix}.$$

Obciążenie wzbudające w bazie lokalnej ma postać

$$\bar{F} = [\sin pt \quad -\cos pt \quad 0 \quad 0]^T,$$

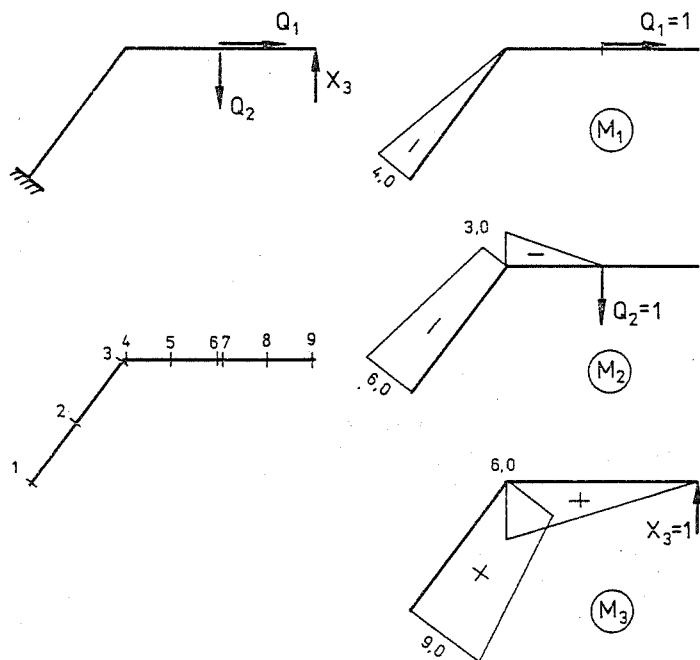
a w bazie współrzędnych uogólnionych

$$\bar{F} = A_m^T \bar{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos pt.$$

W przypadku zastosowania metody sił należy wyznaczyć macierz podatności D w bazie \bar{q} . Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, przetniemy zatem jedną więź nadliczbową, obierzemy dodatkową współrzędną x_3 i sporządzimy wykresy momentów od sił $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$, $X_3 = 1$, (rys. 3.17). Wykresów sił osiowych nie sporządzamy, jako że pomijamy wpływ odkształceń osiowych. Następnie bierzemy na siatce prętów zbiór przekrojów obliczeniowych (rys. 3.17). W poszerzonej bazie współrzędnych przygotowujemy macierz wpływu N_a oraz macierz diagonalną $\{r1/6EJ\}$:

$$N_a^T = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -4,5 & -3 & -3 & -1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7,5 & 6 & 6 & 4,5 & 3 & 3 & 1,5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{r1/6EJ\} = \text{diag}\left(\frac{5}{6} \ \frac{10}{3} \ \frac{2}{6} \ \frac{1}{4} \ 1 \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ 1 \ \frac{1}{4}\right)$$



Rys. 3.17

i obliczamy poszerzoną macierz podatności

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{qq} & D_{qx} \\ D_{xq} & D_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26,667 & 50,000 & -80,000 \\ 50,000 & 109,500 & -183,750 \\ -80,000 & -183,750 & 321,000 \end{bmatrix}.$$

Macierz podatności w bazie \bar{q} ma postać

$$D = D_{qq} - D_{qx} D_{xx}^{-1} D_{xq} = \begin{bmatrix} 6,729 & 4,206 \\ 4,206 & 4,316 \end{bmatrix}.$$

Przydatny będzie również iloczyn

$$DB = \begin{bmatrix} 23,972 & 8,412 \\ 14,984 & 8,632 \end{bmatrix}.$$

Oznacząc dla skrócenia zapisu $\omega^2 = \lambda$, otrzymamy równanie częstości

$$\det(DB - \lambda I) = \begin{vmatrix} 23,972 - \lambda & 8,412 \\ 14,984 & 8,632 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 32,604\lambda + 80,881 = 0.$$

Wartości własne i częstości drgań własnych wynoszą odpowiednio:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 29,8988 & \omega_1 &= 0,1829 \\ \lambda_2 &= 2,7052 & \omega_2 &= 0,6080 \end{aligned} \right\} \cdot \sqrt{EJ/ma^3}.$$

Wobec tego $p = 0,82 \cdot 0,1829 \sqrt{EJ/ma^3} = 0,15 \sqrt{EJ/ma^3}$.

