

# Mechanika Budowli

## Laboratorium nr 5

*Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus*

*[olga.szylko@pwr.edu.pl](mailto:olga.szylko@pwr.edu.pl)*



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

# METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu niemechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia niemechanicznego i sporządzić ich wykresy.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach.

Dane do obliczeń:  $k_{\delta} = 8 EI/m^3$ ,

$T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}; T_2 = 25 \text{ }^{\circ}\text{C};$

$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad.}$

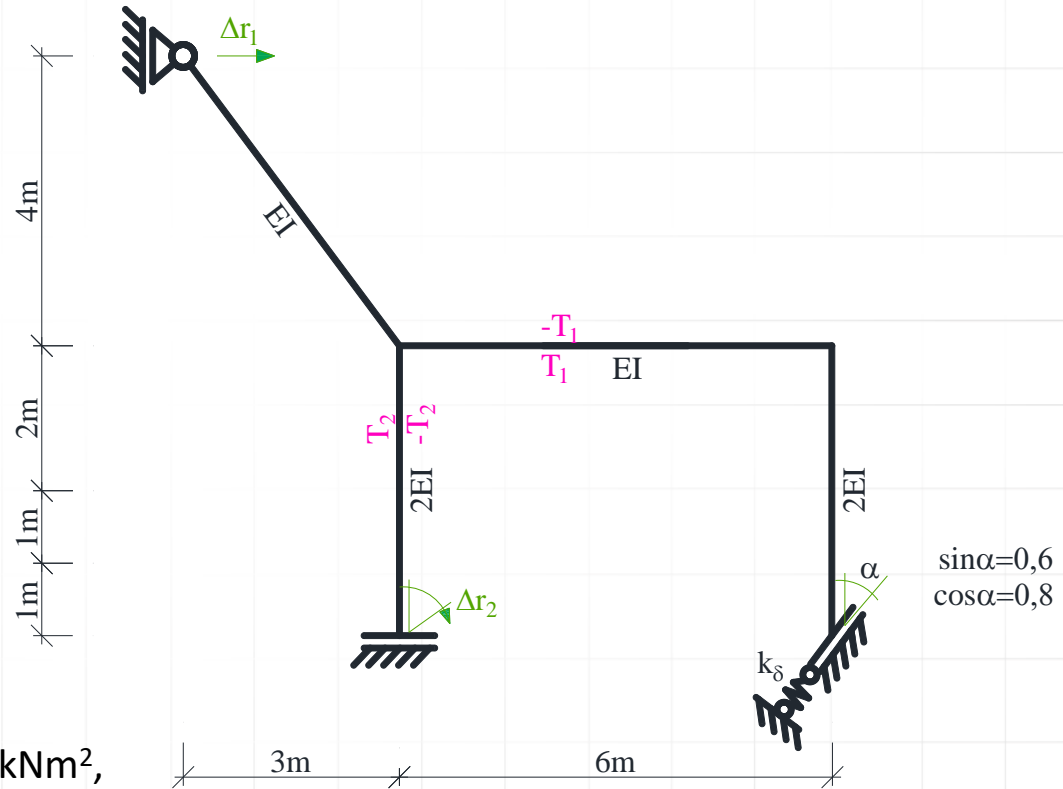
$EI \rightarrow \text{IPE180}$

$2EI \rightarrow 2\text{IPE180}$

$I_{\text{IPE 180}} = 1320 \text{ cm}^4.$

$EI = 210000000 \text{ kN/m}^2 * 1320 * 10^{-8} \text{ m}^4 = 2835 \text{ kNm}^2,$

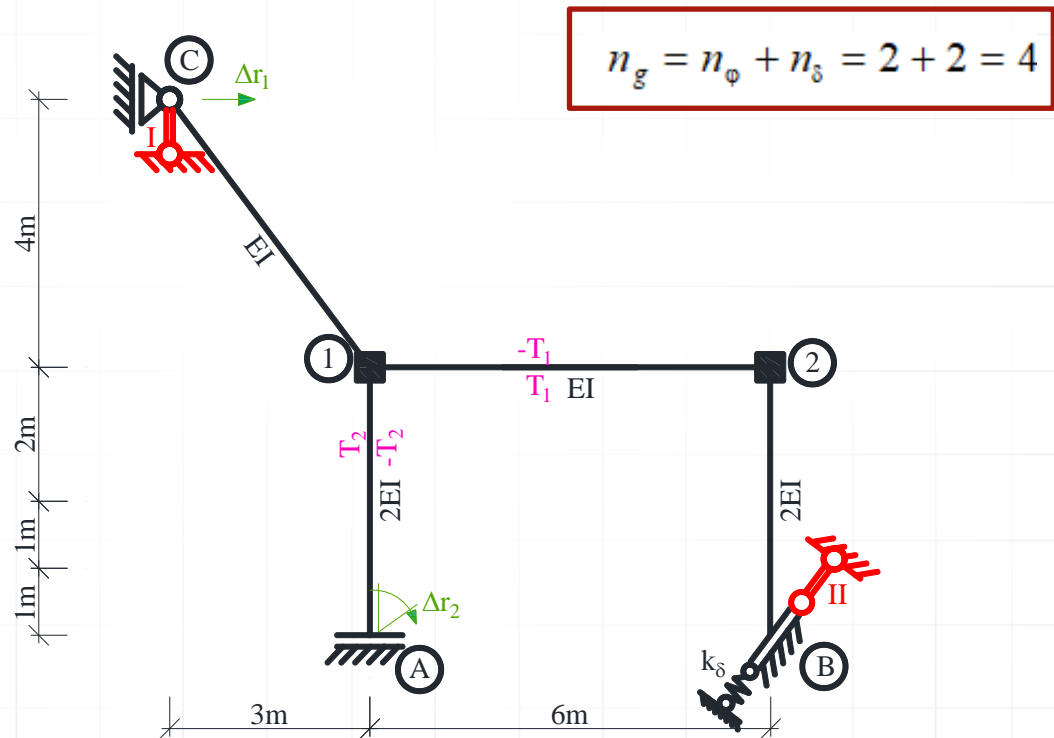
$k_{\delta} = 8 EI/m^3 = 22680 \text{ kNm/m}^3.$



Rys. 1. Schemat statyczny

# UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

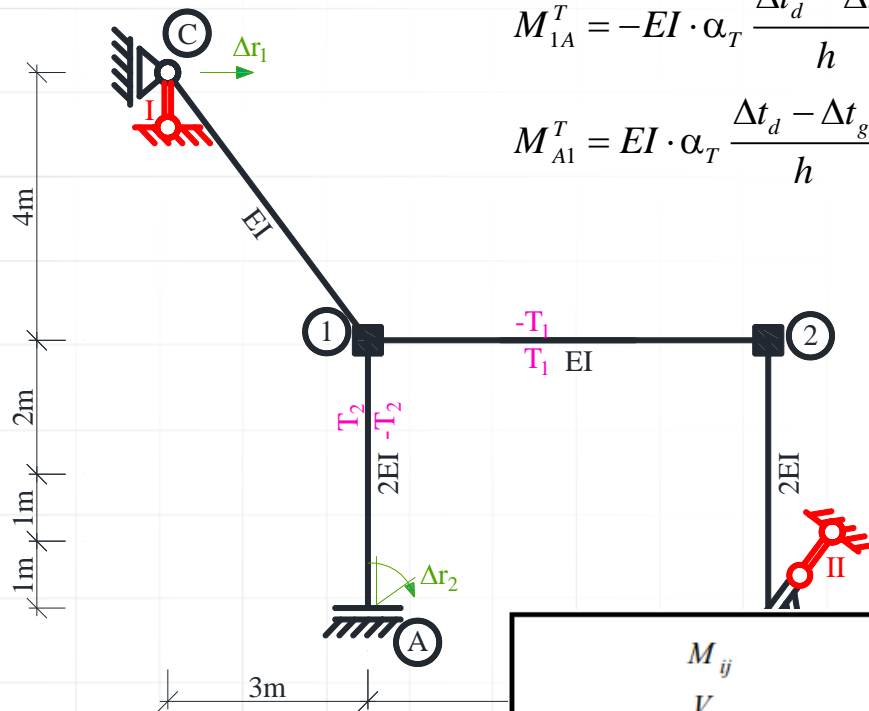
Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie  $n_\phi$  więzi rotacyjnych i  $n_\delta$  więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rysunku jest geometrycznie wyznaczalny.



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$ . Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



$$M_{1A}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = -555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{A1}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = 555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$

$M_{ij}$ $V_{ij}$		$M_{ji}$
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$
$V_{ij} = 0$		

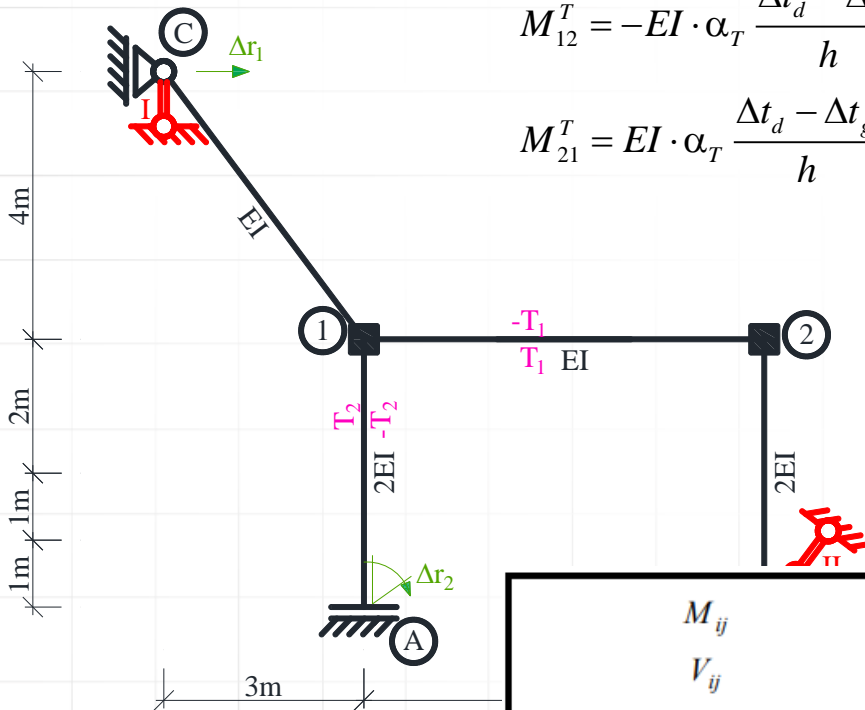
Rys. 2. Układ podstawowy

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$ . Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{12}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = -222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{21}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$



$M_{ij}$ $V_{ij}$		$M_{ji}$ $V_{ji}$
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$ $V_{ji} = 0$

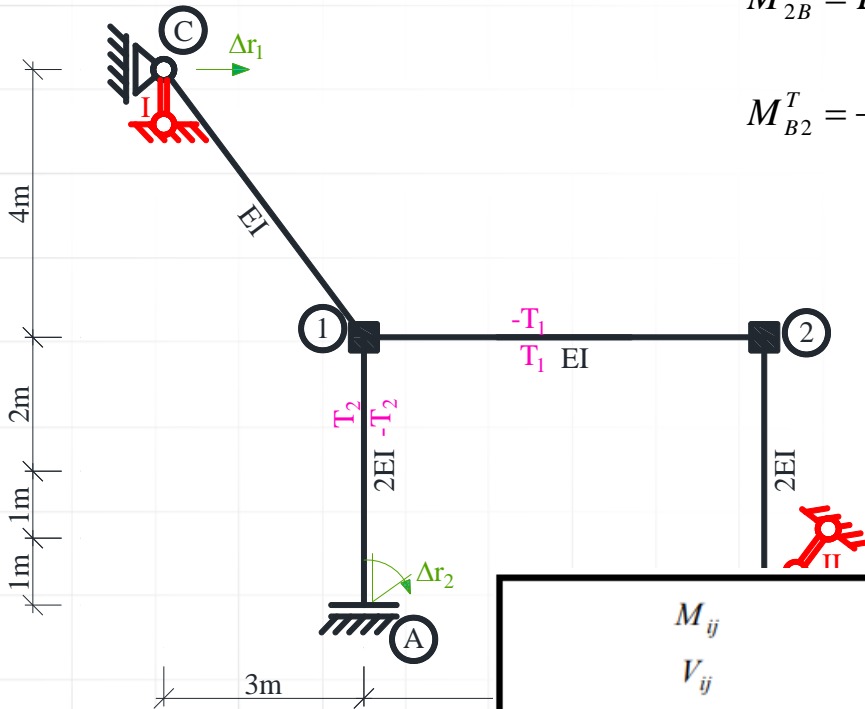
Rys. 2. Układ podstawowy

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$ . Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{2B}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$

$$M_{B2}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$



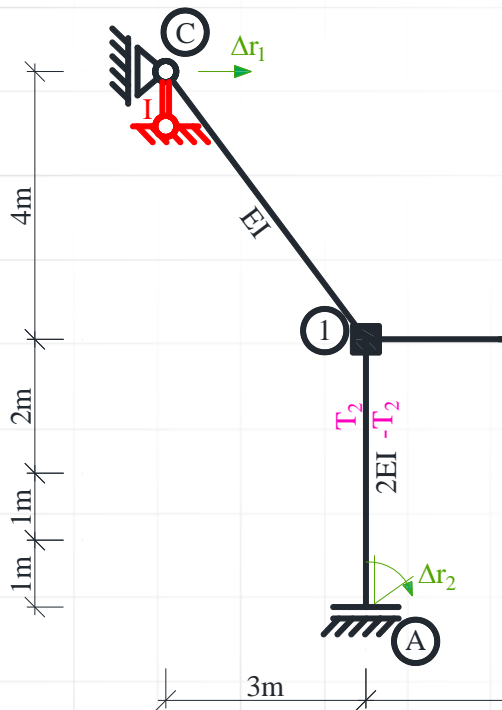
$M_{ij}$ $V_{ij}$		$M_{ji}$ $V_{ji}$
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$
$V_{ij} = 0$		$V_{ji} = 0$

