

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

SPIS TREŚCI

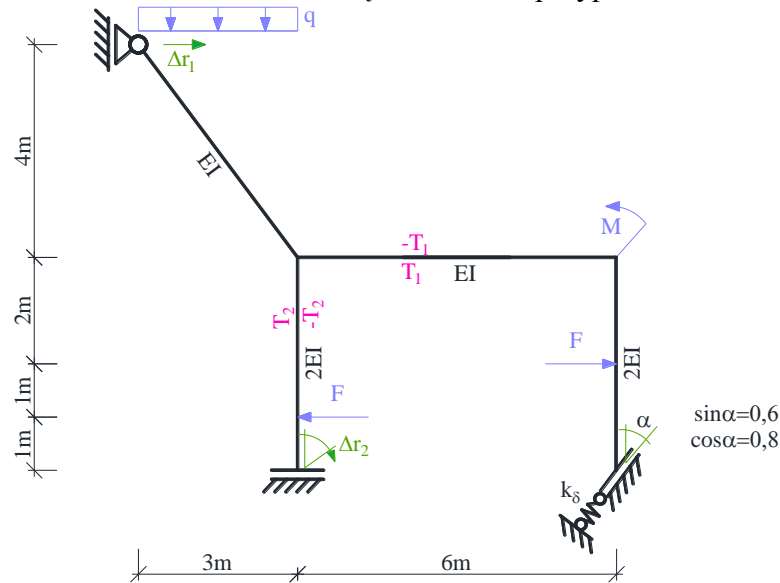
1.	DANE I SZUKANE.....	3
2.	SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI.....	3
3.	OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU.....	4
3.1.	PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW	4
3.2.	WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW	4
3.3.	STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU.....	6
4.	UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ	6
5.	ROZWIĄZANIE UKŁADU OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO	6
5.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO	6
5.2.	PIERWSZY STAN ROTACYJNY	8
5.3.	DRUGI STAN ROTACYJNY	8
5.4.	PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY	9
5.5.	DRUGI STAN TRANSLACYJNY	11
5.6.	UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE	13
5.6.1.	POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ.....	13
5.6.2.	OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ.....	13
5.6.3.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE	15
5.7.	OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	15
5.7.1.	OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH	15
5.7.2.	OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	16
6.	WSTĘPNE PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW PRĘTÓW.....	19
7.	ROZWIĄZANIE UKŁADU OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURĄ.....	19
7.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURY.....	19
7.2.	UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE	20
7.2.1.	POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ.....	20
7.2.2.	OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ.....	20

7.2.3.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE	21
7.3.	OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	21
7.3.1.	OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH.....	21
7.3.2.	OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	22
8.	ROZWIĄZANIE UKŁADU OD OSIADANIA PODPÓR.....	24
8.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OSIADANIA PODPÓR.....	24
8.2.	UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE	26
8.2.1.	POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ.....	26
8.2.2.	OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ.....	26
8.2.3.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE	27
8.3.	OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	27
8.3.1.	OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH	27
8.3.2.	OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	28
9.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA.....	30
9.1.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA O OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO	33
9.2.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA O OD TEMPERATURY	34
9.3.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA O OD OSIADANIA PODPÓR	35

1. DANE I SZUKANE

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu jak na rysunku 1.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..

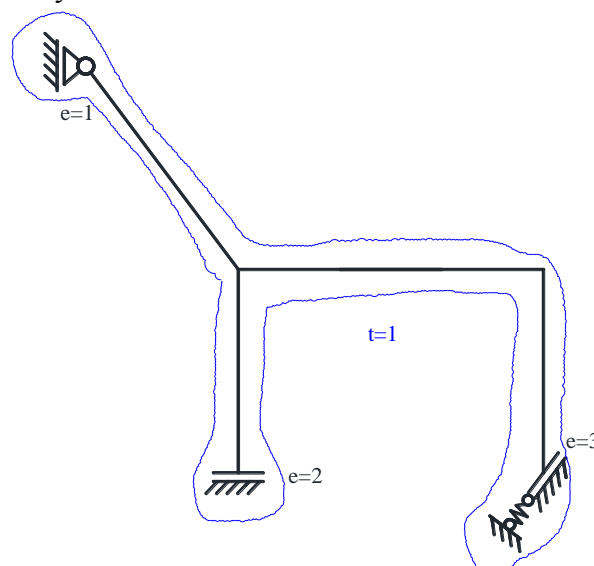


Rys. 1.1. Schemat statyczny

Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 20 \text{ kN m}$; $k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3$; $\Delta T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $\Delta T_2 = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}$; $\Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$.

2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności



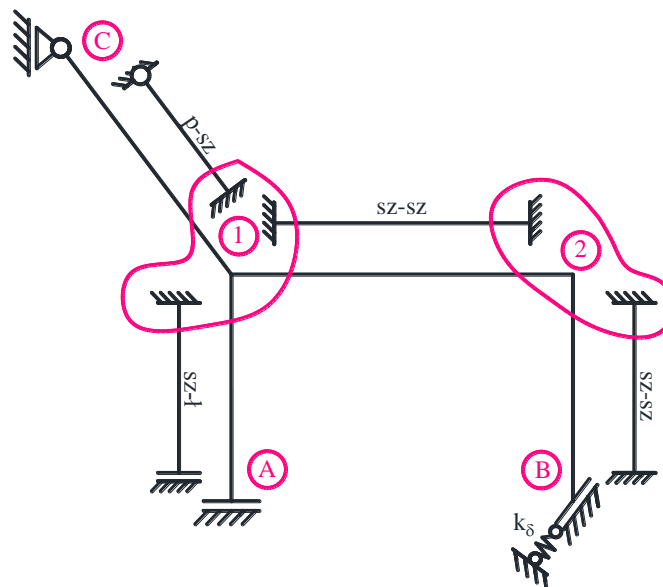
Rys. 2.1. Tarcze i więzi

$$t = 1, e = 2 + 3 + 1 = 6, \quad n_h = e - 3 \cdot t = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją siedmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZLNOŚCI UKŁADU

3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW



Rys. 3.1.1. Numeracja węzłów i typów prętów

Z przyjętego podziału na pręty wynika, że:

- Dla prętów i-j stosowane będą wzory transformacyjne w postaci:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o$$

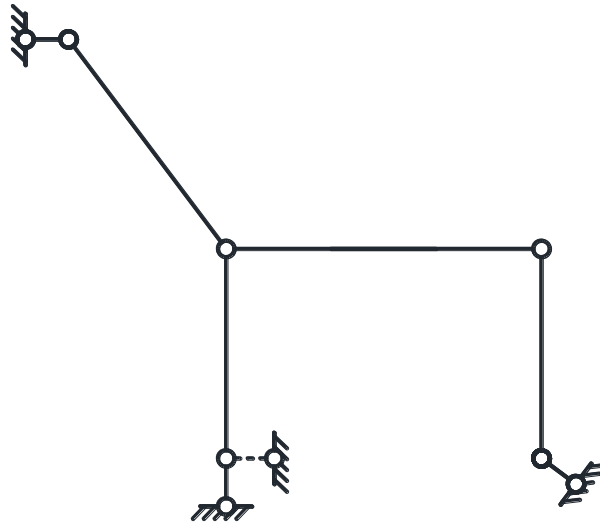
Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, $\varphi_{2B} = \varphi_{21} = \varphi_2$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 2$.

3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste

- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcem utwierdzonym a prawym utwierdzony z przesuwnem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



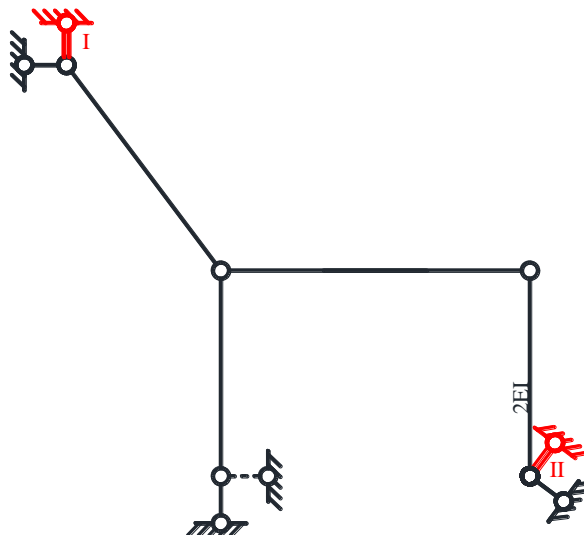
Rys. 3.2.1. Model przegubowy

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

$$n_{\delta} \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2,$$

gdzie: $w = 9$ - liczba węzłów modelu,
 $p = 8$ - liczba prętów w modelu,
 $r = 8$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 3.2.2. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 2 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwu węzłów $n_{\delta} = 2$.

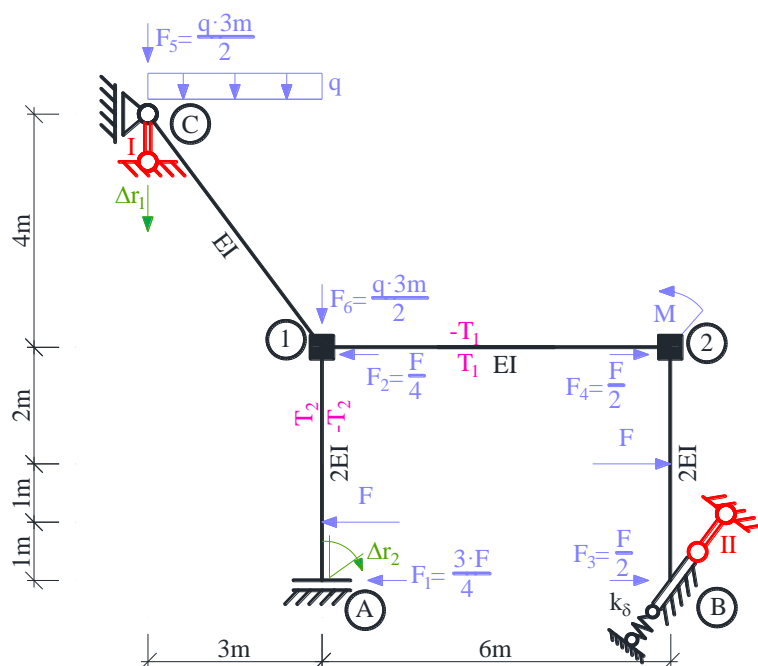
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIETYCZALNOŚCI UKŁADU

Stopec geometrycznej nietyczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 2 = 4.$$

4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMISZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rys.4.1., jest geometrycznie wyznaczalny.