Obciążenie kinetyczne działające w procesie drgań wymuszonych obliczymy wprost z równania typu $(I - p^2 BD)\bar{Q} = \bar{F}$, uwzględniając związek $BD = (2B)^T$. Po wykonaniu działań otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} 0,4606 & -0,3371 \\ -0,1893 & 0,8058 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos pt,$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 2,622 \\ 0,616 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} -1,097 \\ -1,499 \end{bmatrix} \cos pt.$$

Dodatkowo obliczymy

$$\bar{X} = [\bar{x}_3] = -D_{xx}^{-1} D_{xq} \bar{Q} = [1,006] \sin pt + [-1,131] \cos pt.$$

Obciążenie kinetyczne w bazie poszerzonej wynosi

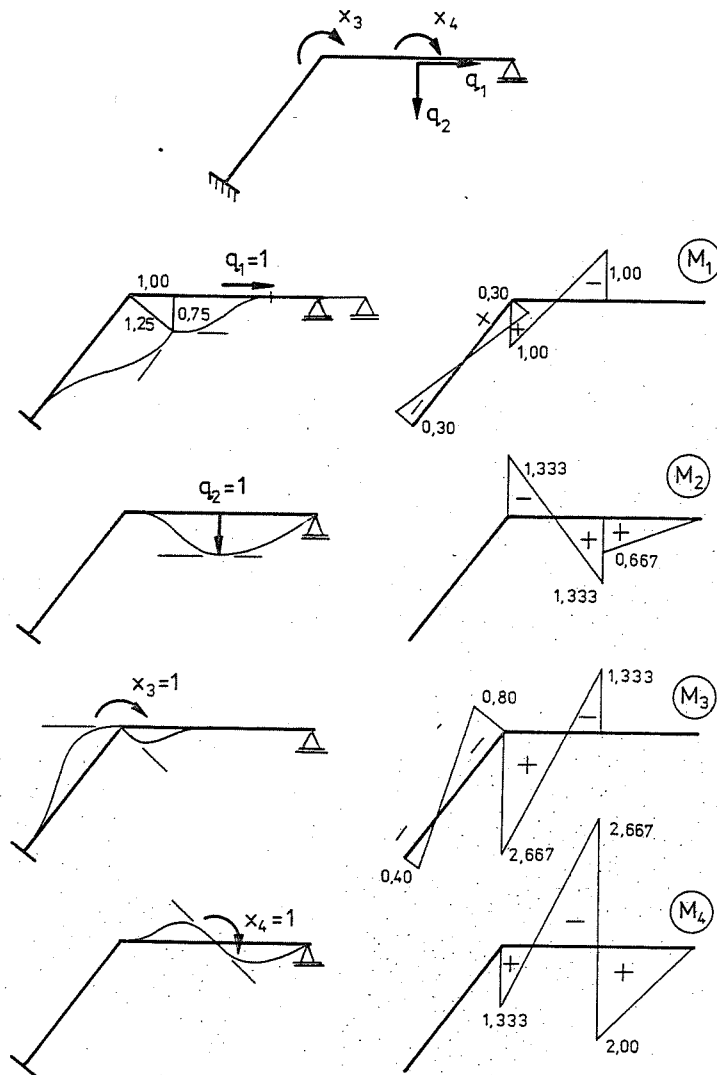
$$\bar{Q}_s = \begin{bmatrix} 2,622 \\ 0,616 \\ 1,006 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_c = \begin{bmatrix} -1,097 \\ -1,499 \\ -1,131 \end{bmatrix}.$$