Rys. 2. Układ podstawowy

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$ . Dla elementów przyjętych, wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{1C}^0 = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0$$



$M_{ij}$ $V_{ij}$		$V_{ji}$
$M_{ij} = -1.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$V_{ji} = 1.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/(Lh)$

Rys. 2. Układ podstawowy

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$ . Dla elementów przyjętych, wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{1A}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = -555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

$$M_{A1}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = 555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

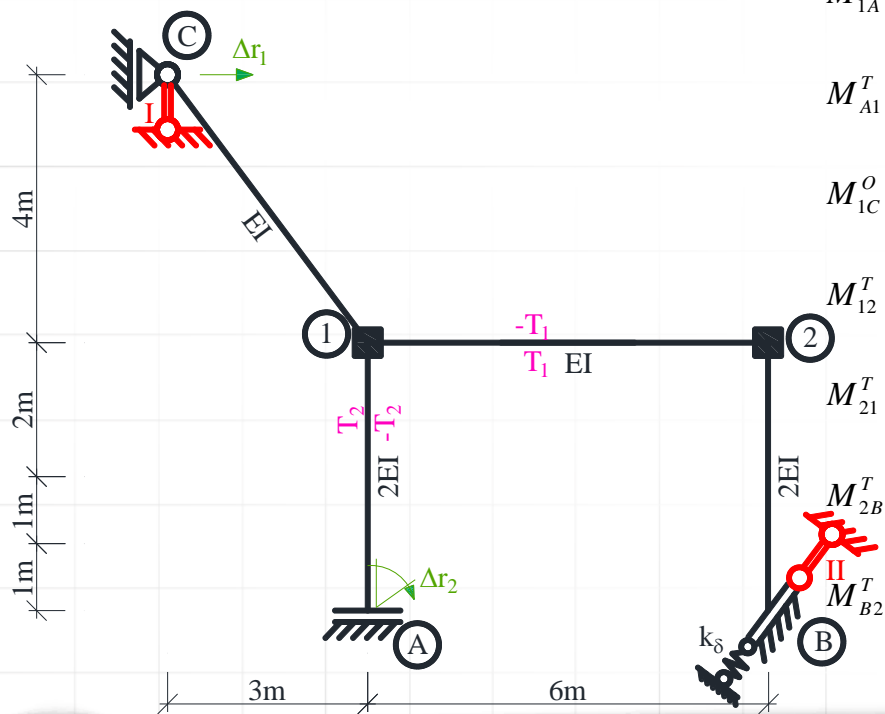
$$M_{1C}^O = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0$$

$$M_{12}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = -222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

$$M_{21}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

$$M_{2B}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$

$$M_{B2}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń



# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

$$M_{1A}^T = -555,5556 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{A1}^T = 555,5556 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

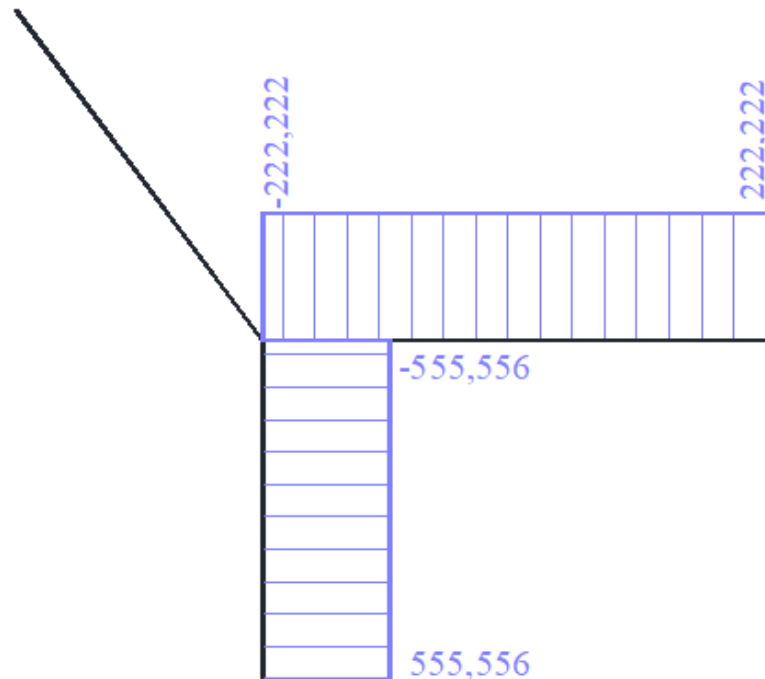
$$M_{1C}^O = 0$$

$$M_{12}^T = -222,2222 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{21}^T = 222,2222 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{2B}^T = 0,$$

$$M_{B2}^T = 0,$$



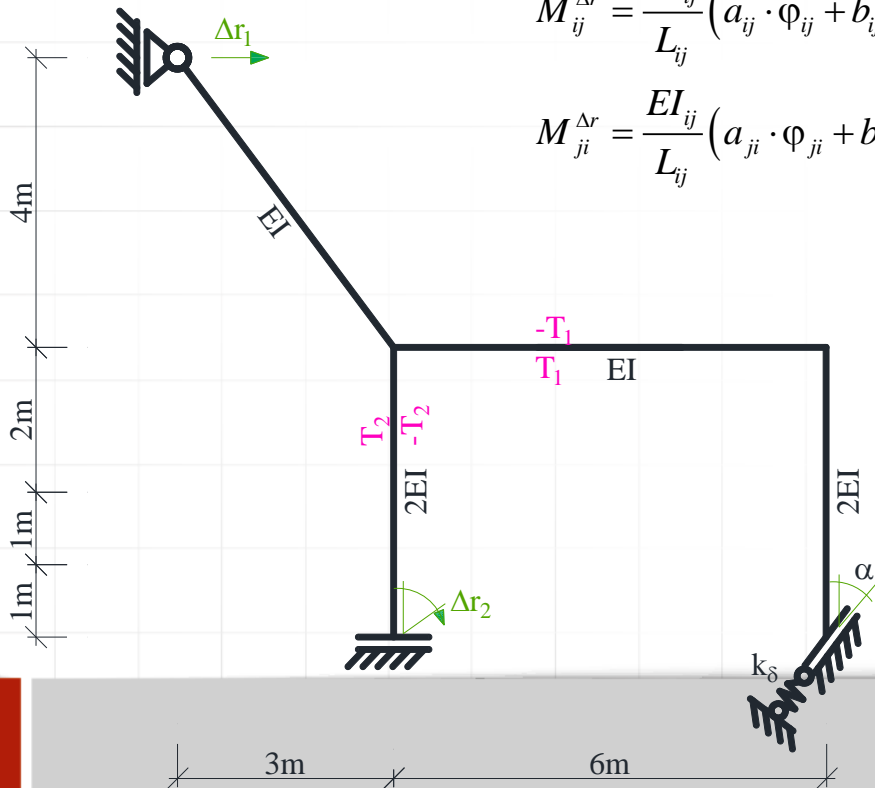
Rys. 3. Wykres momentów  $M^T$  w  $\frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m}$

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążenia danych towarzyszy  $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ , co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ij} = 0$ . Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{ij}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij})$$

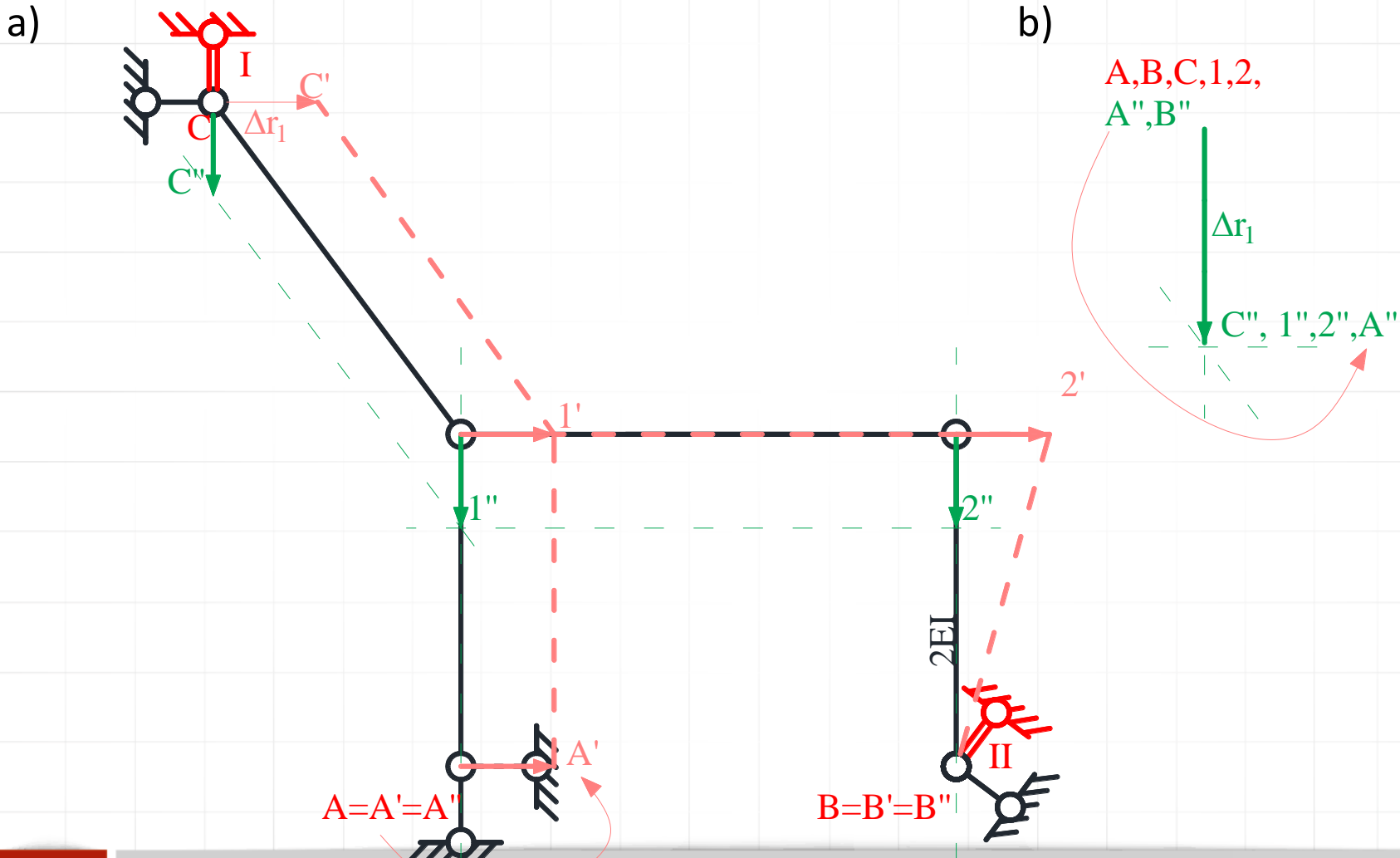
$$M_{ji}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij})$$