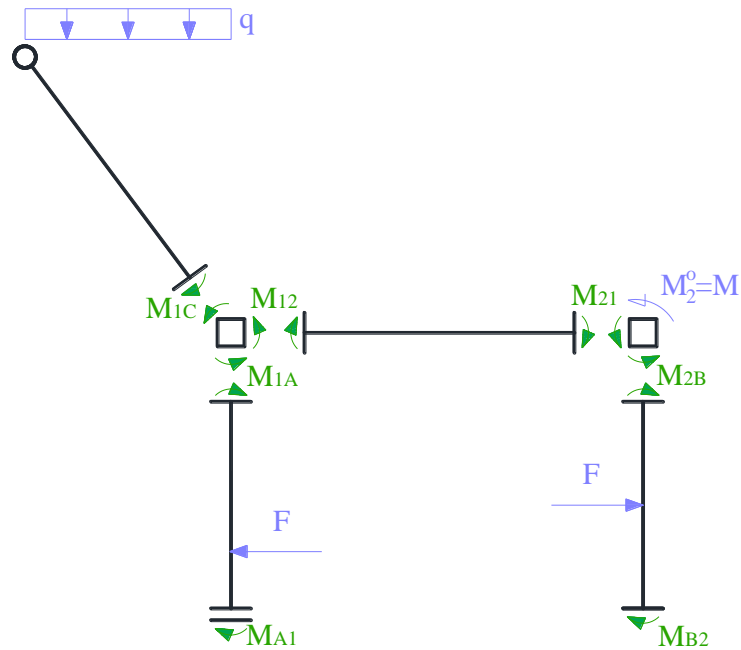


Rys. 4.1. Układ podstawowy metody przemieszczeń

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

5.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



Rys. 5.1.1. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego

$$M_{1A}^o = -FL\xi(1-\xi/2) = -8kN \cdot 4m \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{3}{4 \cdot 2}) = -15kN \cdot m,$$

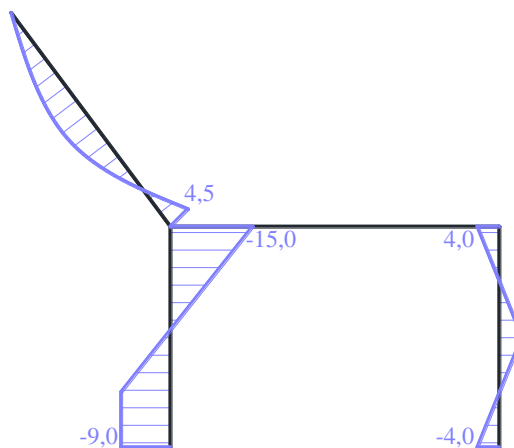
$$M_{A1}^o = -FL\xi^2/2 - 8kN \cdot 4m \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{2} = -9kN \cdot m,$$

$$M_{1C}^o = qL^2/8 = \frac{4kN/m \cdot (3m)^2}{8} = 4,5kN \cdot m,$$

$$M_{2B}^o = FL/8 = \frac{8kN \cdot 4m}{8} = 4kN \cdot m,$$

$$M_{B2}^o = -FL/8 = \frac{-8kN \cdot 4m}{8} = -4kN \cdot m,$$

$$M_{C1}^o = M_{12}^o = M_{21}^o = 0.$$



Rys. 5.1.2. Wykres momentów M^o w $kN \cdot m$.

5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}}(a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}}(a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \frac{EI}{m}$$

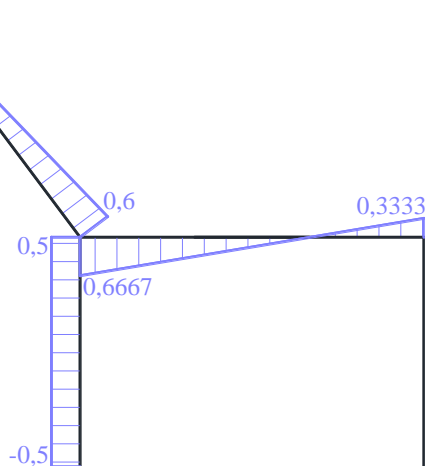
$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}}(a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{4m}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1}{2} \frac{EI}{m},$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}}(a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{4m}(4 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1}{2} \frac{EI}{m}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}}(a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m}(3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{3}{5} \frac{EI}{m}$$

$$M_{C1}^1 = 0, M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



Rys. 5.2.1. Wykres momentów M^1 w EI/m .

5.3. DRUGI STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_2 = \varphi_{2j} = 1$, $\varphi_I = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{2j}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}}(a_{2j} \cdot \varphi_{2j} + b_{2j} \cdot \varphi_{j2}),$$

$$M_{j2}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{j2} \cdot \varphi_{j2} + b_{j2} \cdot \varphi_{2j}).$$

Momenty brzegowe wynoszą:

$$M_{21}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \frac{EI}{m}$$

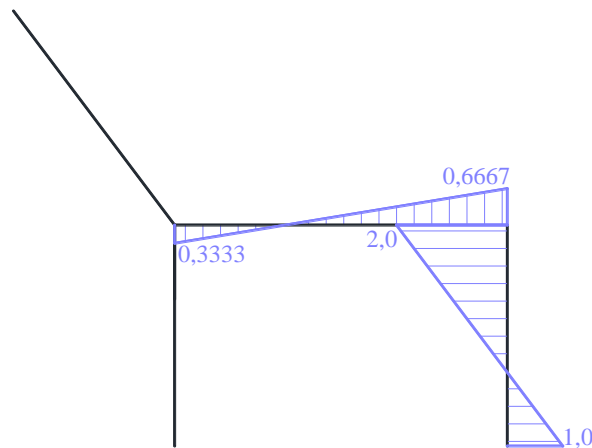
$$M_{12}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{2B}^2 = \frac{EI_{1B}}{L_{1B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^2 = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1 \frac{EI}{m},$$

$$M_{C1}^2 = M_{1C}^2 = M_{12}^2 = M_{21}^2 = 0, \quad M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$

$$S_{\varphi_1}^2 = k_1^{\varphi} \cdot \varphi_1 = 10 \frac{EI}{m} \cdot 0 = 0,$$



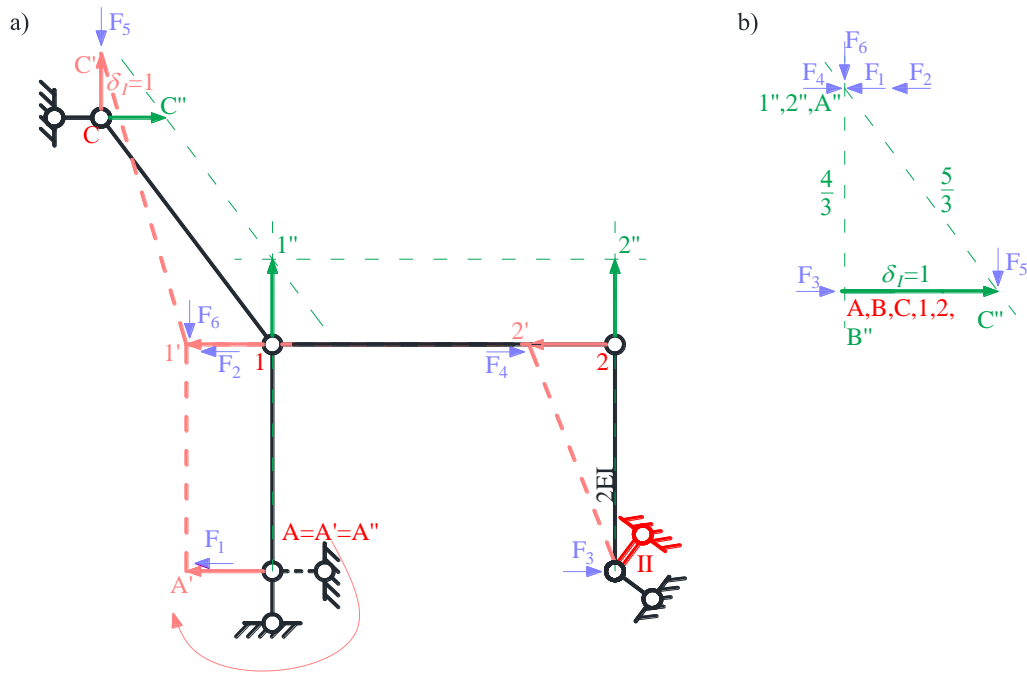
Rys. 5.3.1. Wykres momentów M^2 w EI/m .

5.4. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układu z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszane jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



Rys. 5.4.1. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{2B}^I = -|2''B''| = -\frac{4}{3} \quad (,,-" \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{1C}^I = +|1''C''| = +\frac{5}{3} \quad (,,+" \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo})$$

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = 0$$

$$\Delta_{1A}^I = |1''A''| = 0$$

Kąty obrotów cięwiw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1A}^I = \psi_{12}^I = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{2B}^I = M_{B2}^I = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^I = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{1C}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{C1}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{C1} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3m} = 0,$$

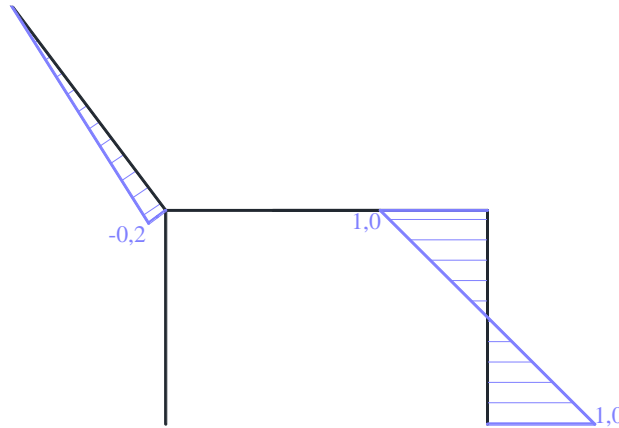
$$M_{1A}^I = M_{A1}^I = M_{12}^I = M_{21}^I = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1' = \frac{4}{3}, \quad \delta_2' = \frac{4}{3}, \quad \delta_3' = 0, \quad \delta_4' = -\frac{4}{3}, \quad \delta_5' = -1, \quad \delta_6' = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_8}' = 0$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_i} = k_{\delta} \cdot \Delta L_{k_8}' = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 = 0$



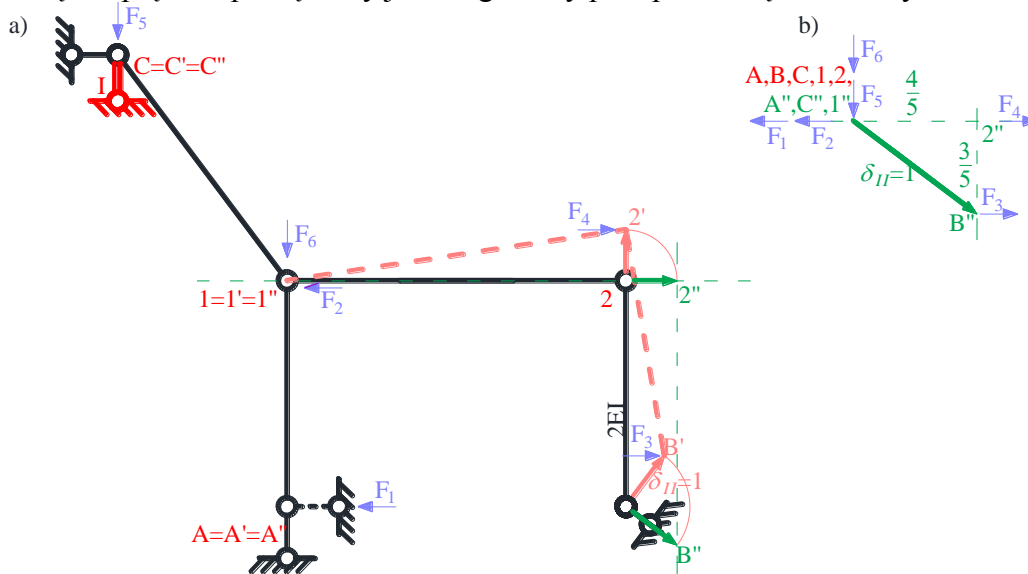
Rys. 5.4.2. Wykres momentów M^I w EI/m^2 .

5.5. DRUGI STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = 0$, kąty obrotu cięćw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_{II} = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}'' = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}'', \quad M_{ji}'' = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ji}''.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięćw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układu z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone jest przemieszczenie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięćw prętów sporządzany jest biegunowy plan przemieszczeń obróconych.