Momenty gnące (w pełnym zbiorze przekrojów) i siły tnące (w podzbiorze przekrojów środkowych) obliczymy na podstawie wzorów (3.96), (3.100), (3.101). Wynik ma postać

$$\bar{M}_s = \begin{bmatrix} -3,128 \\ -0,470 \\ 4,188 \\ 4,188 \\ 3,603 \\ 3,017 \\ 1,509 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0 a, \quad \bar{M}_c = \begin{bmatrix} 3,198 \\ 0,453 \\ -2,291 \\ -2,291 \\ -2,842 \\ -3,394 \\ -1,697 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0 a, \quad \text{am } \bar{M} = \begin{bmatrix} 6,044 \\ 0,653 \\ 4,773 \\ 4,773 \\ 4,589 \\ 4,541 \\ 2,271 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0 a,$$

$$\bar{T}_s = \begin{bmatrix} 1,863 \\ -0,390 \\ -1,006 \end{bmatrix} \cdot F_0, \quad \bar{T}_c = \begin{bmatrix} -1,098 \\ -0,368 \\ 1,131 \end{bmatrix} \cdot F_0, \quad \text{am } \bar{T} = \begin{bmatrix} 2,163 \\ 0,536 \\ 1,514 \end{bmatrix} \cdot F_0.$$

W przypadku zastosowania metody przemieszczeń należy wyznaczyć macierz sztywności K w bazie \bar{q} . Współrzędne uogólnione nie wyczerpują geometrycznych stopni swobody siatki prętów, obierzemy zatem dodatkowe współrzędne x_3, x_4 i sporządzimy wykresy momentów gnących od przemieszczeń jednostkowych (rys. 3.18).



Rys. 3.18

Macierz wpływu w poszerzonej bazie ma postać

$$M_q = \begin{bmatrix} -0,300 & 0 & 0,400 & 0 \\ 0 & 0 & -0,200 & 0 \\ 0,300 & 0 & -0,800 & 0 \\ 1,000 & -1,333 & 2,667 & 1,333 \\ 0 & 0 & 0,667 & -0,667 \\ -1,000 & 1,333 & -1,333 & -2,667 \\ 0 & 0,667 & 0 & 2,000 \\ 0 & 0,333 & 0 & 1,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wobec tego poszerzona macierz sztywności

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qx} \\ K_{xq} & K_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,650 & -0,666 & 0,700 & 1,000 \\ -0,666 & 1,111 & -1,333 & -0,666 \\ 0,700 & -1,333 & 3,467 & 1,333 \\ 1,000 & -0,666 & 1,333 & 4,667 \end{bmatrix}.$$

Dalej obliczymy

$$K_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3240 & -0,0925 \\ -0,0925 & 0,2407 \end{bmatrix},$$

$$K = K_{qq} - K_{qx} K_{xx}^{-1} K_{xq} = \begin{bmatrix} 0,380 & -0,371 \\ -0,371 & 0,593 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że we wspólnej bazie \bar{q} istotnie jest $KD = I$. Częstości drgań własnych można obliczyć z równania typu (3.19). Wyniki są zgodne z wartościami uzyskanymi metodą sił. Problem drgań wymuszonych rozstrzygniemy rozwiązując równanie typu $(K - p^2 B)\bar{q} = \bar{F}$, a więc

$$\begin{bmatrix} 0,380 & -0,371 \\ -0,371 & 0,548 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos pt.$$

Rozwiązanie w przemieszczeniach ma postać

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} 20,478 \\ 13,864 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} -13,864 \\ -11,211 \end{bmatrix} \cos pt.$$