$$\sin \alpha = 0,6$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

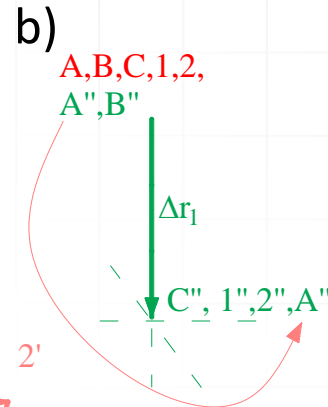
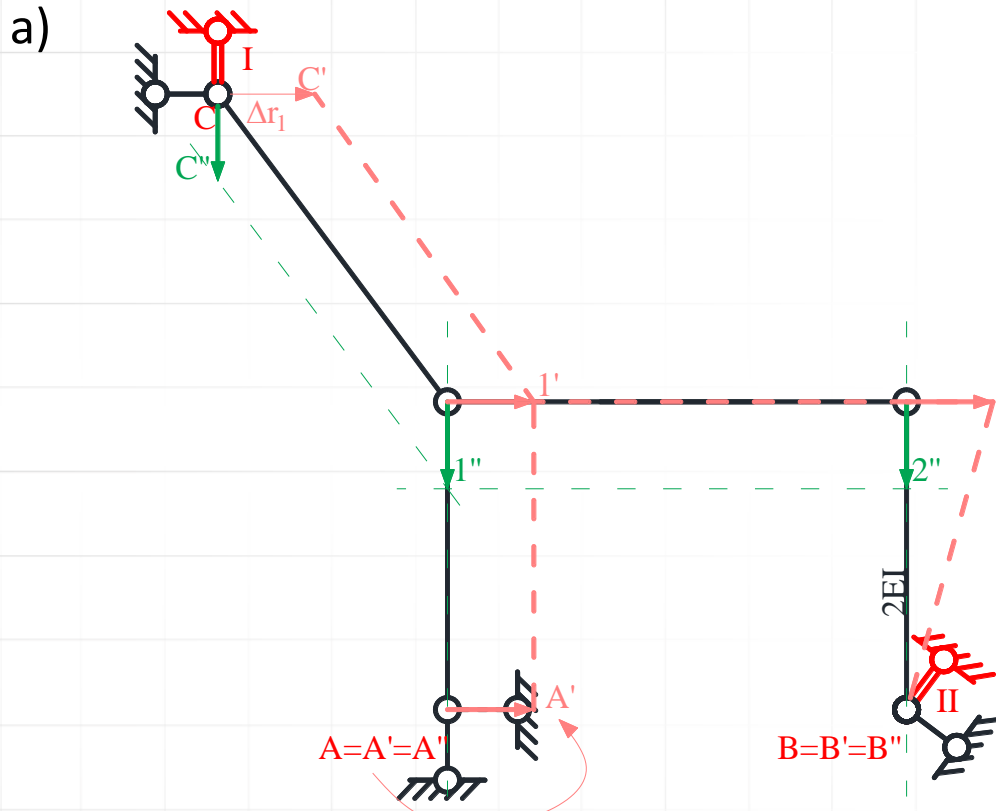
# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR



Rys. 4. a) Plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O

$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR



Wartości wzajemnych przesunięć

końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^{\Delta r_1} = -|1''2''| = 0$$

$$\Delta_{2B}^{\Delta r_1} = -|2''B''| = \Delta r_1 = 0,02m$$

$$\Delta_{1A}^{\Delta r_1} = |1''A''| = 0$$

$$\Delta_{1C}^{\Delta r_1} = |1''C''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ( $\psi_{ij}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_1}}{L_{ij}}$ ):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0,$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005$$

$$\psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

$$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$$

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

Kąty obrotów cięciw wynoszą ( $\psi_{ij}^{\Delta r_i} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_i}}{L_{ij}}$ ):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0, \quad \psi_{2B}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005, \quad \psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia  $\Delta r_i$  wynoszą:

$$M_{12}^{\Delta r} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21} - c_{12} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{21}^{\Delta r} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12} - c_{21} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{1A}^{\Delta r} = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \Delta r_2 - c_{1A} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0,03 - 6 \cdot 0) = -0,015 \frac{EI}{m},$$

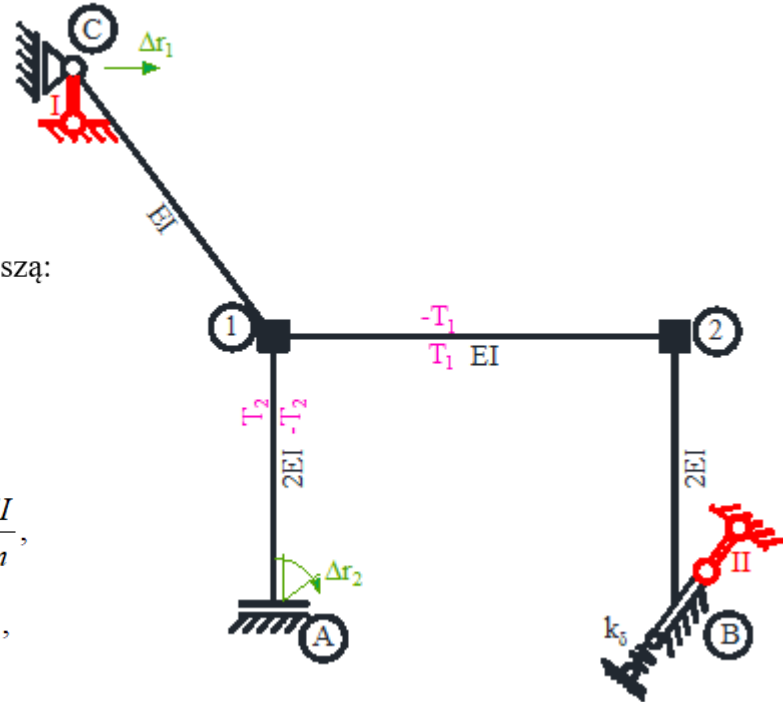
$$M_{A1}^{\Delta r} = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \Delta r_2 + b_{A1} \cdot \varphi_{1A} - c_{A1} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m} (1 \cdot 0,03 - 1 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1C}^{\Delta r} = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{1C} - c_{1C} \cdot \psi_{1C}) = \frac{2EI}{4m} (3 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{C1}^{\Delta r} = \frac{EI_{C1}}{L_{C1}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C} - c_{C1} \cdot \psi_{1C}) = \frac{EI}{5m} (0 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{2B}^{\Delta r} = \frac{EI_{2B}}{L_{2B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2} - c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005) = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^{\Delta r} = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B} - c_{B2} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005) = -0,015 \frac{EI}{m}.$$



Kąty obrotów cięciw wynoszą ( $\psi_{ij}^{\Delta r_i} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_i}}{L_{ij}}$ ):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0,$$

$$\psi_{2B}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005$$

$$\psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

$$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \quad \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$$

# ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

$$M_{12}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{21}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{1A}^{\Delta r} = -0,015 \frac{EI}{m},$$

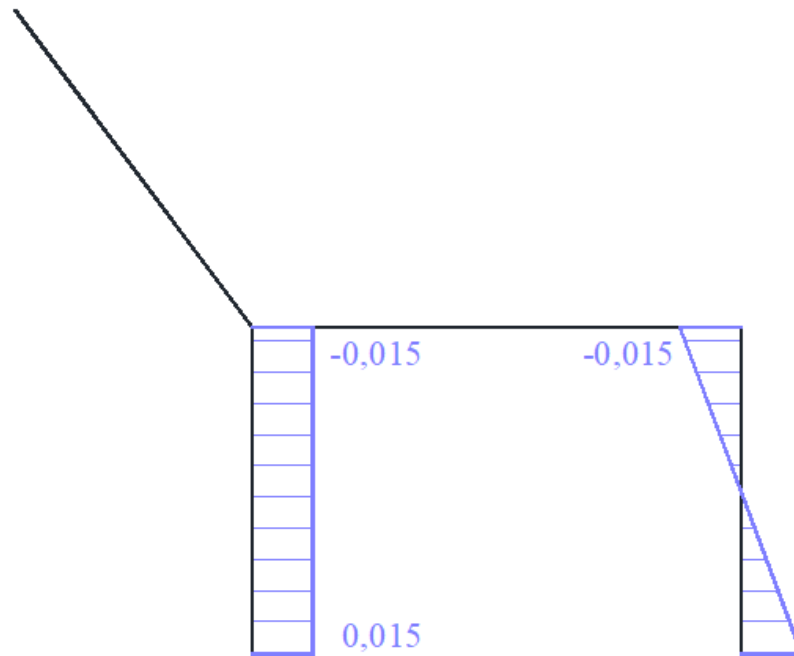
$$M_{A1}^{\Delta r} = 0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1C}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{C1}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{2B}^{\Delta r} = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^{\Delta r} = -0,015 \frac{EI}{m}.$$



Rys. 5. Wykres momentów  $M^{\delta r}$  w  $\frac{EI}{m}$

# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

od wpływu temperatury:

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1T} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2T} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{IT} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{IIT} = 0$$

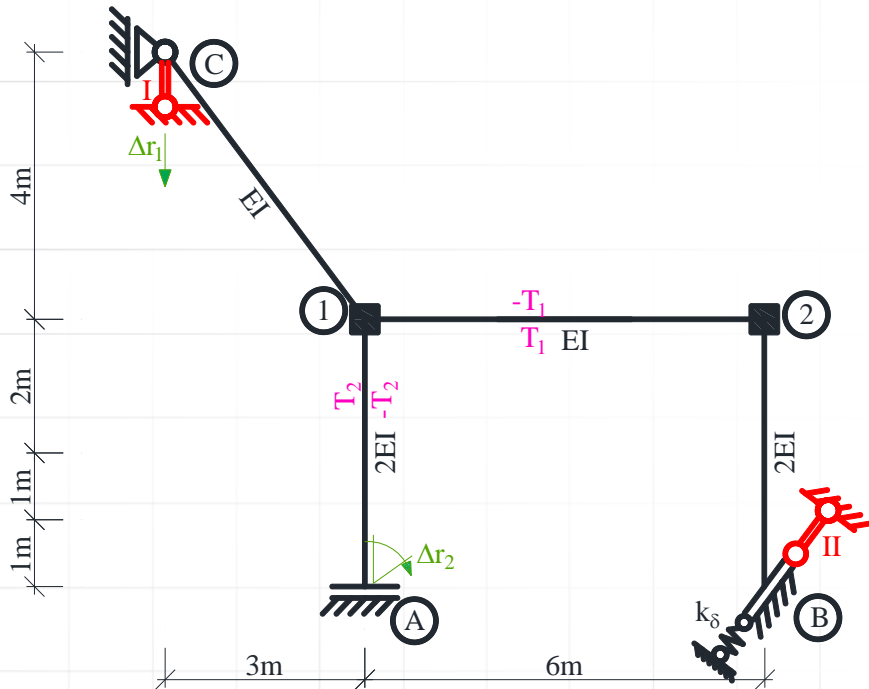
od osiadania podpór:

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1\Delta r} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2\Delta r} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{I\Delta r} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{II\Delta r} = 0$$



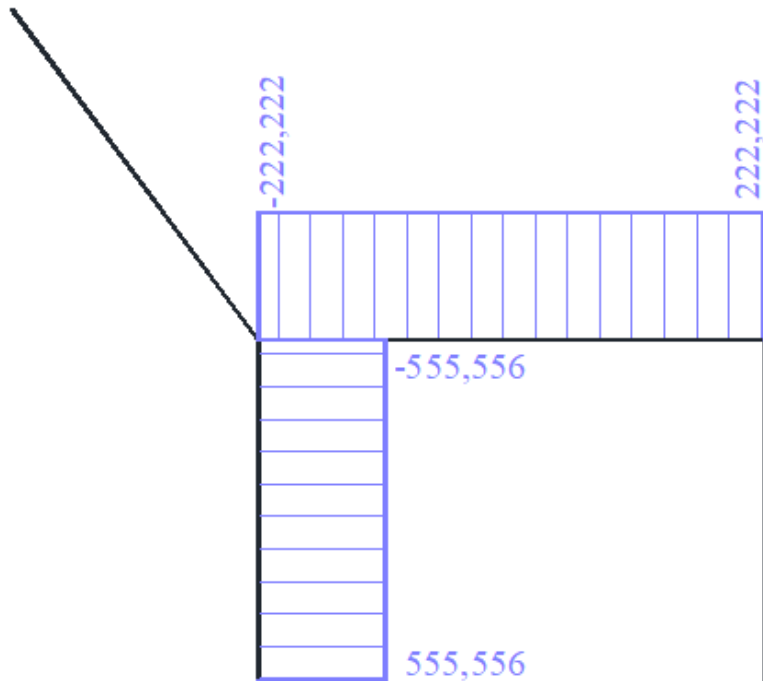
Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$k_{1T} = \sum_j M_{1j}^T = M_{12}^T + M_{1A}^T + M_{1C}^T = -222,2222 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} - 555,5556 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} + 0 = -777,7778 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$k_{2T} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = 222,2222 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} + 0 = 222,2222 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m}.$$