Rys. 5.5.1. a) Plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}'' = -|1''2''| = -\frac{4}{5} \quad (,,-'', \text{ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{12}'' = -|2''B''| = -\frac{3}{5} \quad (,,-'', \text{ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{1A}'' = |1''A''| = 0$$

$$\Delta_{1C}'' = |1''C''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}'' = \frac{\Delta_{ij}''}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}'' = \frac{\Delta_{12}''}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}'' = \frac{\Delta_{2B}''}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}'' = \psi_{1C}'' = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_i wynoszą:

$$M_{12}'' = M_{21}'' = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}'' = -\frac{EI}{6m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{2B}'' = M_{B2}'' = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}'' = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}$$

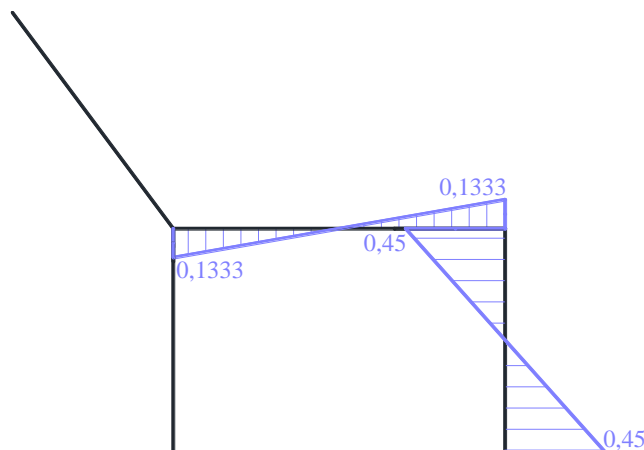
$$M_{1A}'' = M_{A1}'' = M_{1C}'' = M_{C1}'' = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1'' = 0, \quad \delta_2'' = 0, \quad \delta_3'' = \frac{3}{5}, \quad \delta_4'' = 0, \quad \delta_5'' = 0, \quad \delta_6'' = 0$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_8}'' = 1$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_8} = k_{\delta} \cdot \Delta L_{k_8}'' = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 8 \frac{EI}{m^3}$



Rys. 5.5.2. Wykres momentów M'' w EI/m^2 .

5.6. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

5.6.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} &= 0 \\ k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} &= 0 \\ k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} &= 0 \\ k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} &= 0 \end{aligned}$$

5.6.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^\varphi = (0,6667 + 0,5 + 0,6 + 0) \frac{EI}{m} = \frac{53}{30} \frac{EI}{m} = 1,7667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{12} = \sum_j M_{1j}^2 = M_{12}^2 + M_{1A}^2 + M_{1C}^2 = (0,3333 + 0 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = 0 + 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{EI}{m^2} = -0,2 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1II} = \sum_j M_{1j}^{II} = M_{12}^{II} + M_{1A}^{II} + M_{1C}^{II} = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + 0 + 0 = 0,1333 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o = M_{12}^o + M_{1A}^o + M_{1C}^o = 0 - 15kN \cdot m + 4,5kN \cdot m = -10,5kN \cdot m,$$

$$k_{21} = \sum_j M_{2j}^1 = M_{21}^1 + M_{2B}^1 = (0,3333 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k_2^\varphi = M_{21}^2 + M_{2B}^2 + k_2^\varphi = \left(\frac{2}{3} + 2 + 0\right) \frac{EI}{m} = \frac{8}{3} \frac{EI}{m} = 2,6667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{2I} = \sum_j M_{2j}^I = M_{21}^I + M_{2B}^I = 0 + 1 \frac{EI}{m^2} = 1 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2II} = \sum_j M_{2j}^{II} = M_{21}^{II} + M_{2B}^{II} = \left(\frac{2}{15}\right) \frac{EI}{m^2} + \left(\frac{9}{20}\right) \frac{EI}{m^2} = \frac{7}{12} \frac{EI}{m^2} = 0,5833 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2o} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = [0 + 4 - (-20)] kN \cdot m = 24kN \cdot m.$$

$$\begin{aligned} k_{I1} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi'_{ij} = -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi'_{12} - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi'_{1A} - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi'_{1C} - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi'_{2B} = \\ &= -\left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = -0,2 \frac{EI}{m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{I2} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi'_{ij} = -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi'_{12} - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi'_{1A} - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi'_{1C} - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi'_{2B} = \\ &= -\left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{I,I} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi'_{ij} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi'_{12} - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi'_{1A} - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi'_{1C} - \\ &- (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi'_{2B} + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^I = -(0 + 0) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) + \\ &+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 0 = 0,7333 \frac{EI}{m^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{I,II} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^{II} = -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^I - \\
 & -(M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^{II} = -\left(\frac{2 EI}{15 m^2} + \frac{2 EI}{15 m^2}\right) \cdot 0 - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(\frac{9 EI}{20 m^2} + \frac{9 EI}{20 m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) + \\
 & + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 1 = 0,3 \frac{EI}{m^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{Io} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I = -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^I - (M_{1A}^o + M_{A1}^o) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^o + M_{C1}^o) \psi_{1C}^I - \\
 & -(M_{2B}^o + M_{B2}^o) \psi_{2B}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - P_2 \cdot \delta_2^I - P_3 \cdot \delta_3^I - P_4 \cdot \delta_4^I - P_5 \cdot \delta_5^I - P_6 \cdot \delta_6^I = -(0+0) \cdot 0 - \\
 & -(-15kN \cdot m - 9kN \cdot m) \cdot 0 - (0 + 4,5kN \cdot m) \cdot \frac{1}{3m} - (4kN \cdot m - 4kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) - 6kN \cdot \frac{4}{3} - 2kN \cdot \frac{4}{3} - \\
 & -4kN \cdot 0 - 4kN \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 6kN \cdot (-1) - 6kN \cdot 0 = -0,83333kN,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II1} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^{II} = \\
 & = -\left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot 0 - (0+0) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{2 EI}{15 m^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II2} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^{II} = \\
 & = -\left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = 0,5833 \frac{EI}{m^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II,I} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^{II} - \\
 & -(M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^I = -(0+0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0+0) \cdot 0 - \left(-\frac{1 EI}{5 m^2} + 0\right) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) + \\
 & + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 0 = 0,3 \frac{EI}{m^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II,II} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^{II} = -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^{II} - \\
 & -(M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^{II} = -\left(\frac{2 EI}{15 m^2} + \frac{2 EI}{15 m^2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \\
 & -\left(\frac{9 EI}{20 m^2} + \frac{9 EI}{20 m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,1705 \frac{EI}{m^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{IIo} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^{II} - \sum_P P_P \cdot \delta_P^{II} = -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^o + M_{A1}^o) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^o + M_{C1}^o) \psi_{1C}^{II} - \\
 & -(M_{2B}^o + M_{B2}^o) \psi_{2B}^{II} - P_1 \cdot \delta_1^{II} - P_2 \cdot \delta_2^{II} - P_3 \cdot \delta_3^{II} - P_4 \cdot \delta_4^{II} - P_5 \cdot \delta_5^{II} - P_6 \cdot \delta_6^{II} = -(0+0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - \\
 & -(-15kN \cdot m - 9kN \cdot m) \cdot 0 - (0 + 4,5kN \cdot m) \cdot 0 - (4kN \cdot m - 4kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) - 6kN \cdot 0 - 2kN \cdot 0 - \\
 & -4kN \cdot \frac{3}{5} - 4kN \cdot 0 - 6kN \cdot 0 - 6kN \cdot 0 = -2,4kN.
 \end{aligned}$$

5.6.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$1,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 10,5 kN \cdot m = 0$$

$$0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,6667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 24 kN \cdot m = 0$$

$$-0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,8333 kN = 0$$

$$\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 2,4 kN = 0$$

$$\varphi_1 = 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI}, \quad \varphi_2 = -26,6186 \frac{kN \cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_I = 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI}, \quad \delta_{II} = 0,4142 \frac{kN \cdot m^3}{EI}.$$

5.7. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

5.7.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^o,$$

Momenty brzegowe:

$$M_{12} = M_{12}^1 \cdot \varphi_1 + M_{12}^2 \cdot \varphi_2 + M_{12}^I \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{12}^o = 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 = 1,6034 kN \cdot m$$

$$M_{21} = M_{21}^1 \cdot \varphi_1 + M_{21}^2 \cdot \varphi_2 + M_{21}^I \cdot \delta_I + M_{21}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{21}^o = 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 = -12,4785 kN \cdot m$$

$$M_{1A} = M_{1A}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1A}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1A}^I \cdot \delta_I + M_{1A}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1A}^o = 0,5 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + (-15) kN \cdot m = -7,1820 kN \cdot m$$

$$M_{A1} = M_{A1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{A1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{A1}^I \cdot \delta_I + M_{A1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{A1}^o = -0,5 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + (-9) kN \cdot m = -16,8180 kN \cdot m$$

$$M_{1C} = M_{1C}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1C}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1C}^I \cdot \delta_I + M_{1C}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1C}^o = 0,6 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ (-0,2) \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 4,5 kN \cdot m = 5,5757 kN \cdot m$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$M_{C1} = M_{C1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{C1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{C1}^I \cdot \delta_I + M_{C1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{C1}^o = 0 \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 = 0$$

$$M_{2B} = M_{2B}^1 \cdot \varphi_1 + M_{2B}^2 \cdot \varphi_2 + M_{2B}^I \cdot \delta_I + M_{2B}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{2B}^o = 0 \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 2 \frac{EI}{m} \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 4kN \cdot m = -7,5214kN \cdot m$$

$$M_{B2} = M_{B2}^1 \cdot \varphi_1 + M_{B2}^2 \cdot \varphi_2 + M_{B2}^I \cdot \delta_I + M_{B2}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{B2}^o = 0 \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 1 \frac{EI}{m} \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

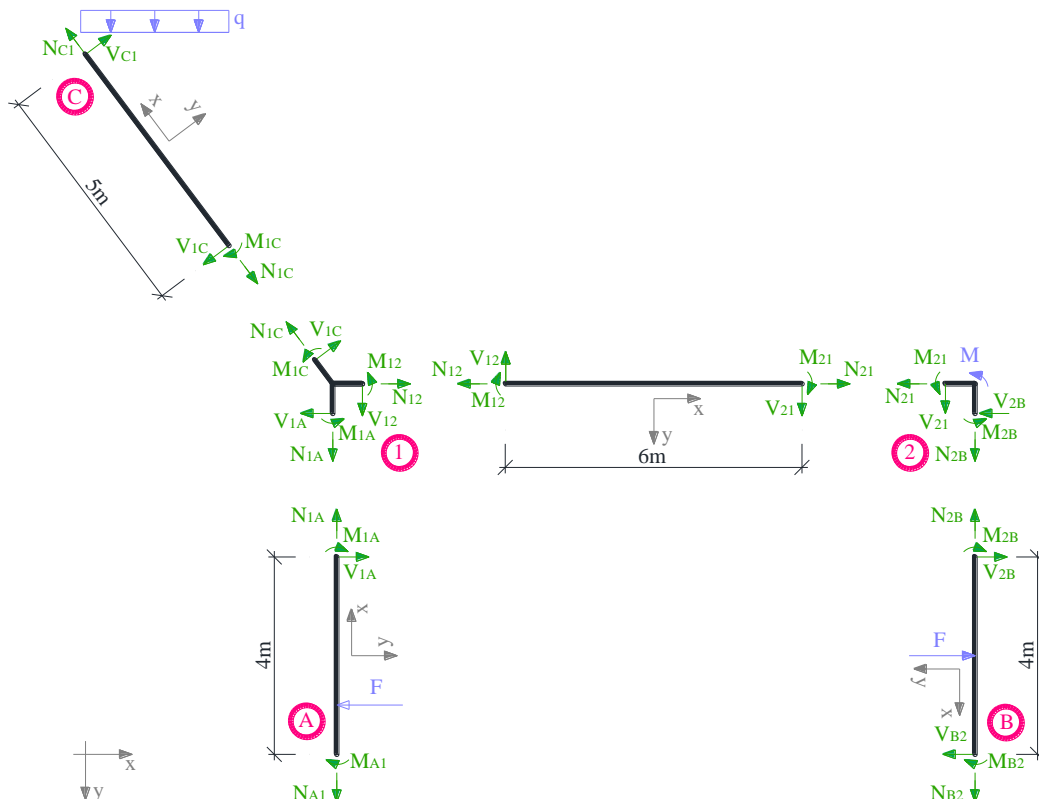
$$+ 1 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + (-4)kN \cdot m = 11,0972kN \cdot m$$

Moment zginający w więzi sprężystej:

$$S_\delta = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I + S_1^{\delta_{II}} \cdot \delta_{II} = 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0,4142 \frac{kN \cdot m^3}{EI} = 3,3136 \frac{EI}{m^3}$$

5.7.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 5.7.2.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{21}^F + V_{21} \cdot 6m = [1,6037 + (-12,4785) + V_{21} \cdot 6] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{21} = 1,8120 kN,$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = [V_{12} - 1,8120] kN = 0 \Rightarrow V_{12} = 1,8120,$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$$

Pręt 1-A

$$\sum V = -V_{1A} + F = [-V_{1A} + 8] kN = 0 \Rightarrow V_{1A} = 8 kN,$$

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 4m - F \cdot 1m = [(-16,8180) + (-7,1820) + 8 \cdot 4 - 8 \cdot 1] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A}.$$

Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C} + V_{1C} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m = [5,5757 + V_{1C} \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = -4,7151 kN,$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + V_{C1} \cdot 5m - q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = [5,1908 + V_{C1} \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{C1} = 2,4849 kN,$$

$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} + q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = [N_{1C} - N_{C1} + 4 \cdot 3 \cdot 0,8] kN = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C} + 9,6 kN.$$

Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2} + M_{2B} + V_{2B} \cdot 4m + F \cdot 2m = [11,0972 + (-7,5214) + V_{2B} \cdot 4 + 8 \cdot 2] kN \cdot m = 0$$

$$\Rightarrow V_{2B} = -4,8940 kN,$$

$$\sum V = V_{2B} - V_{B2} + F = [-4,8940 - V_{B2} + 8] kN = 0 \Rightarrow V_{B2} = 3,1060 kN,$$

$$\sum N = N_{2B} - N_{B2} = 0 \Rightarrow N_{B2} = N_{2B}.$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} + M = [-12,4785 + (-7,5214) + 20] kN \cdot m = 0,0001,$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = [-4,8940 + N_{21}] kN = 0 \Rightarrow N_{21} = 4,8940 kN,$$

$$\sum Y = V_{21} - N_{2B} = [1,8120 - N_{2B}] kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = 1,8120 kN.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2} = N_{2B} = 1,8120 kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12} = N_{21} = 4,8940 kN$.