Następnie obliczamy

$$\bar{x} = -K_{xx}^{-1} K_{xq} \bar{q} = \begin{bmatrix} 2,384 \\ -3,089 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} -2,289 \\ 2,024 \end{bmatrix} \cos pt$$

oraz stan przemieszczenia w bazie poszerzonej

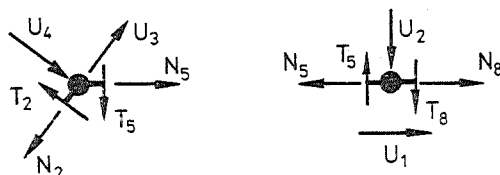
$$\ddot{\bar{q}}_B = \begin{bmatrix} 20,478 \\ 13,864 \\ 2,384 \\ -3,089 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\bar{q}}_C = \begin{bmatrix} -13,864 \\ -11,211 \\ -2,289 \\ 2,024 \end{bmatrix}.$$

Momenty gnące można obliczyć według wzorów (3.111). Wyniki są praktycznie zgodne z wynikami uzyskanymi metodą sił; zgodność dotyczy zatem również sił tnących.

Do rozstrzygnięcia pozostaje problem sił osiowych, które ze względu na pominięcie wpływu osiowej odkształcalności prętów muszą być obliczane w specjalny sposób. Punktem wyjścia jest tu obliczenie lokalnych obciążeń kinetycznych według wzoru (3.119) w wypadku stosowania metody sił lub według (3.118) w metodzie przemieszczeń. Wyniki (na podstawie rozwiązania uzyskanego metodą sił) mają postać

$$\bar{U}_s = \begin{bmatrix} 1,911 \\ 0,616 \\ 0 \\ 0,596 \end{bmatrix}, \quad \bar{U}_c = \begin{bmatrix} -0,606 \\ -1,499 \\ 0 \\ -0,385 \end{bmatrix}.$$

Stosując metodę sił należy statycznie wyznaczalny schemat podstawowy ustroju obciążyć siłami \bar{U} oraz \bar{X} , a następnie obliczyć siły osiowe elementarnym sposobem. Stosując natomiast metodę przemieszczeń należy wykorzystać równania równowagi wyciętych węzłów (rys. 3.19).



Rys. 3.19

W zakresie metody sił ostatecznie otrzymuje się

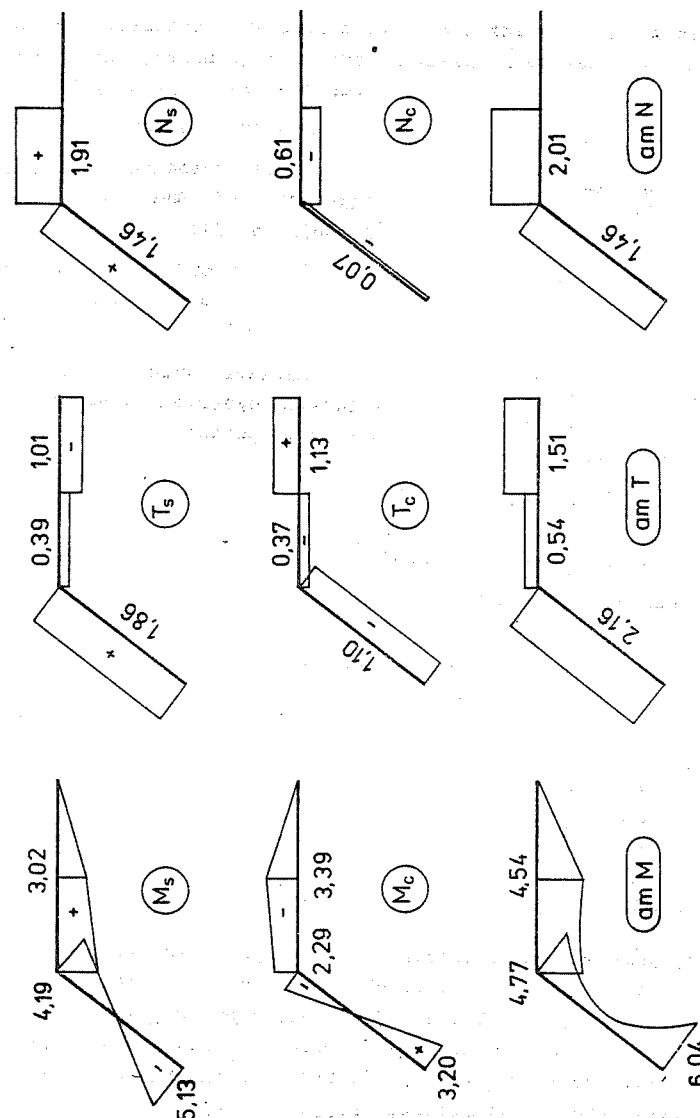
$$\bar{N}_s = \begin{bmatrix} 1,459 \\ 1,911 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0, \quad \bar{N}_c = \begin{bmatrix} -0,069 \\ -0,606 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0, \quad \text{am } \bar{N} = \begin{bmatrix} 1,460 \\ 2,005 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0.$$