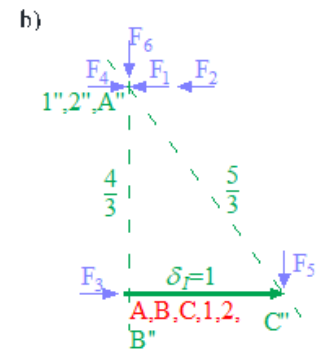
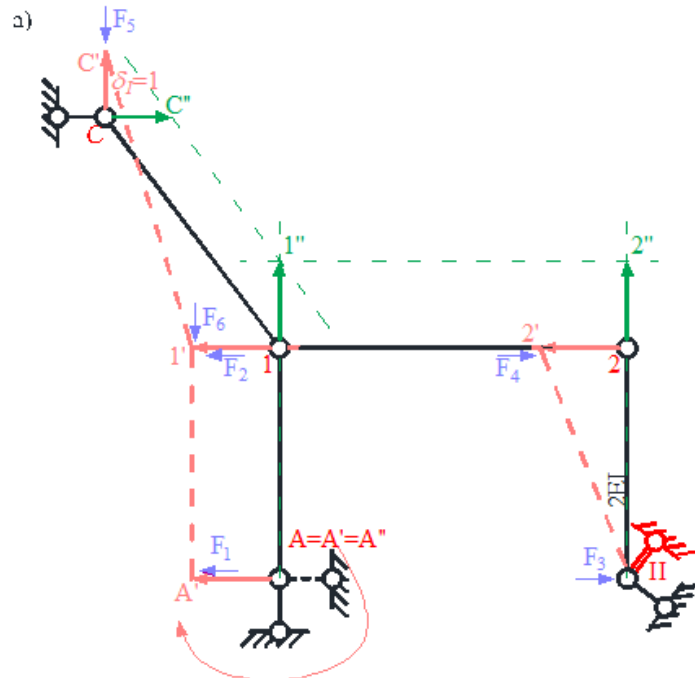
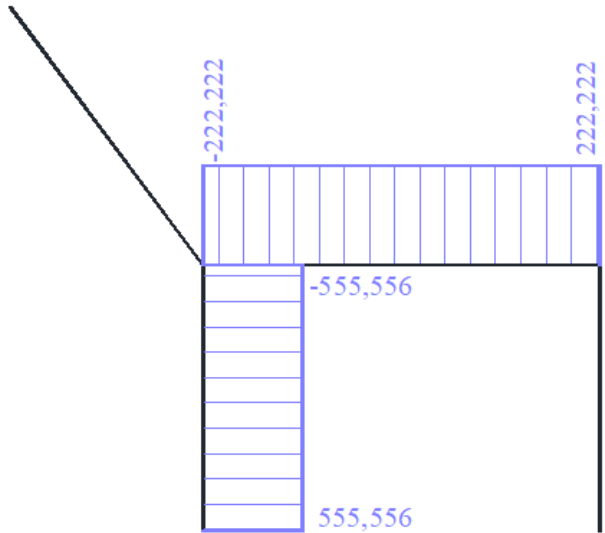
# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$k_{IT} = -\sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^I - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^I$$

$$= -\left( -555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 -$$

$$-\left( -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - (0+0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$



$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

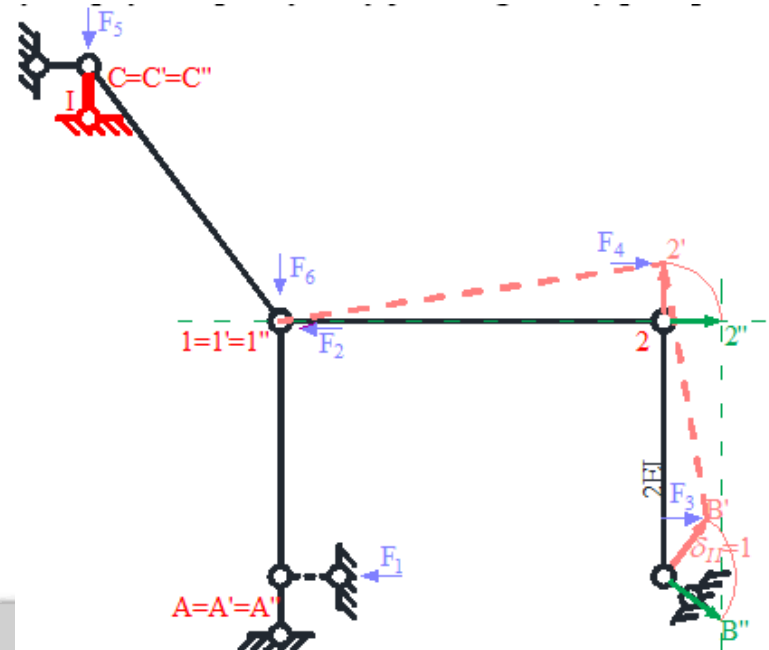
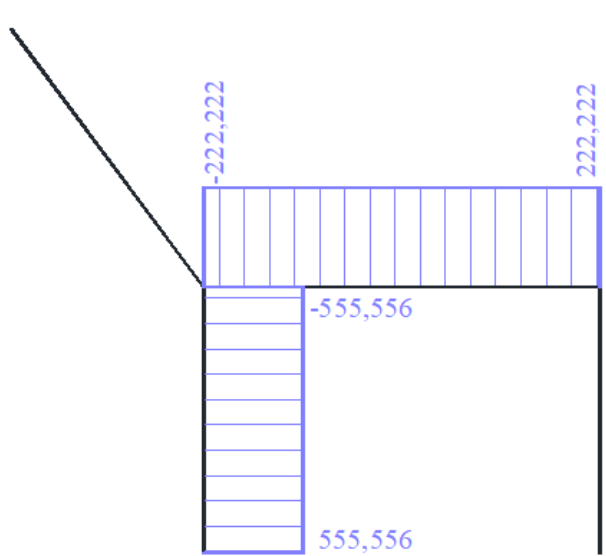
$$\psi_{1A}^I = \psi_{12}^I = 0$$

Rys. 4. Wykres momentów  $M^T$  w  $\frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}$

# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^{II} \\
 &= -\left( -555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - \\
 &\quad -\left( -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot \left( -\frac{2}{15m} \right) - (0+0) \cdot 0 - (0-0) \cdot \left( -\frac{3}{20m} \right) = 0
 \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned}
 \psi_{12}^{II} &= \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m} \\
 \psi_{2B}^{II} &= \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m} \\
 \psi_{1A}^{II} &= \psi_{1C}^{II} = 0
 \end{aligned}$$

Rys. 4. Wykres momentów  $M^T$  w  $\frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}$

# SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ OD WPŁYWU TEMPERATURY I JEGO ROZWIĄZANIE

$$1,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 333,3334 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} = 0$$

$$0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,66671 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} = 0$$

$$-0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0 = 0$$

$$\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0 = 0$$

$$\varphi_1 = -617,2020 \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C,$$

$$\varphi_2 = -457,6380 \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C,$$

$$\delta_I = 796,1080 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C,$$

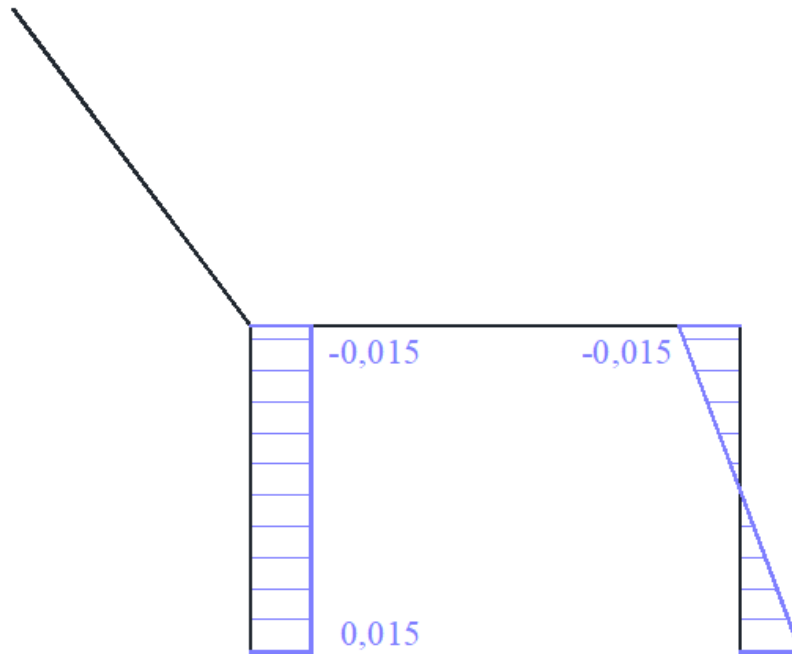
$$\delta_{II} = -6,3363 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C.$$

# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od osiadania podpór:

$$k_{1\Delta r} = \sum_j M_{1j}^{\Delta r} = M_{12}^{\Delta r} + M_{1A}^{\Delta r} + M_{1C}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$k_{2\Delta r} = \sum_j M_{2j}^{\Delta r} = M_{21}^{\Delta r} + M_{2B}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m}.$$



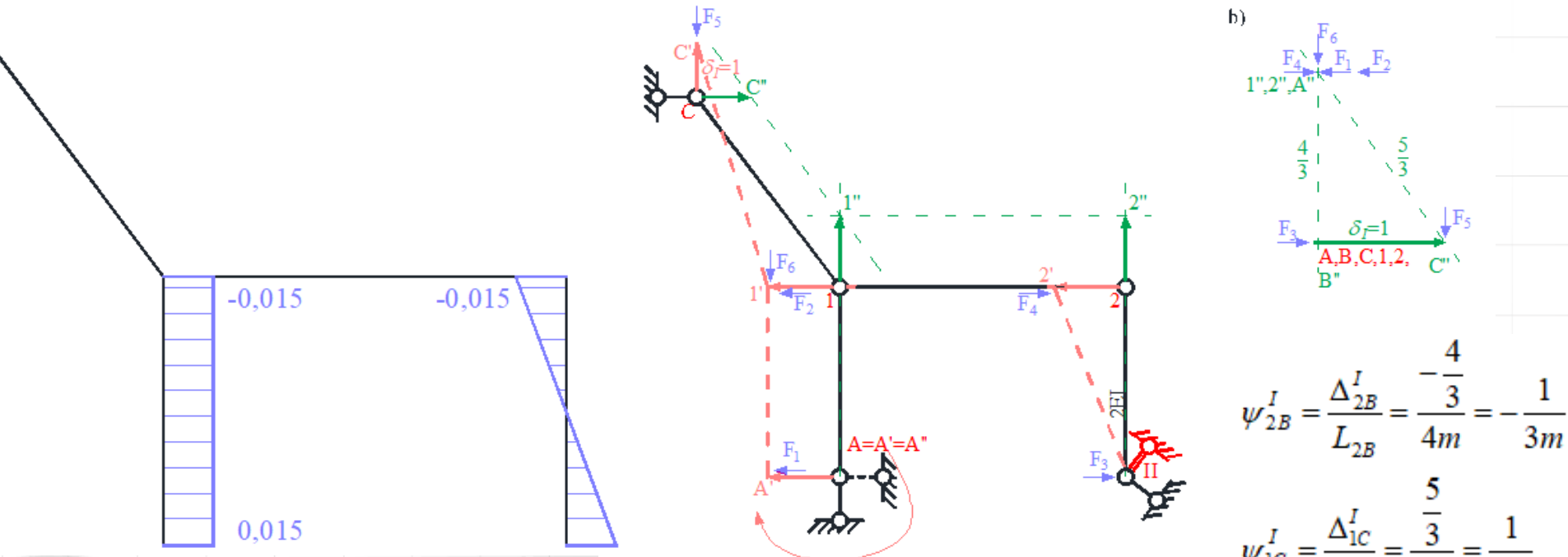
Rys. 5. Wykres momentów  $M^{\Delta r}$  w  $\frac{EI}{m}$

# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od osiadania podpór:

$$k_{I\Delta r} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{\Delta r} + M_{ji}^{\Delta r}) \psi_{ij}^{\Delta r} = -(M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{\Delta r} + M_{A1}^{\Delta r}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{\Delta r} + M_{C1}^{\Delta r}) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^{\Delta r} + M_{B2}^{\Delta r}) \psi_{2B}^I$$

$$= -(0+0) \cdot 0 - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0+0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = -0,01 \frac{EI}{m^2}$$



Rys. 5. Wykres momentów  $M^{\Delta r}$  w  $\frac{EI}{m}$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

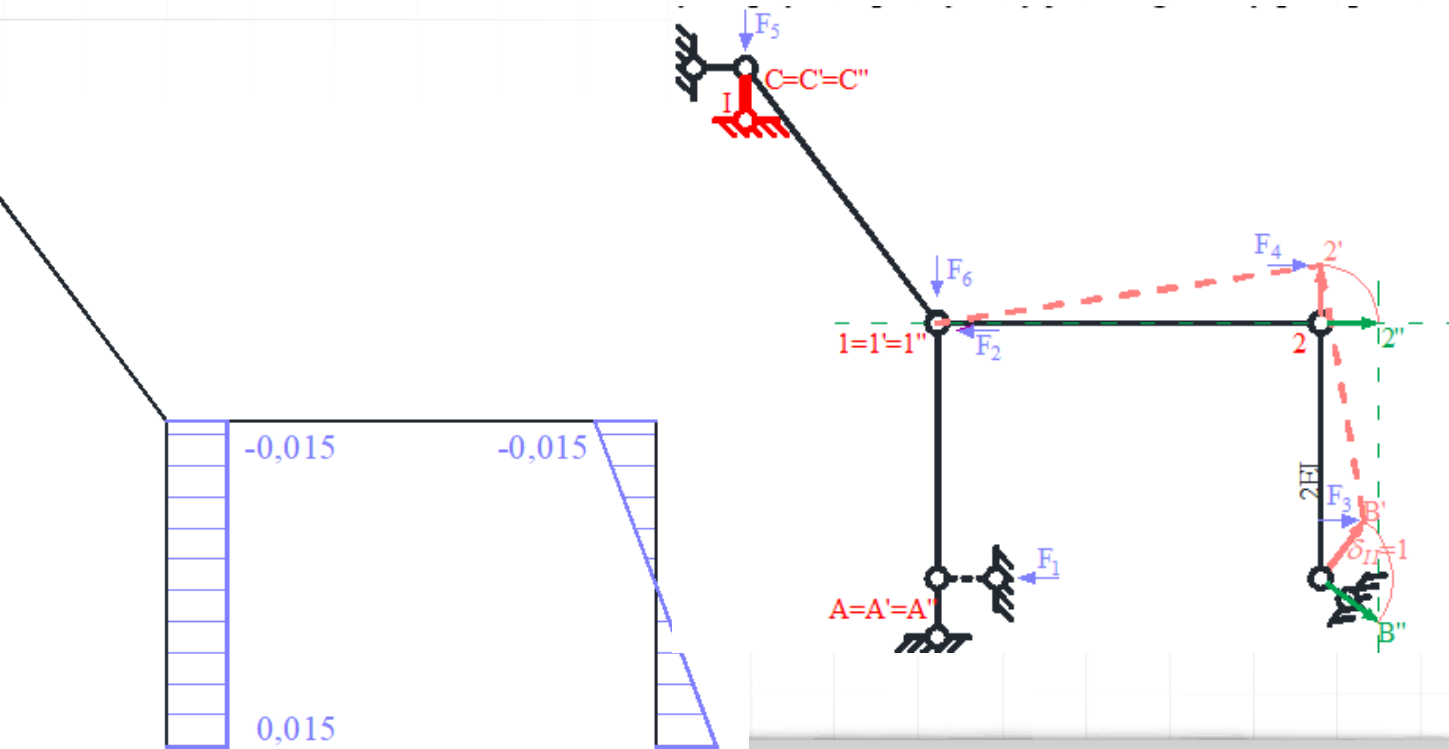
$$\psi_{1A}^I = \psi_{12}^I = 0$$

# WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$k_{II\Delta r} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{\Delta r} + M_{ji}^{\Delta r}) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{\Delta r} + M_{A1}^{\Delta r}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{\Delta r} + M_{C1}^{\Delta r}) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^{\Delta r} + M_{B2}^{\Delta r}) \psi_{2B}^{II}$$

$$= -(0+0) \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = -0,0045 \frac{EI}{m^2}$$



b)

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

Rys. 5. Wykres momentów  $M^{\Delta r}$  w  $\frac{EI}{m}$

# SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR I JEGO ROZWIĄZANIE

$$1,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 0,015 \frac{EI}{m} = 0$$

$$0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,6667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 0,015 \frac{EI}{m} = 0$$

$$-0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,01 \frac{EI}{m^2} = 0$$

$$\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,0045 \frac{EI}{m^2} = 0$$

$$\varphi_1 = 0,01197,$$

$$\varphi_2 = -0,00450,$$

$$\delta_I = 0,02310m,$$

$$\delta_{II} = -0,00017m.$$

## OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

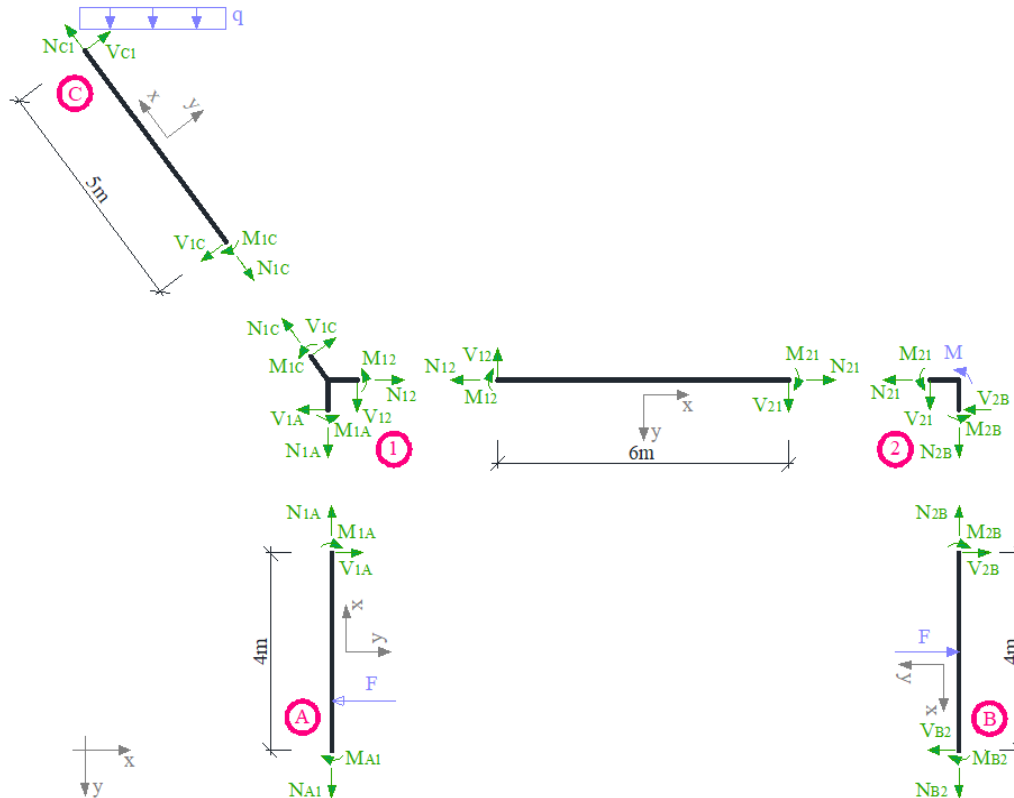
$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^T,$$

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^{\Delta r}.$$



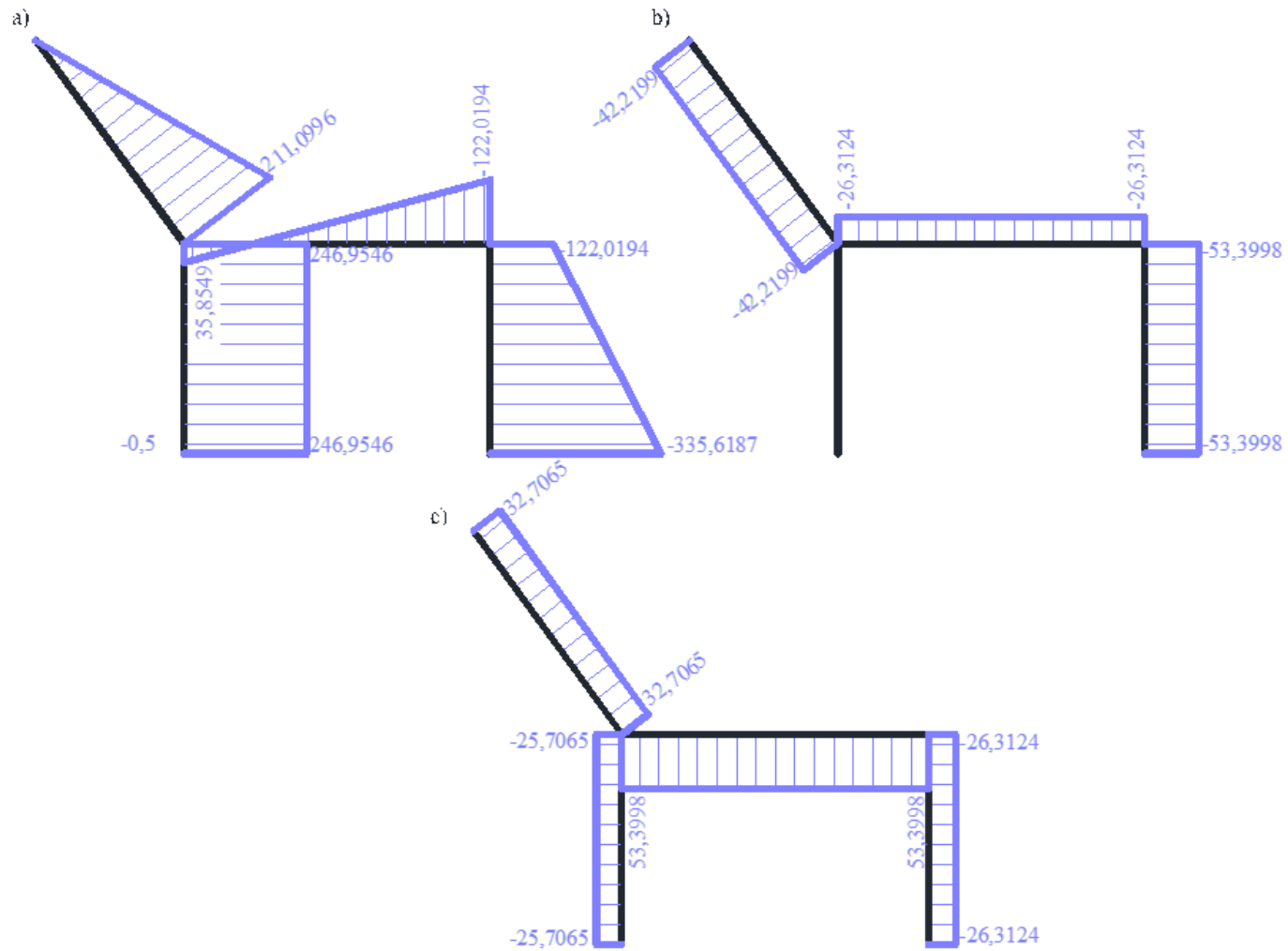
# OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy na brzegach siłami brzegowymi.