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1C} = [1,6034 + (-7,1820) + 5,5757] kN \cdot m = 0,0001 kN \cdot m,$$

$$\sum X = N_{12} - V_{1A} + V_{1C} \sin \alpha - N_{1C} \cdot \cos \alpha = [4,8940 - 8 + (-4,7151) \cdot 0,8 - N_{1C} \cdot 0,6] kN = 0$$

$$\Rightarrow N_{1C} = -11,4634 kN.$$

$$\sum Y = V_{12} + N_{1A} - V_{1C} \cdot \cos \alpha - N_{1C} \cdot \sin \alpha = [1,8120 + N_{1A} - (-4,7151) \cdot 0,6 - (-11,3609) \cdot 0,8] kN = 0 kN$$

$$\Rightarrow N_{1A} = -13,7299 kN$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1} = N_{1A} \Rightarrow N_{A1} = -13,7299 kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1} = N_{1C} + 9,6 kN = -13,7299 kN + 9,6 kN = -4,1298 kN$

Oblizczenie momentów zginających

$$M_{zgin,12} = M_{12} = 1,6034 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,21} = -M_{21} = 12,4875 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = 7,1820 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = -16,8180 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = 5,5757 kN \cdot m$$

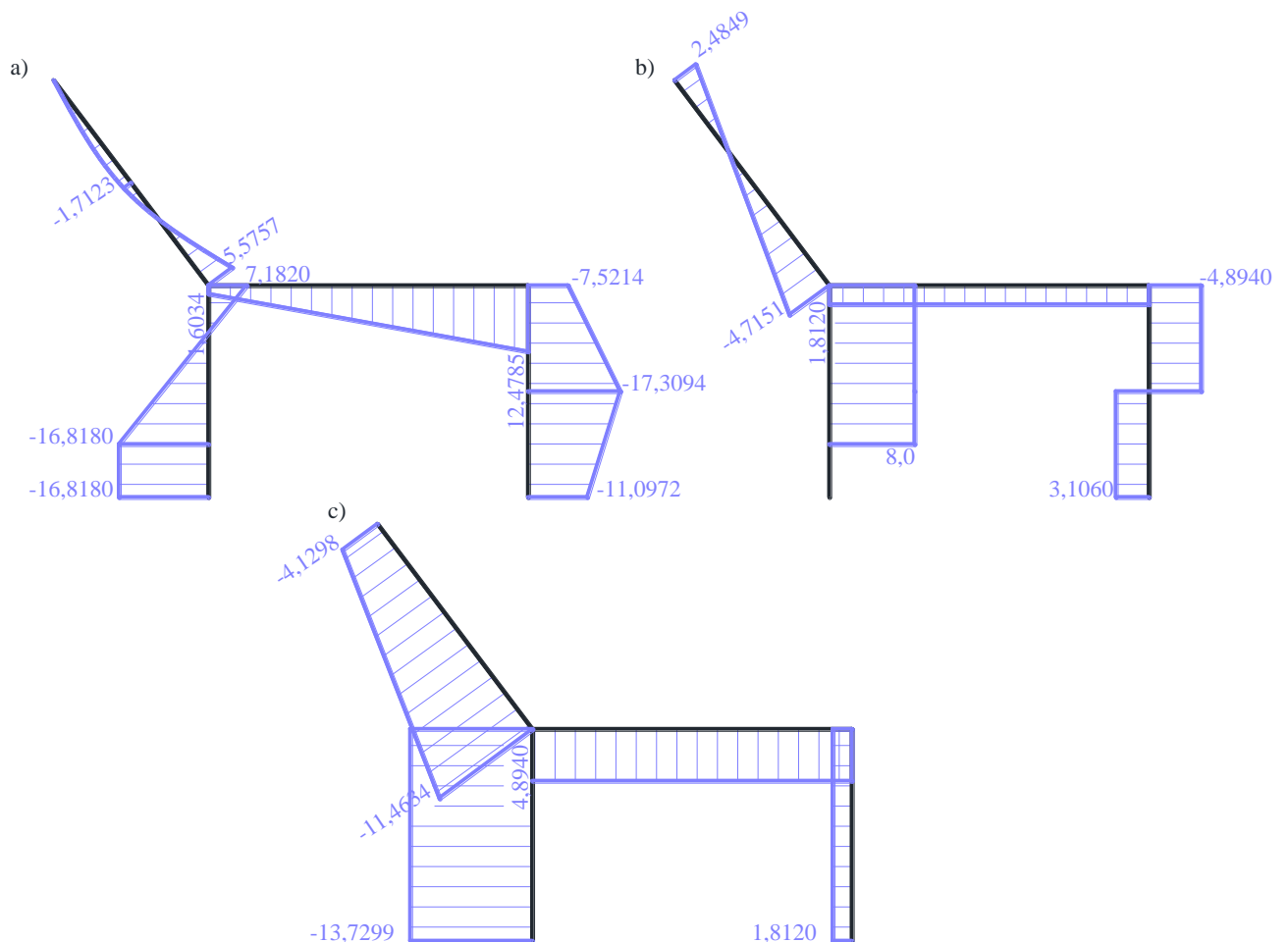
$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 0$$

$$M_{zgin,4} = -V_{C1} \cdot 2,5m + q \cdot 1,5m \cdot \frac{1,5m}{2} = [-2,4849 \cdot 2,5m + 4 \cdot 1,5m \cdot 0,75m] kN \cdot m = -1,7123 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,2B} = M_{2B} = -7,5214 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,B2} = -M_{B2} = -11,0972 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,5} = M_{2B,zgin} + V_{2B} \cdot 2m = [-7,5214 + (-4,8940) \cdot 2] kN \cdot m = -17,3094 kN \cdot m$$



Rys. 5.7.2.2. Wykres a) momentów zginających M w $kN \cdot m$, b) sił tnących V w kN , c) sił osiowych N w kN

6. WSTĘPNE PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW PRĘTÓW

Projektowanie prętów przyjmując założenia:

średni współczynnik obciążenia: $\gamma_f = 1.5$,
 wytrzymałość obliczeniową stali $f_d = 215 \text{ MPa}$,
 moduł Younga: $E = 210 \text{ GPa}$.

$$W \geq \frac{\max M \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{17,3094 \cdot 1,5}{215000} m^3 = 0,00012076 m^3 = 120,76 cm^3$$

Uwzględniając, że układ składa się z prętów o sztywności EI oraz 2EI przyjęto dwuteownik równoległościenny IPE 180 dla prętów o sztywności EI oraz 2 IPE 180 dla pręta o sztywności 2EI

$$W_{\text{IPE 180}} = 146,7 \text{ cm}^3, I_{\text{IPE 180}} = 1320 \text{ cm}^4.$$

$$EI = 210000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 1320 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 2835 \text{ kNm}^2,$$

$$k_\delta = 8 EI/m^3 = 22680 \text{ kNm/m}^3.$$

7. ROZWIĄZANIE UKŁADU OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

7.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEO OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURY

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie

$$M_{1A}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ \text{C} - (-25^\circ \text{C})}{0,18m} = -555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{A1}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ \text{C} - (-25^\circ \text{C})}{0,18m} = 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m},$$

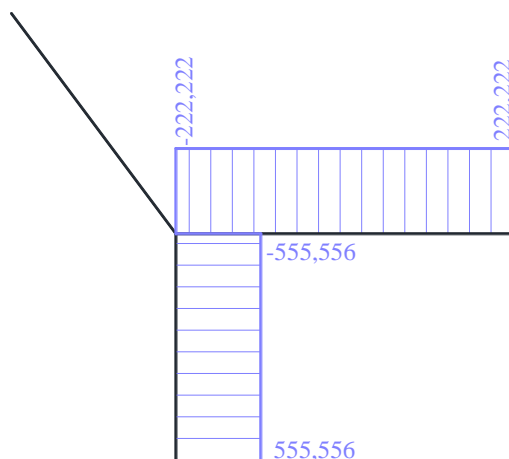
$$M_{1C}^O = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0$$

$$M_{12}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ \text{C} - (-20^\circ \text{C})}{0,18m} = -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{21}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ \text{C} - (-20^\circ \text{C})}{0,18m} = 222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{2B}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$

$$M_{2B}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$



Rys. 7.1.1. Wykres momentów M^T w $\frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}$.

7.2. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

7.2.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1T} &= 0 \\ k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2T} &= 0 \\ k_{1I} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1T} &= 0 \\ k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{IIT} &= 0 \end{aligned}$$

7.2.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

Elementy macierzy sztywności zostały obliczone w punkcie 5.6.2. Wyrazy wolne od wpływu temperatury

$$k_{1T} = \sum_j M_{1j}^T = M_{12}^T + M_{1A}^T + M_{1C}^T = -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} - 555,55556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 0 = -777,7778 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$k_{2T} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = 222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 0 = 222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}.$$

$$\begin{aligned} k_{IT} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^I - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^I \\ &= -\left(-555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot \frac{1}{3m} - \\ &\quad -\left(-222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - (0+0) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{IIT} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^{II} \\ &= -\left(-555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot \left(-\frac{2}{15m} \right) - \\ &\quad -\left(-222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - (0-0) \cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) = 0 \end{aligned}$$

7.2.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\begin{aligned}
 1,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 333,3334 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} &= 0 \\
 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,66671 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} &= 0 \\
 -0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0 &= 0 \\
 \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= -617,2020 \cdot \alpha_T \cdot C, & \varphi_2 &= -457,6380 \cdot \alpha_T \cdot C, \\
 \delta_I &= 796,1080 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C, & \delta_{II} &= -6,3363 \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C.
 \end{aligned}$$