Wyniki uzyskane metodą przemieszczeń są praktycznie zgodne. Otrzymanie idealnej zgodności wymagałoby wykonywania rachunków pośrednich z dostatecznie dużą dokładnością.

Wykresy sił przekrojowych (z pominięciem mnożników wymiarowych) są przedstawione na rys. 3.20.

PRZYKŁAD 3.13.6

Dla kratownicy przedstawionej na rys. 3.21 należy wyznaczyć macierz bezwładności, macierz sztywności i wektor sił wzbudzających. Założyć, że wszystkie pręty mają jednakowe charakterystyki l , EA , m (masa całkowita pręta).



Rys. 3.20

Rozwiązanie

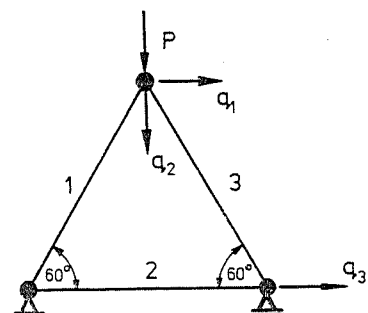
Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody; obieramy współrzędne uogólnione \bar{q} . Jeśli przyjmiemy założenie o granulacji mas w węzłach, wtedy zgodnie z (3.120), (3.121)

$$B = \{m\} = \text{diag}(1 \ 1 \ 1) \cdot m.$$

Jeśli natomiast uwzględnimy ciągły rozkład mas, to zgodnie z (3.130), (3.131)

$$B = \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & 0,167 \\ 0 & 0,667 & 0 \\ 0,167 & 0 & 0,667 \end{bmatrix} \cdot m.$$

Macierz transformacji współrzędnych uogólnionych na wydłużenia prętów ma postać



Rys. 3.21

$$A_K = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 1,000 \\ -0,500 & -0,866 & 0,500 \end{bmatrix},$$

a zatem zgodnie z (3.125)

$$K = A_K^T \{EA/l\} A_K = \begin{bmatrix} 0,500 & 0 & -0,250 \\ 0 & 1,500 & -0,433 \\ -0,250 & -0,433 & 1,250 \end{bmatrix} EA/l.$$

Wektor uogólnionych sił wzbudzających ma postać

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} P.$$

PRZYKŁAD 3.13.7

Dany jest fundament blokowy, jak na rys. 3.22 (wymiar w kierunku osi x_3 wynosi $1,5 a$). Drgania bloku są wzbudzane siłą F_0 wirującą z częstością kołową p . Układ jest symetryczny względem płaszczyzny x_1x_2 . Należy zbadać ruch naroża N podczas stacjonarnych drgań wymuszonych z częstością $p = 0,9 \omega_1$. Efekty drugiego rzędu pominąć. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej przyjmując $k_1 = k$, $k_2 = 0,7 k$, $k_3 = 2 k$ oraz $\gamma = 0,10$ dla wszystkich głównych form drgań.