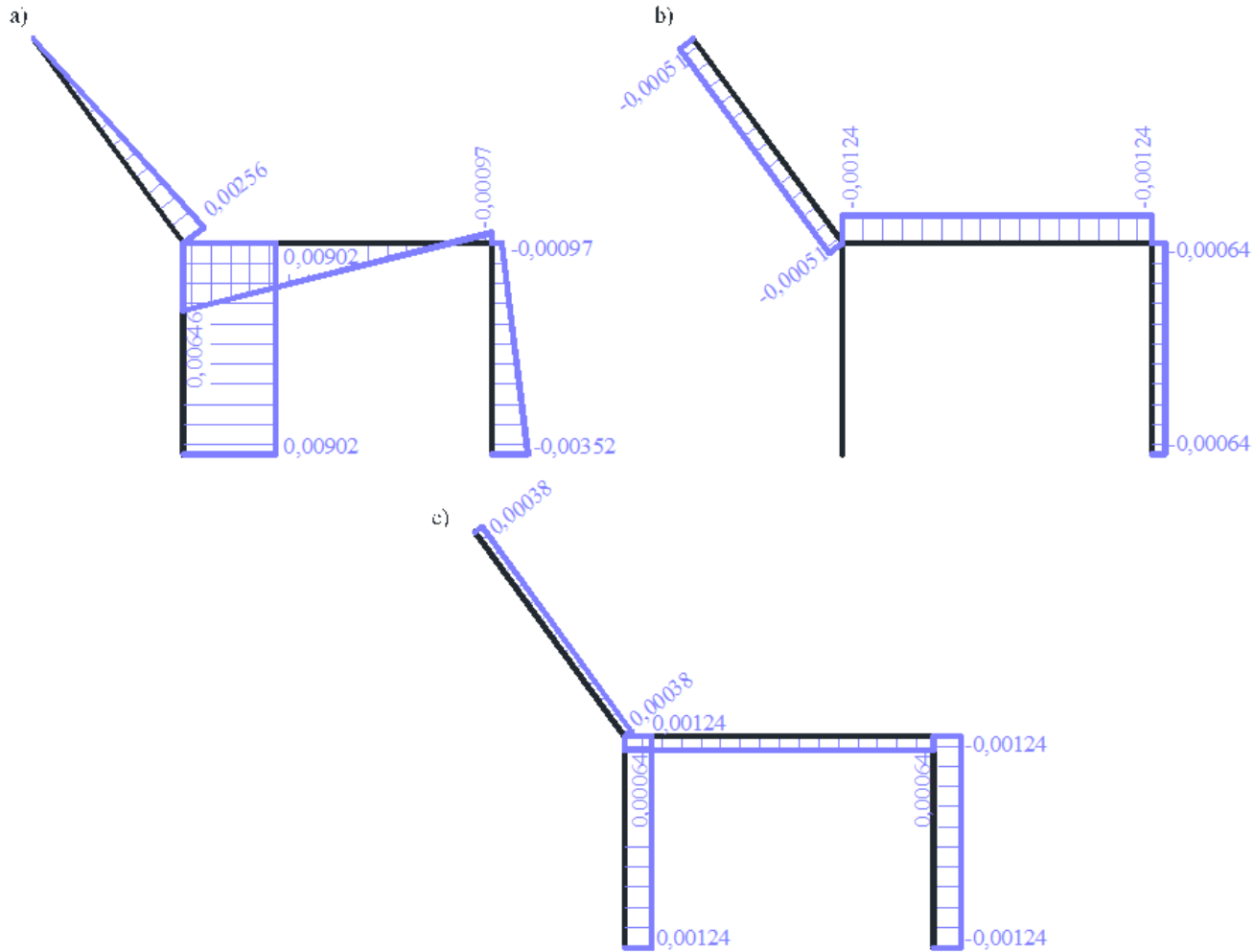
Rys. 6. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

# WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH OD WPŁYWU TEMPERATURY



Rys. 7. Wykres a) momentów zginających  $M$  w  $\frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m}$ ,  
 b) sił tnących  $V$  w  $\frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m^2}$ , c) sił osiowych  $N$  w  $\frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m^2}$

# WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH OD OSIADANIA PODPÓR



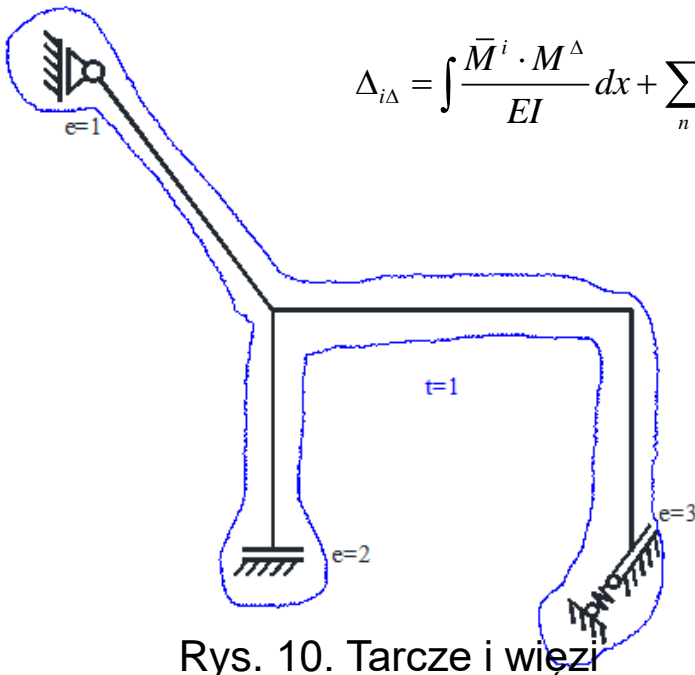
Rys. 8. Wykres a) momentów zginających  $M$  w  $\frac{EI}{m}$ , b) sił tnących  $V$  w  $\frac{EI}{m^2}$ ,  
 c) sił osiowych  $N$  w  $\frac{EI}{m^2}$

## KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając pięć więzi podporowych. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

$$\Delta_{iT} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i}$$

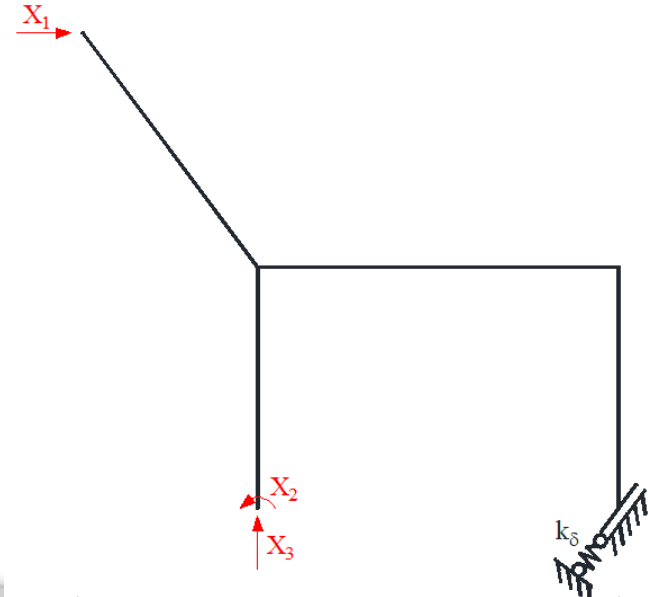
$$\Delta_{i\Delta} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n.$$



Rys. 10. Tarcze i więzi

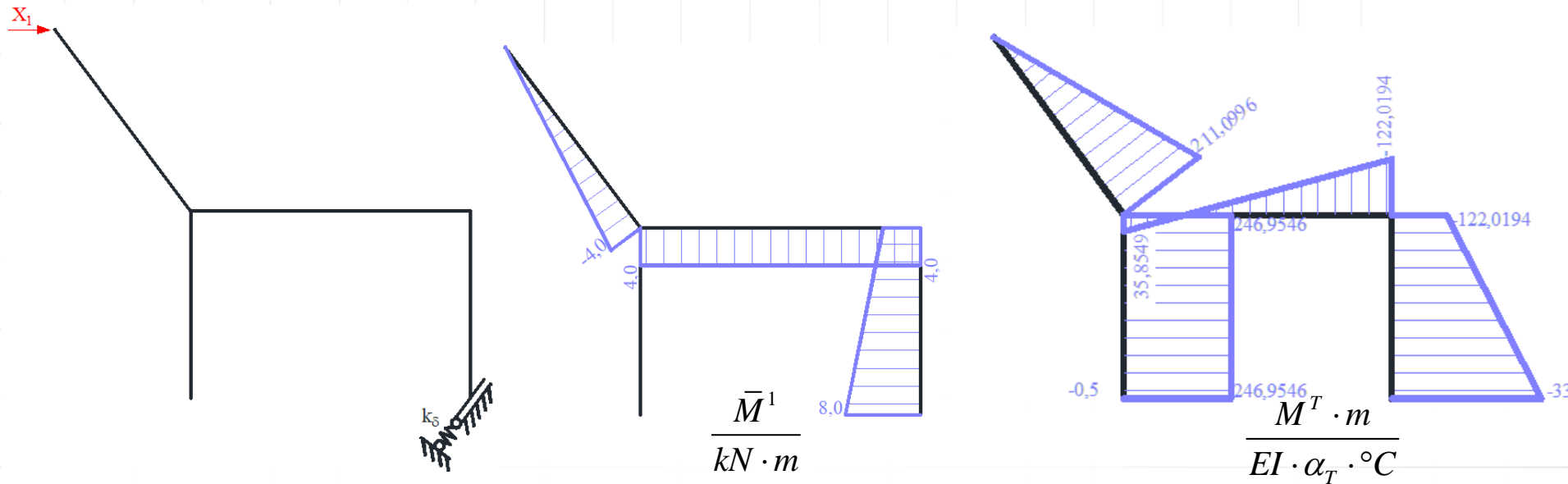
$$t = 1, e = 2 + 3 + 1 = 6,$$

$$n_h = e - 3 \cdot t = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$



Rys.11. Układ podstawowy metody sił

# KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA OD ZMIAN TEMPERATURY



$$\Delta_{1T} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1} =$$

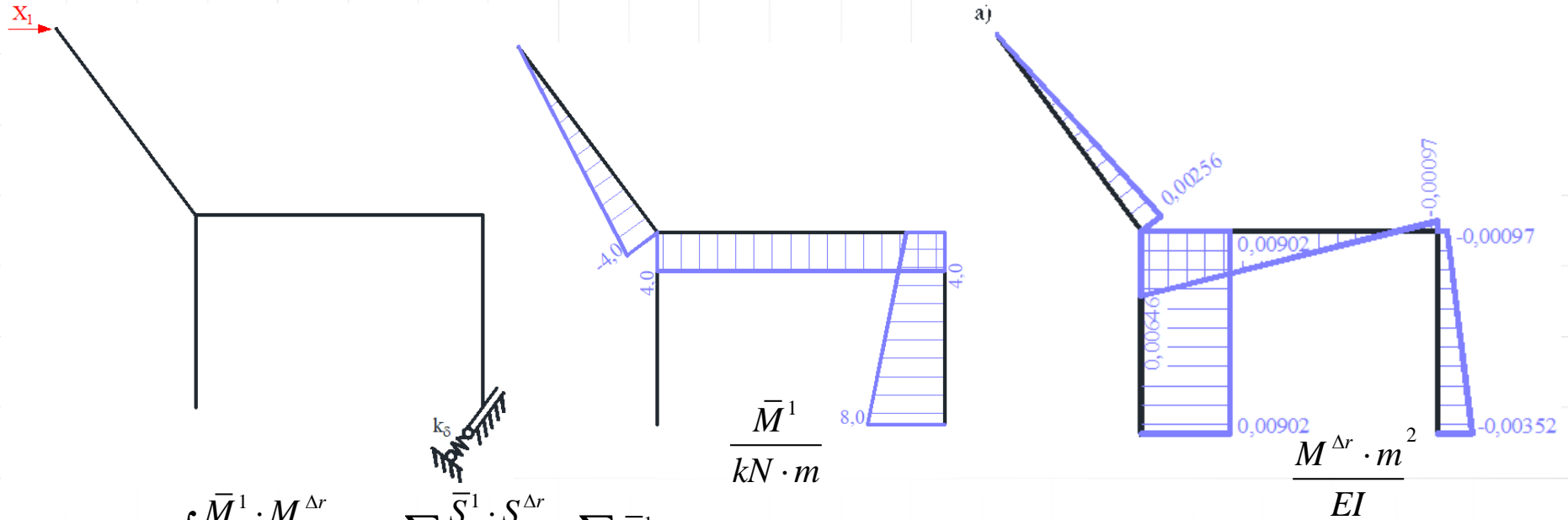
$$+ \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[ 4m \cdot 35,8549 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} + 4 \cdot 4m \cdot (-43,0823) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} + 4m \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} \right] +$$

$$+ \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[ 4m \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-228,819) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} + 8m \cdot (-335,619) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} \right] +$$

$$+ \frac{5m}{6 \cdot EI} \left[ 0 \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} + 4 \cdot (-2)m \cdot 105,5498 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} + (-4)m \cdot 211,0996 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m} \right] +$$

$$+ \frac{0,6 \cdot (-50,6902) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot ^\circ C}{m^2}}{8 \frac{EI}{m^3}} + \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20)^\circ C}{0,18m} \cdot 4m \cdot 6m = -0,0012 \alpha_T \cdot ^\circ C$$

# KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA OD OSIADANIA PODPÓR



$$\Delta_{1\Delta r} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^{\Delta r}}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^{\Delta r}}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n =$$

$$= \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[ 4m \cdot 0,00646 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} + 4 \cdot 4m \cdot 0,00275 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} + 4m \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} \right] +$$