7.3. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

7.3.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^o,$$

Momenty brzegowe:

$$\begin{aligned}
 M_{12}^T &= M_{12}^1 \cdot \varphi_1 + M_{12}^2 \cdot \varphi_2 + M_{12}^I \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{12}^T = 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ (-222,2222) \cdot \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 35,8549 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{21} &= M_{21}^1 \cdot \varphi_1 + M_{21}^2 \cdot \varphi_2 + M_{21}^I \cdot \delta_I + M_{21}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{21}^T = 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ 222,2222 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 122,0194 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{1A} &= M_{1A}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1A}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1A}^I \cdot \delta_I + M_{1A}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1A}^T = 0,5 \frac{EI}{m} \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ 0 \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + (-555,5556) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = -246,955 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{A1} &= M_{A1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{A1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{A1}^I \cdot \delta_I + M_{A1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{A1}^T = -0,5 \frac{EI}{m} \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + \\
 &+ 0 \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 555,5556 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 246,9546 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},
 \end{aligned}$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$M_{1C} = M_{1C}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1C}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1C}^I \cdot \delta_I + M_{1C}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1C}^T = 0, 6 \frac{EI}{m} \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + (-0,2) \frac{EI}{m^2} \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 = 211,0996 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{C1} = M_{C1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{C1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{C1}^I \cdot \delta_I + M_{C1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{C1}^T = 0 \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 = 0,$$

$$M_{2B} = M_{2B}^1 \cdot \varphi_1 + M_{2B}^2 \cdot \varphi_2 + M_{2B}^I \cdot \delta_I + M_{2B}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{2B}^T = 0 \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + 2 \frac{EI}{m} \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 = -122,0190 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{B2} = M_{B2}^1 \cdot \varphi_1 + M_{B2}^2 \cdot \varphi_2 + M_{B2}^I \cdot \delta_I + M_{B2}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{B2}^T = 0 \cdot (-617,2020) \cdot \alpha_T \cdot C + 1 \frac{EI}{m} \cdot (-457,6380) \cdot \alpha_T \cdot C + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 0 = 335,6187 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

Moment zginający w więzi sprężystej:

$$S_\delta = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I + S_1^{\delta_{II}} \cdot \delta_{II} = 0 \cdot (796,1080) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot (-6,3363) \cdot m \cdot \alpha_T \cdot C = -50,6902 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}$$

7.3.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^T + M_{21}^T + V_{21}^T \cdot 6m = [35,8549 + 122,0194 + V_{21}^T \cdot 6m] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0 \Rightarrow V_{21} = -26,3124 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum V = V_{12}^T - V_{21}^T = [V_{12}^T - (-26,3124)] kN = 0 \Rightarrow V_{12} = -26,3124 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum N = N_{12}^T - N_{21}^T = 0 \Rightarrow N_{12}^T = N_{21}^T.$$

Pręt 1-A

$$\sum V = -V_{1A}^T = 0,$$

$$\sum M_A = M^T + M_{1A}^T + V_{1A}^T \cdot 4m = [246,955 + (-246,955) + 0 \cdot 4m] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0,$$

$$\sum N = N_{A1}^T - N_{1A}^T = 0 \Rightarrow N_{A1}^T = N_{1A}^T.$$

Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C}^T + V_{1C}^T \cdot 5m = [211,0996 + V_{1C}^T \cdot 5m] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0 \Rightarrow V_{1C}^T = -42,2199 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum M_1 = M_{1C}^T + V_{C1}^T \cdot 5m = [211,0996 + V_{C1}^T \cdot 5m] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0 \Rightarrow V_{C1}^T = -42,2199 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum N = N_{1C}^T - N_{C1}^T = [N_{1C}^T - N_{C1}^T] = 0 \Rightarrow N_{C1}^T = N_{1C}^T.$$

Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2}^T + M_{2B}^T + V_{2B}^T \cdot 4m = [335,6187 + (-122,0190) + V_{2B}^T \cdot 4m] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0 \Rightarrow V_{2B}^T = -53,3998 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum V = V_{2B}^T - V_{B2}^T = [-53,3998 - V_{B2}^T] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} = 0 \Rightarrow V_{B2}^T = -53,3998 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum N = N_{2B}^T - N_{B2}^T = 0 \Rightarrow N_{B2}^T = N_{2B}^T.$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21}^T + M_{2B}^T = [122,0194 + (-122,0190) + 20] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0,0004 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$\sum X = V_{2B}^T + N_{21}^T = [-53,3998 + N_{21}^T] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} = 0 \Rightarrow N_{21}^T = 53,3998 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2},$$

$$\sum Y = V_{21}^T - N_{2B}^T = [-26,3124 - N_{2B}^T] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} = 0 \Rightarrow N_{2B}^T = -26,3124 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2}^T = N_{2B}^T = -26,3124 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}.$

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12}^T = N_{21}^T = 53,3998 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}.$

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12}^T + M_{1A}^T + M_{1C}^T = [35,8549 + (-246,955) + 211,0996] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum X = N_{12}^T - V_{1A}^T + V_{1C}^T \sin \alpha - N_{1C}^T \cdot \cos \alpha &= [53,3998 - 0 + (-42,2199) \cdot 0,8 - N_{1C}^T \cdot 0,6] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} = 0 \\ \Rightarrow N_{1C}^T &= 32,7065 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y = V_{12}^T + N_{1A}^T - V_{1C}^T \cdot \cos \alpha - N_{1C}^T \cdot \sin \alpha &= [-26,3124 + N_{1A}^T - (-42,2199) \cdot 0,6 - 32,7065 \cdot 0,8] \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2} = 0 \\ \Rightarrow N_{1A}^T &= -25,4792 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}. \end{aligned}$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1}^T = N_{1A}^T \Rightarrow N_{A1}^T = -25,4792 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}.$

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1}^T = N_{1C}^T = 32,7065 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}.$

Obliczenie momentów zginających

$$M_{zgin,12}^T = M_{12} = 35,8549 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{zgin,21}^T = -M_{21} = -122,0194 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{zgin,1A}^T = -M_{1A} = 246,955 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

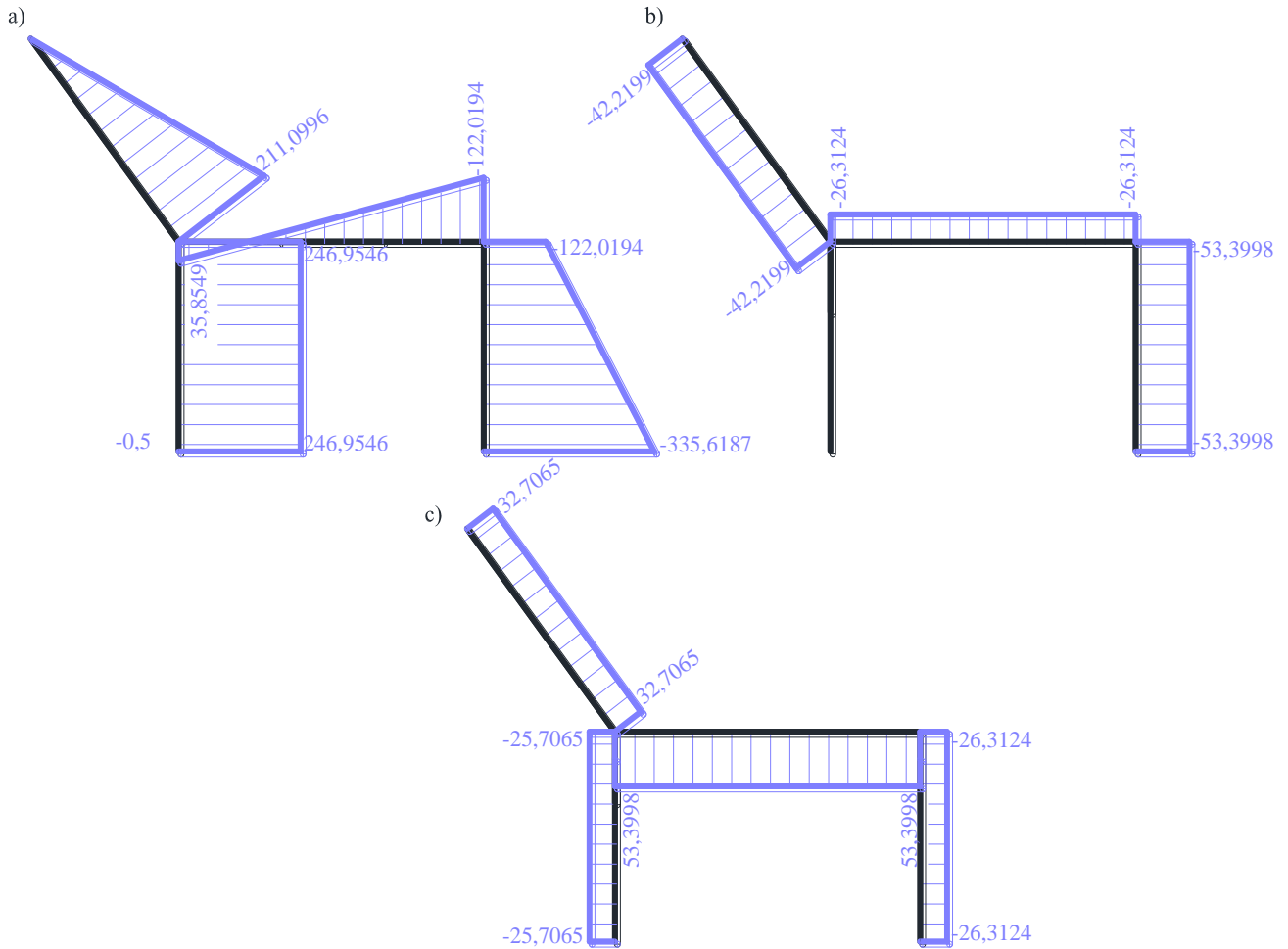
$$M_{zgin,A1}^T = M_{A1} = 246,9546 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{zgin,1C}^T = M_{1C} = 211,0996 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{zgin,C1}^T = -M_{C1} = 0,$$

$$M_{zgin,2B}^T = M_{2B} = -122,0190 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m},$$

$$M_{zgin,B2}^T = -M_{B2} = -335,6187 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m}.$$



Rys. 7.3.1. Wykres a) momentów zginających M w $\frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m}$,
 b) sił tnących V w $\frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}$, c) sił osiowych N w $\frac{EI \cdot \alpha_T \cdot C}{m^2}$

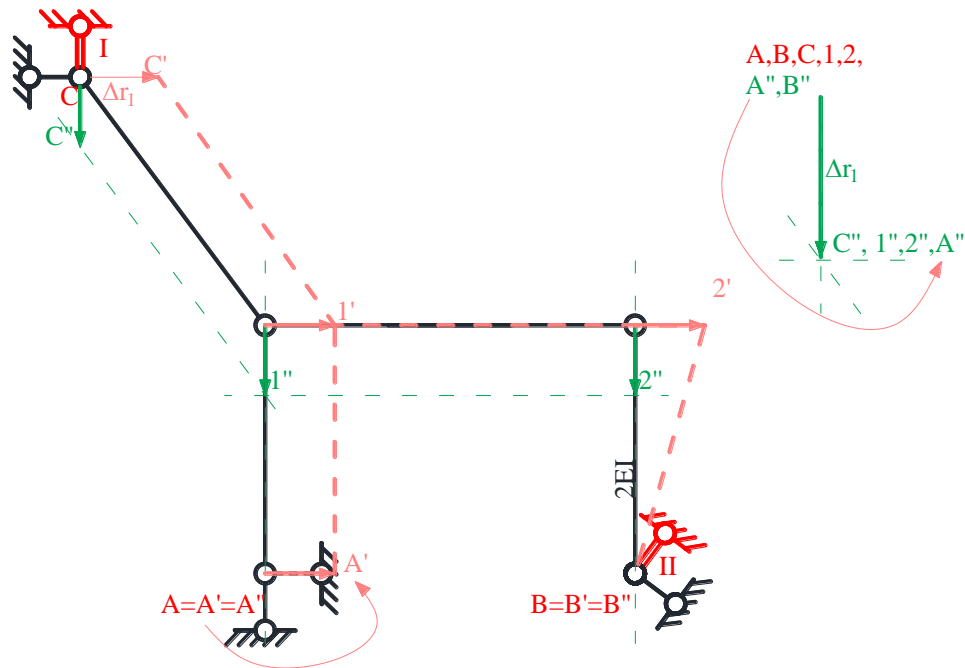
8. ROZWIĄZANIE UKŁADU OD OSIADANIA PODPÓR