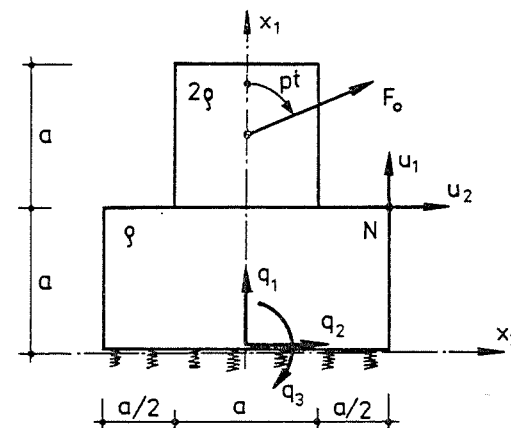
Rozwiązanie

Za wielkości porównawcze przyjmujemy a , ρ , k , F_0 . Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody. Obieramy współrzędne uogólnione \bar{q} . Charakterystyki bryły:

$$m = 2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 2 = 3,0 + 3,0 = 6,00,$$

$$S_{13} = 0, \quad S_{23} = 3 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1,5 = 6,00,$$

$$J_3^m = 3,0(2^2/12 + 1^2/12 + 0,5^2) + 3,0(1^2/12 + 1^2/12 + 1,5^2) = 9,25.$$



Rys. 3.22

Macierz bezwładności zgodnie z (3.135) ma postać

$$B = \begin{bmatrix} 6,00 & 0 & 0 \\ 0 & 6,00 & 6,00 \\ 0 & 6,00 & 9,25 \end{bmatrix}.$$

Charakterystyki pola podstawy:

$$A = 2 \cdot 1,5 = 3,00, \quad J_3 = 3,0 \cdot 2^2/12 = 1,00.$$

Macierz sztywności zgodnie z (3.137) ma postać

$$K = \text{diag}(3,00 \quad 2,10 \quad 2,00).$$

Równanie charakterystyczne po podstawieniu $\omega^{-2} = \lambda$

$$\det \begin{bmatrix} 6,00 - 3,00\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6,00 - 2,10\lambda & 6,00 \\ 0 & 6,00 & 9,25 - 2,00\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 7,4821\lambda + 4,6429) = 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia własnego daje wyniki:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 6,7992 \longrightarrow \omega_1 = 0,3835 \\ \lambda_2 &= 2,0000 \longrightarrow \omega_2 = 0,7071 \\ \lambda_3 &= 0,6829 \longrightarrow \omega_3 = 1,2101 \end{aligned} \right\} \cdot \sqrt{k/\rho a},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,7248 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0,7610 \end{bmatrix}.$$

Drgania wymuszone przeanalizujemy dwoma sposobami, przyjmując zgodnie z tematem zadania $p = 0,9 \cdot 0,3825 = 0,34515 \sqrt{k/pa}$.

W pierwszym sposobie pominiemy dla uproszczenia tłumienia i wykorzystamy równanie typu (3.45) z uwzględnieniem (3.139). Po wykonaniu działań otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} 2,2852 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3852 & -0,7148 \\ 0 & -0,7148 & 0,8981 \end{bmatrix} \bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,5 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos pt,$$

a stąd

$$\bar{q}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,6876 \\ 3,8093 \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0,4376 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz transformacji współrzędnych dla naroża H:

$$A_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a więc

$$\bar{u}_s = A_H \bar{q}_s = \begin{bmatrix} -3,8093 \\ 6,4969 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_c = A_H \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0,4376 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{am } u_1 = \sqrt{3,8093^2 + 0,4376^2} = 3,8343 F_0/ka^2,$$

$$\text{am } u_2 = \sqrt{6,4969^2 + 0^2} = 6,4969 F_0/ka^2.$$

Drugi sposób rozwiązania polega na zastosowaniu transformacji własnej. Można przy tym uwzględnić tłumienie bez konieczności rozwiązywania dużego układu równań typu (3.44). Przebieg obliczeń jest następujący:

$$\{k^0\} = W^T K W = \begin{bmatrix} 3,1032 & 0 & 0,0001 \\ 0 & 3,0000 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 3,2582 \end{bmatrix} \approx \text{diag}(3,1032, 3,0000, 3,2582);$$

$$\eta_1 = p/\omega_1 = 0,90000, \quad \eta_1^2 = 0,81000,$$

$$\eta_2 = p/\omega_2 = 0,48812, \quad \eta_2^2 = 0,23826,$$

$$\eta_3 = p/\omega_3 = 0,28522, \quad \eta_3^2 = 0,08135,$$

$$\gamma = 0,10, \quad \gamma^2 = 0,01;$$

$$h_1 = \frac{1}{3,1032} (1-0,81) / [(1-0,81)^2 + 0,01 \cdot 0,81] = 1,3852,$$

$$h_2 = \frac{1}{3,0000} (1-0,23826) / [(1-0,23826)^2 + 0,01 \cdot 0,23826] = 0,4358,$$

$$h_3 = \frac{1}{3,2582} (1-0,08135) / [(1-0,08135)^2 + 0,01 \cdot 0,08135] = 0,3338,$$

$$h'_1 = \frac{1}{3,1032} \cdot 0,1 \cdot 0,9 / [(1-0,81)^2 + 0,01 \cdot 0,81] = 0,2477,$$

$$h'_2 = \frac{1}{3,0000} \cdot 0,1 \cdot 0,48812 / [(1-0,23826)^2 + 0,01 \cdot 0,23826] = 0,0279,$$

$$h'_3 = \frac{1}{3,2582} \cdot 0,1 \cdot 0,28522 / [(1-0,08135)^2 + 0,01 \cdot 0,08135] = 0,0104;$$

$$H = W \{h\} W^T = \begin{bmatrix} 0,4358 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0416 & 0,7500 \\ 0 & 0,7500 & 1,5785 \end{bmatrix},$$

$$H' = W \{h'\} W^T = \begin{bmatrix} 0,0279 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1405 & 0,1716 \\ 0 & 0,1716 & 0,2537 \end{bmatrix};$$

$$\bar{q}_s = H \bar{q}_s + H' \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0,0279 \\ 2,1666 \\ 3,1177 \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_c = -H' \bar{q}_s + H \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0,4358 \\ -0,3979 \\ -0,5521 \end{bmatrix},$$

$$\bar{u}_s = A_H \bar{q}_s = \begin{bmatrix} -3,0898 \\ 5,2843 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_c = A_H \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0,9879 \\ -0,9500 \end{bmatrix},$$

$$\text{am } u_1 = \sqrt{3,0898^2 + 0,9879^2} = 3,2439 F_0/ka^2,$$

$$\text{am } u_2 = \sqrt{5,2843^2 + 0,9500^2} = 5,3690 F_0/ka^2.$$

Porównanie tych wyników z poprzednimi daje wyobrażenie o roli tłumienia w rozważanym przypadku.

Charakterystyki trajektorii ruchu naroża H obliczymy następująco:

$$\bar{u}_s^T \bar{u}_s = 37,4707, \quad \bar{u}_c^T \bar{u}_c = 1,8784, \quad \bar{u}_s^T \bar{u}_c = -8,0725,$$

$$2\theta = \arctg[-8,0725/(1,8784-37,4707)] = 3,5674 \text{ rad},$$

$$\theta = 1,7837 \text{ rad}, \quad \sin \theta = 0,9774, \quad \cos \theta = -0,2113;$$

$$\bar{R} = \bar{u}_s \sin \theta + \bar{u}_c \cos \theta = \begin{bmatrix} -3,2287 \\ 5,3656 \end{bmatrix},$$