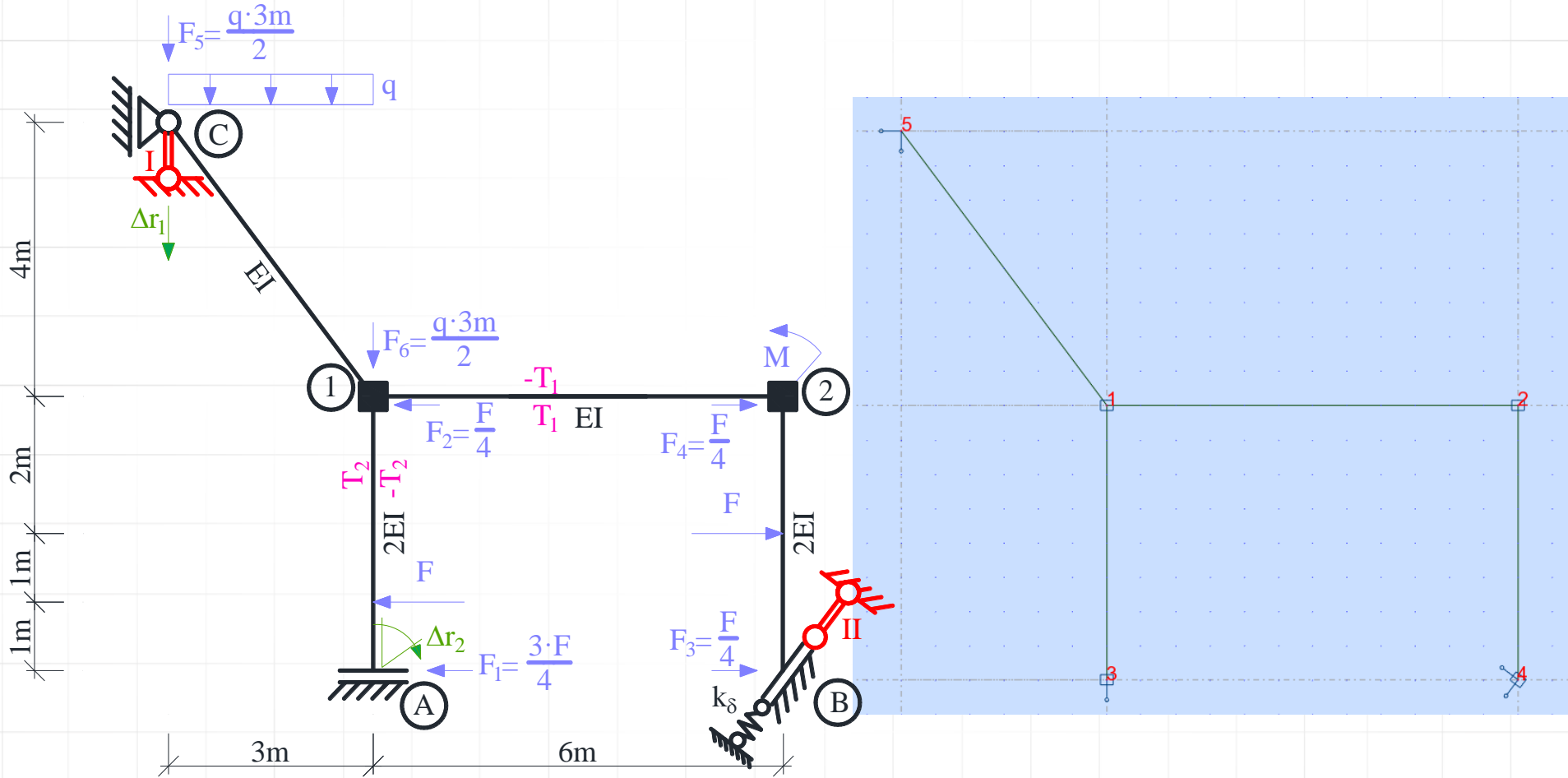
$$+ \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[ 4m \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-0,00225) \frac{EI}{m} + 8m \cdot (-0,00352) \frac{EI}{m} \right] +$$

$$= \frac{5m}{6 \cdot EI} \left[ 0 \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} + 4 \cdot (-2)m \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} + (-4)m \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} \right] + \frac{0,6 \cdot (-0,00136) \frac{EI}{m^2}}{8 \frac{EI}{m^3}} =$$

$$= 0,0200m = \Delta r_1$$

# UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Do programu ROBOT wprowadzamy układ podstawowy metody przemieszczeń.



# UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

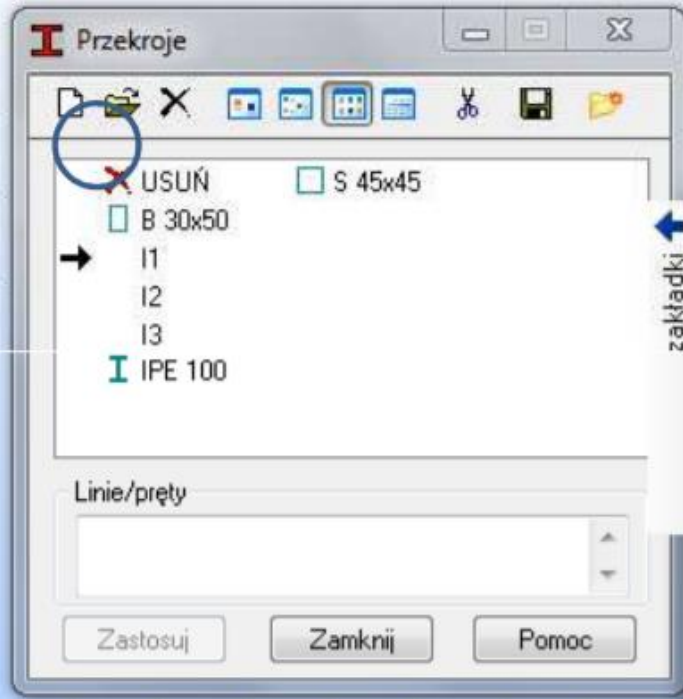
Zdefiniowanie mate

Zdefiniowanie przek

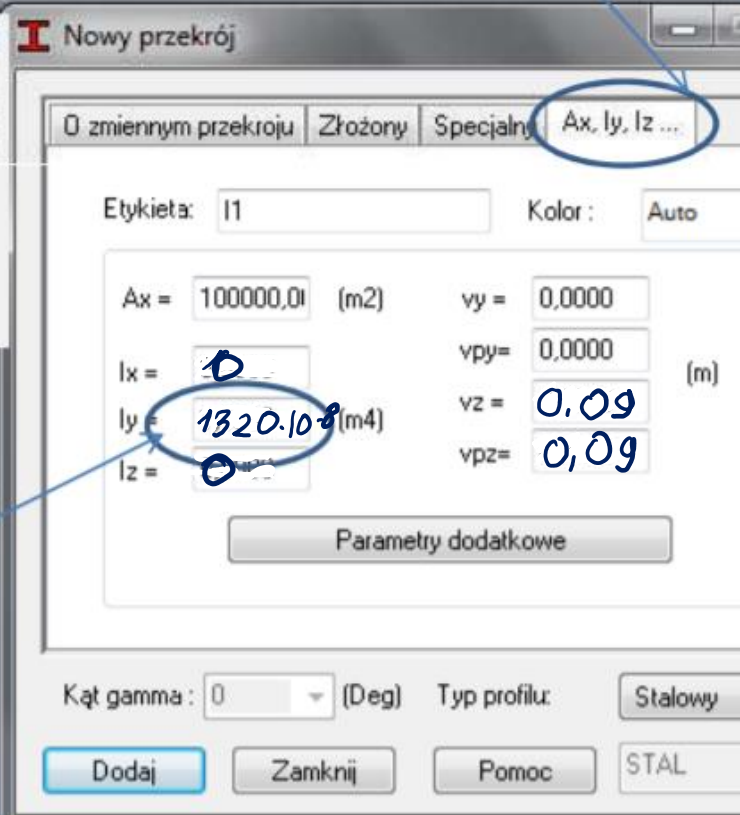
$$A_x = 1\,000\,000\text{ m}^4$$

$$I_y = 1320 \cdot 10^{-8}\text{ m}^4$$

$$I_x, I_z = 0$$



3. W tym oknie tworzymy przekroje



4. Zmieniamy Iy jeśli mamy różne sztywności (np. 2EI, wówczas Iy=2)



# UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Przypadki obciążenia:

1. Ciężar własny
2. Obciążenie dane
3.  $\varphi_1$
4.  $\varphi_2$
5.  $\delta_1$
6.  $\delta_{II}$
7. Temperatura
8. Osiadanie podpór

Dane do obliczeń:

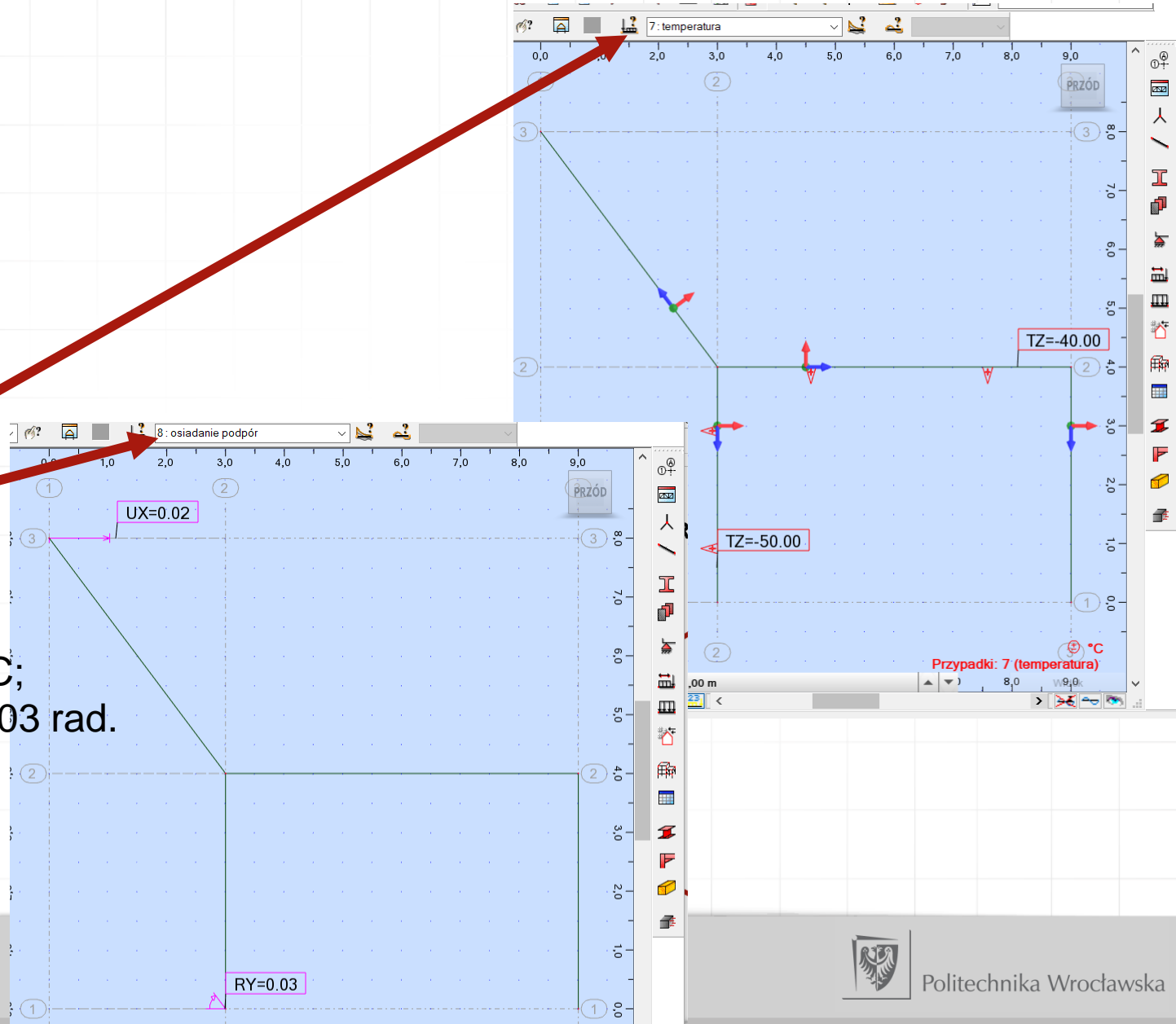
$$k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3$$