8.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OSIADANIA PODPÓR

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_l = \varphi_2 = \delta_l = \delta_{ll} = 0$. Momenty brzegowe od przemieszczenia podpór są obliczane przy wykorzystaniu wzorów transformacyjnych dla przyjętych elementów pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{ij}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij})$$

$$M_{ji}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij})$$



Rys. 8.1.1. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^{\Delta r_1} = -|1''2''| = 0$$

$$\Delta_{2B}^{\Delta r_1} = -|2''B''| = \Delta r_1 = 0,02m \quad (,,+'' \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo})$$

$$\Delta_{1A}^{\Delta r_1} = |1''A''| = 0$$

$$\Delta_{1C}^{\Delta r_1} = |1''C''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_1}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0,$$

$$\psi_{2B}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005$$

$$\psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia Δr_1 wynoszą:

$$M_{12}^{\Delta r_1} = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21} - c_{12} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{21}^{\Delta r_1} = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12} - c_{21} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{1A}^{\Delta r_1} = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}}(a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \Delta r_2 - c_{1A} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 0,03 - 6 \cdot 0) = -0,015 \frac{EI}{m},$$

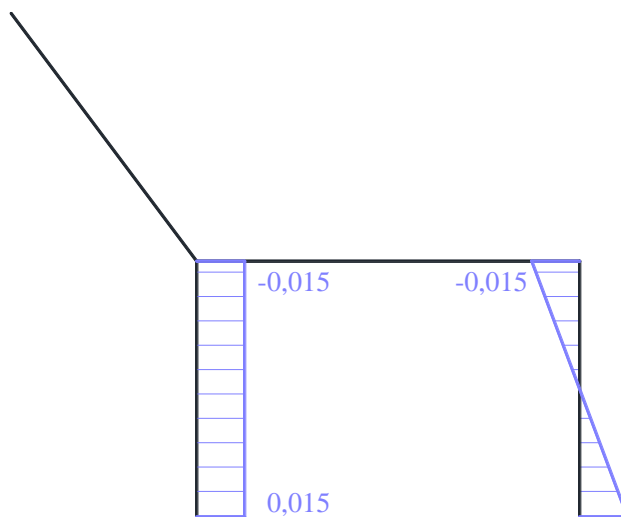
$$M_{A1}^{\Delta r_1} = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}}(a_{A1} \cdot \Delta r_2 + b_{A1} \cdot \varphi_{1A} - c_{A1} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m}(1 \cdot 0,03 - 1 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1C}^{\Delta r_1} = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}}(a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{1C} - c_{1C} \cdot \psi_{1C}) = \frac{2EI}{4m}(3 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{C1}^{\Delta r} = \frac{EI_{C1}}{L_{C1}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C} - c_{C1} \cdot \psi_{1C}) = \frac{EI}{5m} (0 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{2B}^{\Delta r} = \frac{EI_{2B}}{L_{2B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2} - c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005) = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^{\Delta r} = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B} - c_{B2} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005) = -0,015 \frac{EI}{m}.$$



Rys. 7.1.1. Wykres momentów $M^{\Delta r}$ w $\frac{EI}{m}$.

8.2. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

8.2.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1\Delta r} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2\Delta r} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II} \cdot \delta_{II} + k_{I\Delta r} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II} \cdot \delta_{II} + k_{II\Delta r} = 0$$

8.2.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

Elementy macierzy sztywności zostały obliczone w punkcie 5.6.2. Wyrazy wolne od wpływu temperatury

$$k_{1\Delta r} = \sum_j M_{1j}^{\Delta r} = M_{12}^{\Delta r} + M_{1A}^{\Delta r} + M_{1C}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$k_{2\Delta r} = \sum_j M_{2j}^{\Delta r} = M_{21}^{\Delta r} + M_{2B}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m}.$$

$$k_{I\Delta r} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{\Delta r} + M_{ji}^{\Delta r}) \psi_{ij}^{\Delta r} = -(M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{\Delta r} + M_{A1}^{\Delta r}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{\Delta r} + M_{C1}^{\Delta r}) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^{\Delta r} + M_{B2}^{\Delta r}) \psi_{2B}^I$$

$$= -(0+0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = -0,01 \frac{EI}{m^2}$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$\begin{aligned}
 k_{II\Delta r} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^{\Delta r} + M_{ji}^{\Delta r}) \psi_{ij}'' = -(M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) \psi_{12}'' - (M_{1A}^{\Delta r} + M_{A1}^{\Delta r}) \psi_{1A}'' - (M_{1C}^{\Delta r} + M_{C1}^{\Delta r}) \psi_{1C}'' - (M_{2B}^{\Delta r} + M_{B2}^{\Delta r}) \psi_{2B}'' \\
 &= -(0+0) \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = -0,0045 \frac{EI}{m^2}
 \end{aligned}$$

8.2.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\begin{aligned}
 1,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 0,015 \frac{EI}{m} &= 0 \\
 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,6667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 0,015 \frac{EI}{m} &= 0 \\
 -0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,01 \frac{EI}{m^2} &= 0 \\
 \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,0045 \frac{EI}{m^2} &= 0 \\
 \varphi_1 = 0,01197, & \quad \varphi_2 = -0,00450, \\
 \delta_I = 0,02310m, & \quad \delta_{II} = -0,00017m.
 \end{aligned}$$

8.3. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

8.3.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^{\Delta r},$$

Momenty brzegowe:

$$\begin{aligned}
 M_{12}^T &= M_{12}^1 \cdot \varphi_1 + M_{12}^2 \cdot \varphi_2 + M_{12}^I \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{12}^{\Delta r} = 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot 0,01197 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot (-0,00450) + 0 \cdot 0,02310m + \\
 &+ 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot (-0,00017)m + 0 = 0,00646 \frac{EI}{m} \\
 M_{21} &= M_{21}^1 \cdot \varphi_1 + M_{21}^2 \cdot \varphi_2 + M_{21}^I \cdot \delta_I + M_{21}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{21}^{\Delta r} = 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot 0,01197 + 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot (-0,00450) + 0 \cdot 0,02310m + \\
 &+ 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot (-0,00017)m + 0 = 0,00097 \frac{EI}{m}, \\
 M_{1A} &= M_{1A}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1A}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1A}^I \cdot \delta_I + M_{1A}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1A}^{\Delta r} = 0,5 \frac{EI}{m} \cdot 0,01197 + 0 \cdot (-0,00450) + 0 \cdot 0,02310m + \\
 &+ 0 \cdot (-0,00017)m + (0,015) \frac{EI}{m} = -0,00902 \frac{EI}{m}, \\
 M_{A1} &= M_{A1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{A1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{A1}^I \cdot \delta_I + M_{A1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{A1}^{\Delta r} = -0,5 \frac{EI}{m} \cdot 0,01197 + 0 \cdot (-0,00450) + 0 \cdot 0,02310m + \\
 &+ 0 \cdot (-0,00017)m + 0,015 \frac{EI}{m} = 0,00902 \frac{EI}{m},
 \end{aligned}$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$M_{1C} = M_{1C}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1C}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1C}^I \cdot \delta_I + M_{1C}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1C}^{\Delta r} = 0,6 \frac{EI}{m} \cdot 0,01197 + 0 \cdot (-0,00450) + (-0,2) \frac{EI}{m^2} \cdot 0,02310m + 0 \cdot (-0,00017)m + 0 = 0,00256 \frac{EI}{m},$$

$$M_{C1} = M_{C1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{C1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{C1}^I \cdot \delta_I + M_{C1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{C1}^{\Delta r} = 0 \cdot 0,01197 + 0 \cdot (-0,00450) + 0 \cdot 0,02310m + 0 \cdot (-0,00017)m + 0 = 0,$$

$$M_{2B} = M_{2B}^1 \cdot \varphi_1 + M_{2B}^2 \cdot \varphi_2 + M_{2B}^I \cdot \delta_I + M_{2B}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{2B}^{\Delta r} = 0 \cdot 0,01197 + 2 \frac{EI}{m} \cdot (-0,00450) + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot 0,02310m + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot (-0,015) \frac{EI}{m} + 0 = -0,00098 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2} = M_{B2}^1 \cdot \varphi_1 + M_{B2}^2 \cdot \varphi_2 + M_{B2}^I \cdot \delta_I + M_{B2}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{B2}^{\Delta r} = 0 \cdot 0,01197 + 1 \frac{EI}{m} \cdot (-0,00450) + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot 0,02310m + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot (-0,00017)m + (-0,015) \frac{EI}{m} = 0,00352 \frac{EI}{m},$$

Moment zginający w więzi sprężystej:

$$S_{\delta} = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I + S_1^{\delta_{II}} \cdot \delta_{II} = 0 \cdot (0,02310) \cdot m + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot (-0,00017) \cdot m = -0,00136 \frac{EI}{m^2}$$

8.3.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r} + V_{21}^{\Delta r} \cdot 6m = \left[0,00646 + 0,00097 + V_{21}^{\Delta r} \cdot 6m \right] \frac{EI}{m} = 0 \Rightarrow V_{21}^{\Delta r} = -0,00124 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum V = V_{12}^{\Delta r} - V_{21}^{\Delta r} = \left[V_{12}^{\Delta r} - (-0,00124) \right] \frac{EI}{m^2} = 0 \Rightarrow V_{12}^{\Delta r} = -0,00124 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum N = N_{12}^{\Delta r} - N_{21}^{\Delta r} = 0 \Rightarrow N_{12}^{\Delta r} = N_{21}^{\Delta r}.$$

Pręt 1-A

$$\sum V = -V_{1A}^{\Delta r} = 0,$$

$$\sum M_A = M_{A1}^{\Delta r} + M_{1A}^{\Delta r} + V_{1A}^{\Delta r} \cdot 4m = \left[0,00902 + (-0,00902) + 0 \cdot 4m \right] \frac{EI}{m} = 0,$$

$$\sum N = N_{A1}^{\Delta r} - N_{1A}^{\Delta r} = 0 \Rightarrow N_{A1}^{\Delta r} = N_{1A}^{\Delta r}.$$

Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C}^{\Delta r} + V_{1C}^{\Delta r} \cdot 5m = \left[0,00256 + V_{1C}^{\Delta r} \cdot 5m \right] \frac{EI}{m} = 0 \Rightarrow V_{1C}^{\Delta r} = -0,00051 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum M_1 = M_{1C}^{\Delta r} + V_{C1}^{\Delta r} \cdot 5m = \left[0,00256 + V_{C1}^{\Delta r} \cdot 5m \right] \frac{EI}{m} = 0 \Rightarrow V_{C1}^{\Delta r} = -0,00051 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum N = N_{1C}^{\Delta r} - N_{C1}^{\Delta r} = \left[N_{1C}^{\Delta r} - N_{C1}^{\Delta r} \right] = 0 \Rightarrow N_{1C}^{\Delta r} = N_{C1}^{\Delta r}.$$

Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2}^{\Delta r} + M_{2B}^{\Delta r} + V_{2B}^{\Delta r} \cdot 4m = \left[0,00352 + (-0,00098) + V_{2B}^{\Delta r} \cdot 4m \right] \frac{EI}{m} = 0 \Rightarrow V_{2B}^{\Delta r} = -0,00064 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum V = V_{2B}^{\Delta r} - V_{B2}^{\Delta r} = \left[-0,00064 - V_{B2}^{\Delta r} \right] \frac{EI}{m^2} = 0 \Rightarrow V_{B2}^{\Delta r} = -0,00064 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum N = N_{2B}^{\Delta r} - NT_{B2}^{\Delta r} = 0 \Rightarrow N_{B2}^{\Delta r} = N_{2B}^{\Delta r}.$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21}^{\Delta r} + M_{2B}^{\Delta r} = \left[0,00097 + (-0,00098) \right] \frac{EI}{m} = -0,00001 \frac{EI}{m},$$

$$\sum X = V_{2B}^{\Delta r} + N_{21}^{\Delta r} = \left[-0,00064 + N_{21}^{\Delta r} \right] \frac{EI}{m^2} = 0 \Rightarrow N_{21}^{\Delta r} = 0,00064 \frac{EI}{m^2},$$

$$\sum Y = V_{21}^{\Delta r} - N_{2B}^{\Delta r} = \left[-0,00124 - N_{2B}^{\Delta r} \right] \frac{EI}{m^2} = 0 \Rightarrow N_{2B}^{\Delta r} = -0,00124 \frac{EI}{m^2}.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2}^{\Delta r} = N_{2B}^{\Delta r} = -0,00124 \frac{EI}{m^2}$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12}^{\Delta r} = N_{21}^{\Delta r} = 0,00064 \frac{EI}{m^2}$.