$$R = \sqrt{\bar{R}^T \bar{R}} = 6,2621 F_0/ka^2;$$

Spis rzeczy

| | |
|--|----|
| OD AUTORA | 3 |
| 1. WSTĘP | 4 |
| 1.1. Określenie przedmiotu | 4 |
| 1.2. Schemat dynamiczny | 4 |
| 1.3. Więzie odkształcalne | 7 |
| 1.4. Podstawowe prawa dynamiki | 10 |
| 1.5. Charakterystyka ruchów oscylacyjnych | 12 |
| 2. UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY | 20 |
| 2.1. Równanie ruchu | 20 |
| 2.2. Zagadnienie własne | 20 |
| 2.3. Drgania swobodne | 21 |
| 2.4. Warianty modelu tłumienia. Wyężenie konstrukcji | 25 |
| 2.5. Drgania wymuszone harmonicznie | 27 |
| 2.6. Wymuszenie bezwładnościowe | 30 |
| 2.7. Proces przejściowy | 31 |
| 2.8. Wymuszenie kinematyczne | 35 |
| 2.9. Drgania wymuszone aperiodycznie | 36 |
| 2.10. Zasady projektowania. Zmęczenie | 42 |
| 2.11. Drgania wymuszone siłami losowymi | 45 |
| 2.12. Przykłady liczbowe | 52 |
| 3. UKŁADY DYSKRETNE | 58 |
| 3.1. Równanie ruchu | 58 |
| 3.2. Zagadnienie własne | 62 |
| 3.3. Drgania swobodne | 65 |
| 3.4. Drgania wymuszone harmonicznie | 67 |
| 3.5. Warianty modelu tłumienia. Wyężenie konstrukcji | 69 |
| 3.6. Proces przejściowy | 71 |
| 3.7. Wymuszenie kinematyczne | 73 |
| 3.8. Drgania wymuszone aperiodycznie | 74 |
| 3.9. Belki i ramy płaskie | 75 |
| 3.10. Kratownice | 82 |
| 3.11. Bryła na podłożu sprężystym | 84 |

| | |
|---|-----|
| 3.12. Wykorzystanie analizy wymiarowej | 89 |
| 3.13. Przykłady liczbowe | 92 |
| 4. UKŁADY CIĄGŁE | 111 |
| 4.1. Drgania osiowe pręta pryzmatycznego | 111 |
| 4.2. Drgania giętne pręta pryzmatycznego | 114 |
| 4.3. Macierz dynamicznej sztywności pręta pryzmatycznego | 117 |
| 4.4. Drgania harmoniczne belek i ram płaskich | 119 |
| 4.5. Drgania harmoniczne kratownic | 127 |
| 4.6. Metoda aproksymacyjna | 129 |
| 4.7. Stateczność dynamiczna | 133 |
| 4.8. Wpływ odkształcalności postaciowej i bezwładności obro- towej | 134 |
| 4.9. Drgania belki spowodowane ruchomym obciążeniem | 136 |
| 4.10. Metoda sprężystych elementów skończonych | 142 |
| 4.11. Metoda sztywnych elementów skończonych | 147 |
| 4.12. Metoda elementów skończonych w czasoprzestrzeni | 151 |
| 4.13. Przykłady liczbowe | 153 |
| 5. METODY NUMERYCZNE | 168 |
| 5.1. Modyfikacje zagadnienia własnego | 168 |
| 5.2. Algorytm Laverriera | 170 |
| 5.3. Algorytm Bernoulliego | 172 |
| 5.4. Metoda wektorów iterowanych | 174 |
| 5.5. Oszacowanie dominującej wartości własnej | 178 |
| 5.6. Iteracja wirowa Jacobiego | 179 |
| 5.7. Numeryczne całkowanie równań ruchu | 182 |
| 6. UZUPEŁNIENIA | 190 |
| 6.1. Elementy algebry macierzy | 190 |
| 6.2. Tablice funkcji Kryłowa | 197 |
| 6.3. Tablice współczynników dynamicznej macierzy sztywności . | 198 |
| 6.4. Współczynniki interpolacji krzywoliniowej | 200 |
| 6.5. Podstawowe oznaczenia | 202 |
| LITERATURA | 204 |