$$T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}; T_2 = 25 \text{ }^{\circ}\text{C};$$

$$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad.}$$

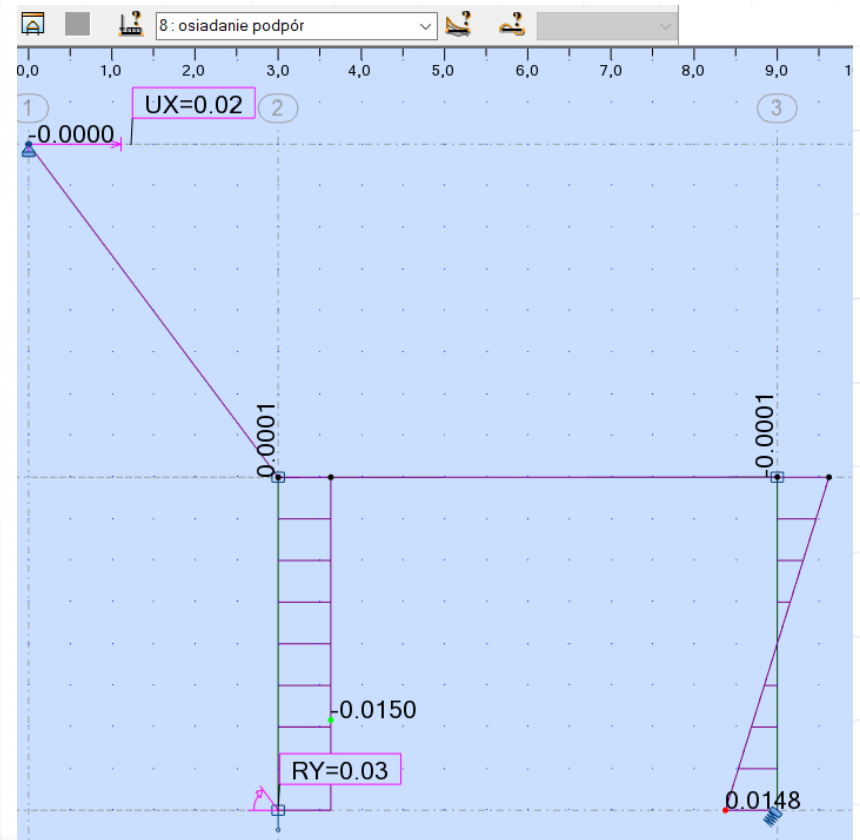
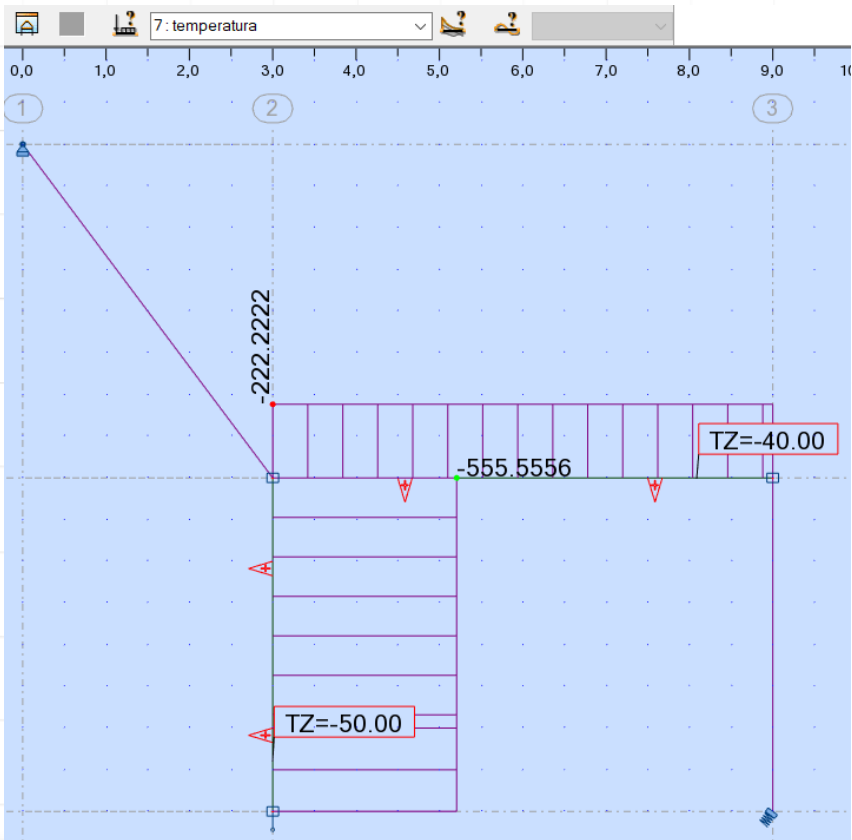
$$\text{EI} \rightarrow \text{IPE180}$$

$$2\text{EI} \rightarrow 2\text{IPE180}$$

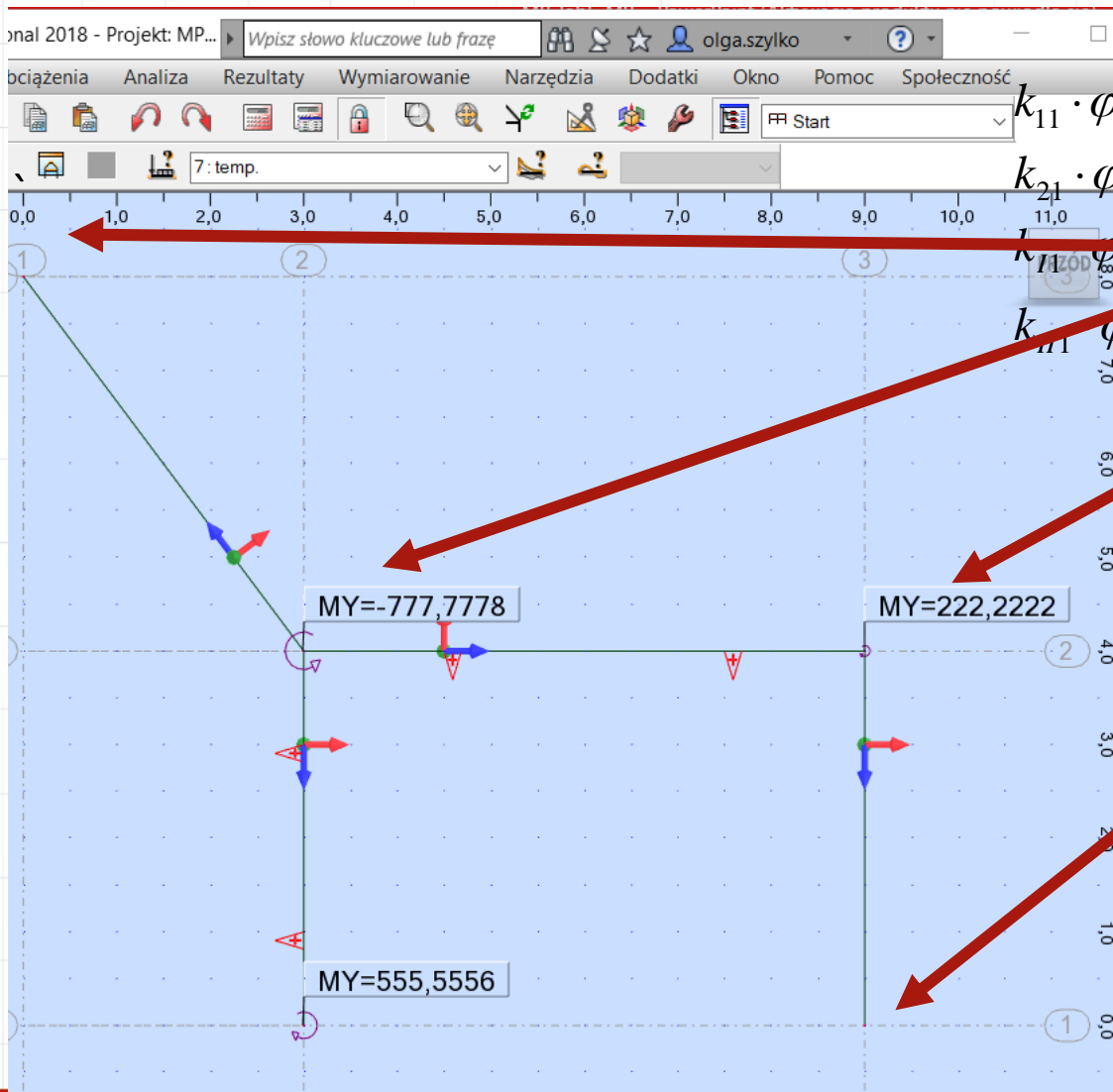


# UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Wykresy momentów  
Zginających w układzie  
podstawowym metody  
przemieszczeń



# KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



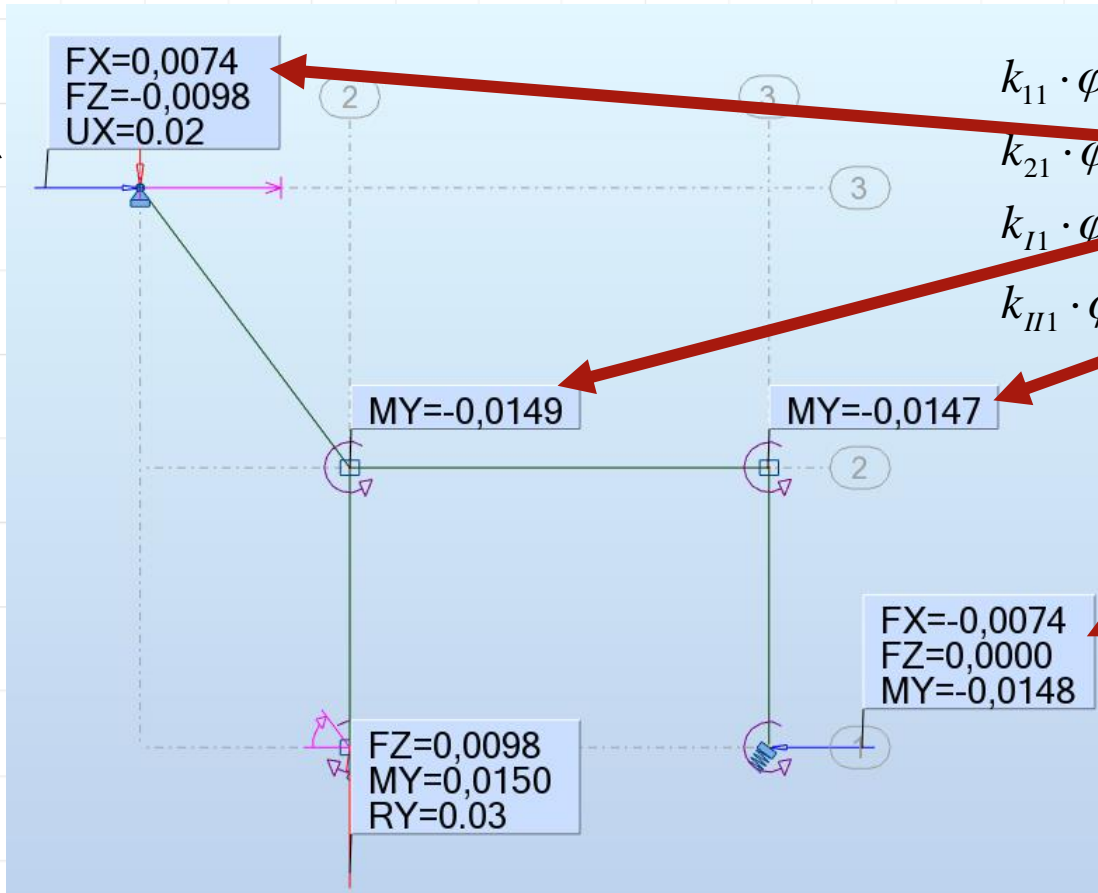
$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1T} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2T} = 0$$

$$k_{31} \cdot \varphi_1 + k_{32} \cdot \varphi_2 + k_{3I} \cdot \delta_I + k_{3II} \cdot \delta_{II} + k_{3T} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{II T} = 0$$

# KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1\Delta} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2\Delta} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I\Delta} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{I\Delta} \cdot \delta_I + k_{II\Delta} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II\Delta} &= FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha = \\
 &= 0,0074 \cdot 0,6 = 0,0044
 \end{aligned}$$

# **UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD RZECZYWISTY**

Do programu ROBOT wprowadzamy układ podstawowy metody przemieszczeń.