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12}^{\Delta r} + M_{1A}^{\Delta r} + M_{1C}^{\Delta r} = \left[0,00646 + (-0,00902) + 0,00256 \right] \frac{EI}{m} = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum X &= N_{12}^{\Delta r} - V_{1A}^{\Delta r} + V_{1C}^{\Delta r} \sin \alpha - N_{1C}^{\Delta r} \cdot \cos \alpha = \left[0,00064 - 0 + (-0,00051) \cdot 0,8 - N_{1C}^{\Delta r} \cdot 0,6 \right] \frac{EI}{m^2} = 0 \\ &\Rightarrow N_{1C}^{\Delta r} = 0,00038 \frac{EI}{m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= V_{12}^{\Delta r} + N_{1A}^{\Delta r} - V_{1C}^{\Delta r} \cdot \cos \alpha - N_{1C}^{\Delta r} \cdot \sin \alpha = \left[-0,00124 + N_{1A}^{\Delta r} - 0,00038 \cdot 0,6 - (-0,00174) \cdot 0,8 \right] \frac{EI}{m^2} = 0 \\ &\Rightarrow N_{1A}^{\Delta r} = 0,00124 \frac{EI}{m^2}. \end{aligned}$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1}^{\Delta r} = N_{1A}^{\Delta r} \Rightarrow N_{A1}^{\Delta r} = -0,00047 \frac{EI}{m^2}$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1}^{\Delta r} = N_{1C}^{\Delta r} = -0,00174 \frac{EI}{m^2}$.

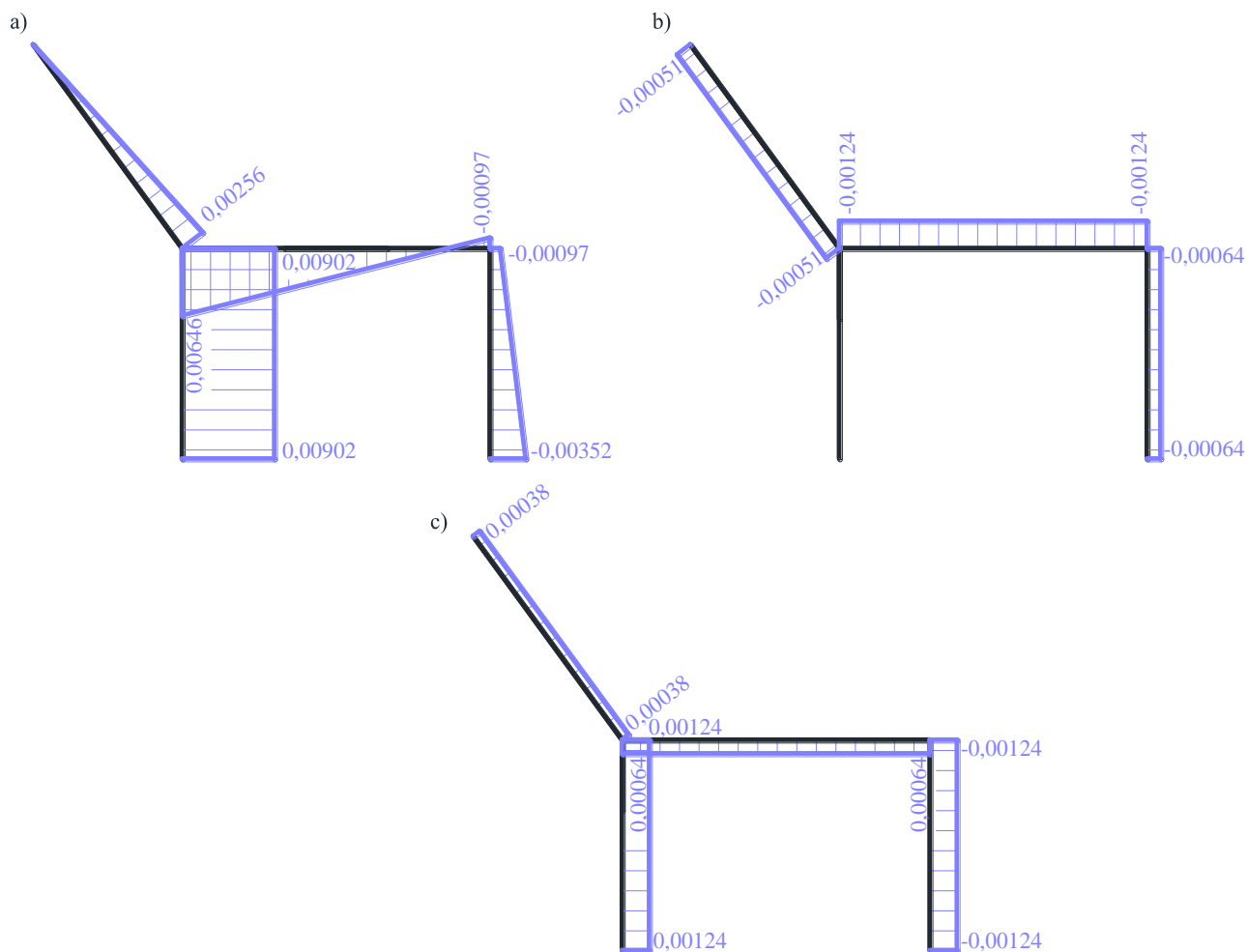
Oblizczenie momentów zginających

$$M_{zgin,12}^{\Delta r} = M_{12} = 0,00646 \frac{EI}{m}, \quad M_{zgin,21}^{\Delta r} = -M_{21} = -0,00097 \frac{EI}{m},$$

$$M_{zgin,1A}^{\Delta r} = -M_{1A} = 0,00902 \frac{EI}{m}, \quad M_{zgin,A1}^{\Delta r} = M_{A1} = 0,00902 \frac{EI}{m},$$

$$M_{zgin,1C}^{\Delta r} = M_{1C} = 0,00256 \frac{EI}{m}, \quad M_{zgin,C1}^{\Delta r} = -M_{C1} = 0,$$

$$M_{zgin,2B}^{\Delta r} = M_{2B} = -0,00098 \frac{EI}{m}, \quad M_{zgin,B2}^{\Delta r} = -M_{B2} = -0,00352 \frac{EI}{m}.$$



Rys. 5.7.2.2. Wykres a) momentów zginających M w $\frac{EI}{m}$, b) sił tnących V w $\frac{EI}{m^2}$,
c) sił osiowych N w $\frac{EI}{m^2}$

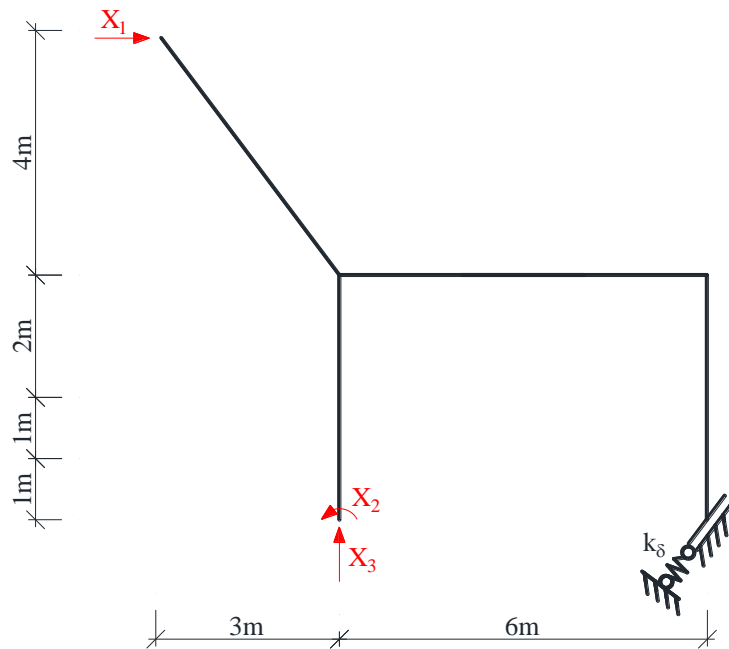
9. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając pięć więzi podporowych. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$

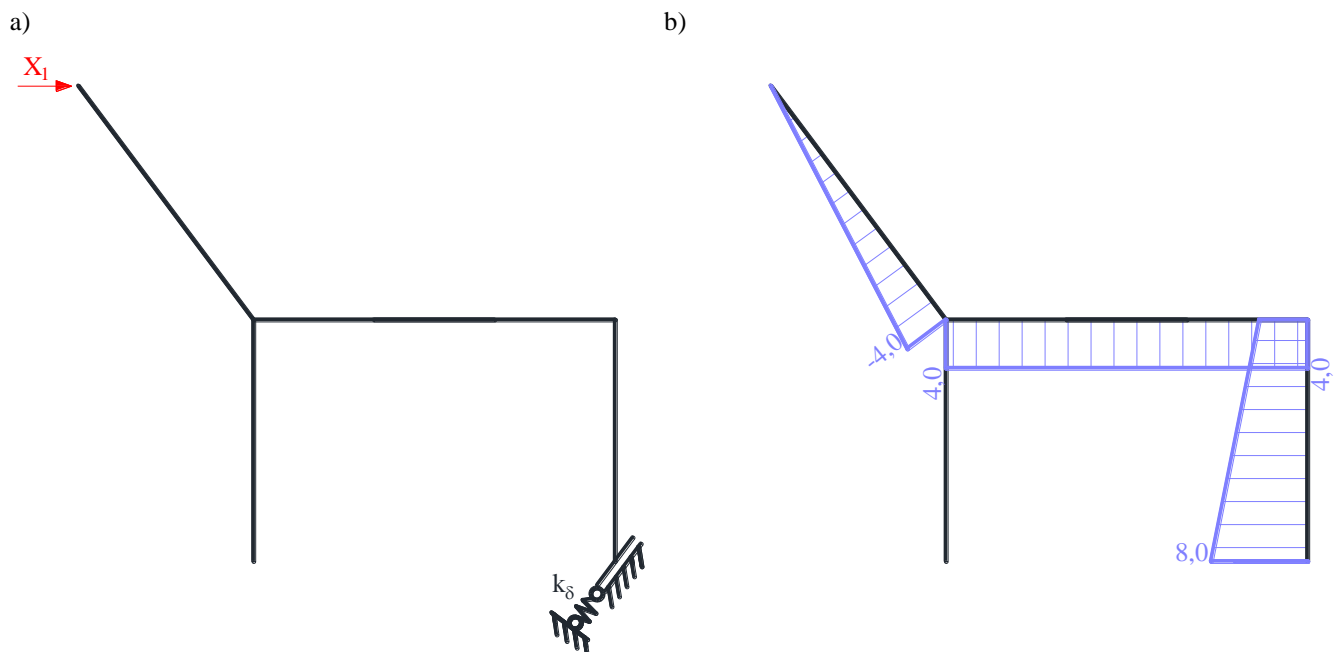
$$\Delta_{iT} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i}$$

$$\Delta_{i\Delta} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n.$$



Rys. 9.1. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego

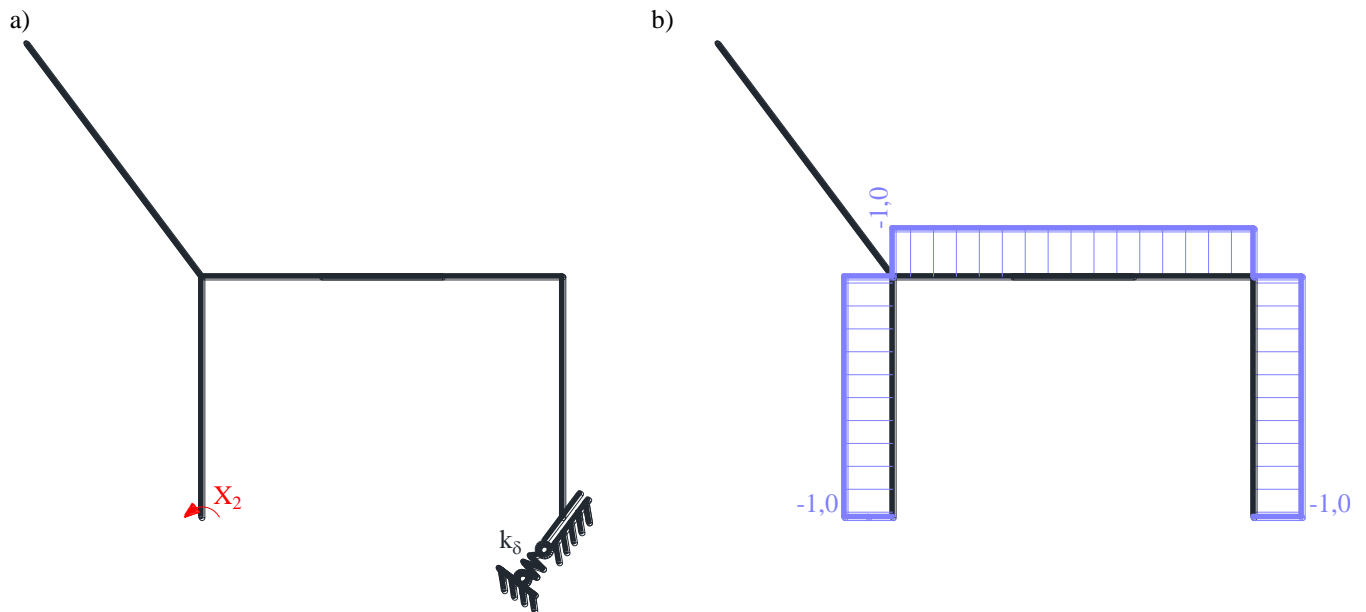
- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3 = 1$



Rys. 9.2. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^1 w m.

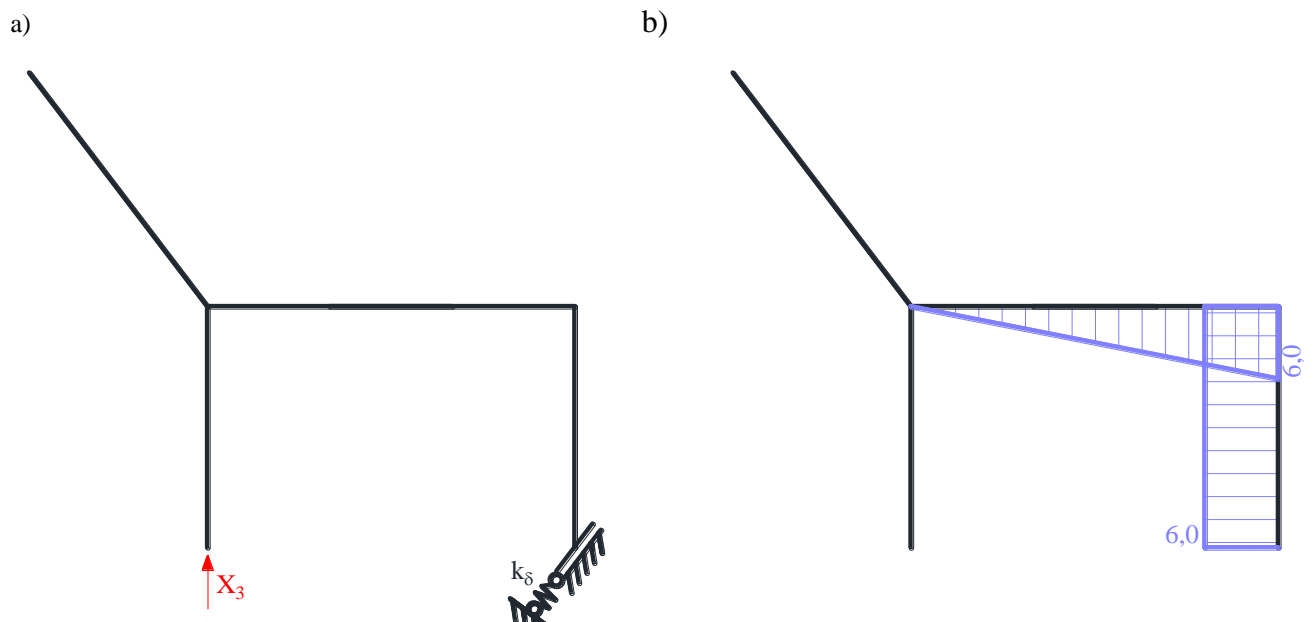
Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_s^1 = 1 \cdot 0,6 = 0,6$

- Przeszyczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_2 = 1$



Rys. 9.3. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_2 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^2 .

- Przeszyczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3 = 1$



Rys. 9.4. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_3 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^3 w m.,

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_5^3 = 1 \cdot 0,8 = 0,8$

9.1. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} = + \frac{6m}{6 \cdot EI} [4m \cdot 1,6034kN \cdot m + 4m \cdot 3m \cdot 7,0424kN \cdot m + 4m \cdot 12,4785kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI} [4m \cdot (-7,5214)kN \cdot m + 5 \cdot 6m \cdot (-12,4154)kN \cdot m + 6m \cdot (-17,3094)kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI} [6m \cdot (-17,3094)kN \cdot m + 4 \cdot 7m \cdot (-14,2033)kN \cdot m + 8m \cdot (-11,0972)kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{5m}{6 \cdot EI} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 2m \cdot (-1,7123)kN \cdot m + 4m \cdot 5,5757kN \cdot m] + \frac{0,6 \cdot 3,3136kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = \\
 &= 169,0184 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 63,7084 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 98,3877 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 7,1715 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0,2485 \frac{kN \cdot m^2}{EI} = \\
 &= -0,00006 \frac{kN \cdot m^2}{EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2F} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} = \\
 &= \frac{1m}{6 \cdot 2EI} [(-1) \cdot (-16,8180)kN \cdot m + 4 \cdot (-1) \cdot (-16,8180)kN \cdot m + (-1) \cdot (-16,8180)kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{3m}{6 \cdot 2EI} [(-1) \cdot (-16,8180)kN \cdot m + 4 \cdot (-1) \cdot (-4,818)kN \cdot m + (-1) \cdot 7,182kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{6m}{6 \cdot EI} [(-1) \cdot 1,6034kN \cdot m + 4 \cdot (-1) \cdot 7,0424kN \cdot m + (-1) \cdot 12,4785kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI} [(-1) \cdot (-7,5214)kN \cdot m + 4 \cdot (-1) \cdot (-12,4154)kN \cdot m + (-1) \cdot (-17,3094)kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI} [(-1) \cdot (-17,3094)kN \cdot m + 4 \cdot (-1) \cdot (-14,2033)kN \cdot m + (-1) \cdot (-11,0972)kN \cdot m] = \\
 &= 8,4090 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 7,2270 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 42,2457 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 12,4154 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 14,2035 \frac{kN \cdot m^2}{EI} = \\
 &= 0,00915 \frac{kN \cdot m^2}{EI}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{3F} &= \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^F}{k_n} = + \frac{6m}{6 \cdot EI} [0 \cdot 1,6034kN \cdot m + 4 \cdot 3m \cdot 7,0455kN \cdot m + 6m \cdot 12,4785kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI} [6m \cdot (-7,5214)kN \cdot m + 4 \cdot 6m \cdot (-12,4154)kN \cdot m + 6m \cdot (-17,3094)kN \cdot m] + \\
 &+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI} [6m \cdot (-17,3094)kN \cdot m + 4 \cdot 6m \cdot (-14,2033)kN \cdot m + 6m \cdot (-11,0972)kN \cdot m] + \frac{0,8 \cdot 3,3136kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = \\
 &= 159,3802 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 74,4924 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 85,2198 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0,3314 \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 0,0006 \frac{kN \cdot m^2}{EI}
 \end{aligned}$$

9.2. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA O OD TEMPERATURY

$$\begin{aligned} \Delta_{1T} = & \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1} = \\ & + \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[4m \cdot 35,8549 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot 4m \cdot (-43,0823) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4m \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[4m \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-228,819) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 8m \cdot (-335,619) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{5m}{6 \cdot EI} \left[0 \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot (-2)m \cdot 105,5498 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + (-4)m \cdot 211,0996 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{0,6 \cdot (-50,6902) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m^2}}{8 \frac{EI}{m^3}} + \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20)^\circ C}{0,18m} \cdot 4m \cdot 6m = -0,0012 \alpha_T \cdot {}^\circ C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2T} = & \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^2} = \\ = & \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[(-1) \cdot 246,9546 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot (-1) \cdot 246,9546 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + (-1) \cdot 246,9546 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[(-1) \cdot 35,8549 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot (-1) \cdot (-43,0823) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + (-1) \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[(-1) \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot (-1) \cdot (-228,819) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + (-1) \cdot (-335,619) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \alpha_T \cdot \frac{-25^\circ C - 25^\circ C}{0,18m} \cdot (-1) \cdot 4m + \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20)^\circ C}{0,18m} \cdot (-1) \cdot 6m = 0,0002 \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3T} = & \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^3} = \\ & + \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[0 \cdot 35,8549 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot 3m \cdot (-43,0823) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 6m \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[6m \cdot (-122,019) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-228,819) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} + 6m \cdot (-335,619) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m} \right] + \\ & + \frac{0,8 \cdot (-50,6902) \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^\circ C}{m^2}}{8 \frac{EI}{m^3}} + \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20)^\circ C}{0,18m} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 6m = -0,0010 \alpha_T \cdot {}^\circ C \end{aligned}$$

9.3. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA O OD OSIADANIA PODPÓR

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1\Delta r} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^{\Delta r}}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^{\Delta r}}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n = \\
 &= \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[4m \cdot 0,00646 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^o C}{m} + 4 \cdot 4m \cdot 0,00275 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^o C}{m} + 4m \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} \right] + \\
 &+ \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[4m \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-0,00225) \frac{EI}{m} + 8m \cdot (-0,00352) \frac{EI}{m} \right] + \\
 &= \frac{5m}{6 \cdot EI} \left[0 \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} + 4 \cdot (-2)m \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} + (-4)m \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} \right] + \frac{0,6 \cdot (-0,00136) \frac{EI}{m^2}}{8 \frac{EI}{m^3}} = \\
 &= 0,0200m = \Delta r_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2\Delta r} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^{\Delta r}}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^{\Delta r}}{k_n} = \\
 &= \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[(-1) \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} + 4 \cdot (-1) \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} + (-1) \cdot 0,00902 \frac{EI}{m} \right] + \\
 &+ \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[(-1) \cdot 0,00646 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^o C}{m} + 4 \cdot (-1) \cdot 0,00275 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^o C}{m} + (-1) \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} \right] + \\
 &+ \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[(-1) \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} + 4 \cdot (-1) \cdot (-0,00225) \frac{EI}{m} + (-1) \cdot (-0,00352) \frac{EI}{m} \right] = -0,0300 = -\Delta r_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{3\Delta r} &= \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^{\Delta r}}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^{\Delta r}}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n = \\
 &+ \frac{6m}{6 \cdot EI} \left[0 \cdot 0,00646 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^o C}{m} + 4 \cdot 3m \cdot 0,00275 \frac{EI \cdot \alpha_T \cdot {}^o C}{m} + 6m \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} \right] + \\
 &+ \frac{4m}{6 \cdot 2EI} \left[6m \cdot (-0,00097) \frac{EI}{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-0,00225) \frac{EI}{m} + 6m \cdot (-0,00352) \frac{EI}{m} \right] - \\
 &+ \frac{0,8 \cdot (-0,00136) \frac{EI}{m^2}}{8 \frac{EI}{m^3}} = -0,00004m
 \end{aligned}$$