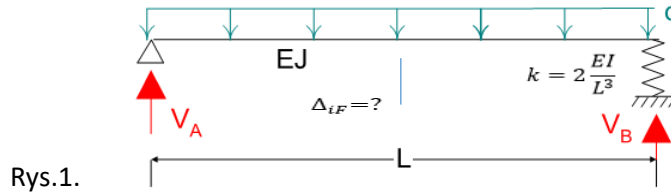


### Wykład nr 4

## WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ W PŁASKICH SPRĘŻYSTYCH USTROJACH PRĘTOWYCH (Cz.2)

### Przykład 1.

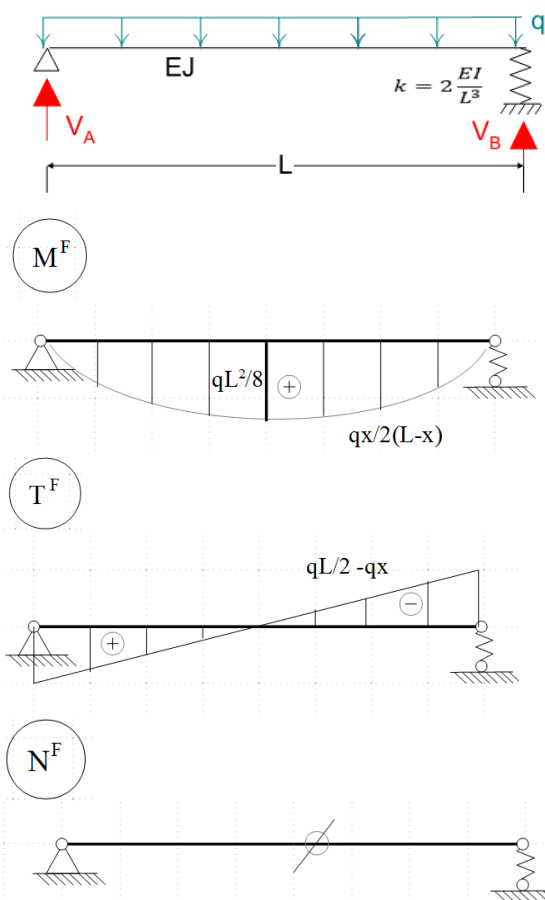
Należy wyznaczyć przesuw węzła ( $\Delta_{iF}=?$ ) znajdującego się w połowie rozpiętości belki o schemacie statycznym jak na rysunku 1.



Rys.1.

#### 1) Stan rzeczywisty

Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia.



Reakcje

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B = \frac{qL}{2}, \quad S^F = -\frac{qL}{2}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow V_A = \frac{qL}{2}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Momenty zginające:

$$M(x) = V_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} * (L - x)$$

$$M(0) = 0, M(L) = 0, M(L/2) = \frac{qL^2}{8}$$

Siły tnące:

$$T(x) = V_A - qX = q(L/2 - x)$$

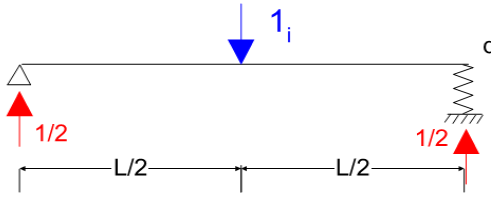
$$T(0) = \frac{qL}{2}, T(L) = -\frac{qL}{2}$$

Siły osiowe:

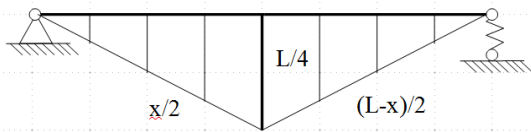
$$N(x) = 0$$

## 2) Stan wirtualnych obciążeń

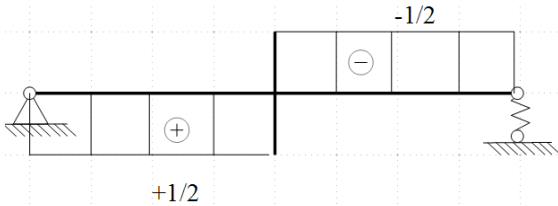
Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



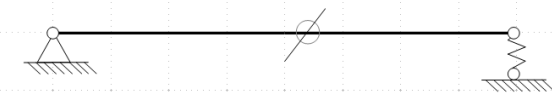
$\bar{M}^1$



$\bar{T}^1$



$\bar{N}^1$



Reakcje:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{2} kN, \quad S^1 = -\frac{1}{2} kN$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{2} kN$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Momenty zginające:

$$\bullet \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$M(x) = V_A x = \frac{1}{2} kN * x$$

$$M(0) = 0, \quad M(L/2) = \frac{L}{4} kN$$

$$\bullet \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$M(x) = V_A x - 1 \left( x - \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{2} kN * (L - x)$$

$$M(L/2) = \frac{L}{4}, \quad M(L) = 0$$

Siły tnące:

$$\bullet \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

$$T(x) = V_A = \frac{1}{2} kN$$

$$\bullet \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$T(x) = V_A - 1 = -\frac{1}{2} kN$$

Siły osiowe:

$$N(x) = 0$$

## 3) II sformułowania ZPP

Zastosowanie II sformułowania ZPP do wyznaczenia wartości szukanego przemieszczenia

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_p \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^F}{GA} dx + \sum_p \int \bar{N}^1 \frac{N^F}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

$\{\sum_p$  – oznacza sumowanie po wszystkich przedziałach całkowania funkcji}

**\*Uwaga:** Przedział całkowania funkcji jest do momentu gdy funkcja jest ciągła i gładka, ma ciągłą pochodną i sztywność pręta jest stała.

- Pominięcie wpływu sił tnących i sił osiowych na wartość przemieszczenia

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1kN \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m} \quad /: 1kN$$

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} x \frac{qx}{2} (L-x) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2} (L-x) \frac{qx}{2} (L-x) dx + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-qL}{2}\right)}{2 \frac{EI}{L^3}} =$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{q}{4} \int_0^{\frac{L}{2}} (x^2 L - x^3) dx + \frac{1}{EI} \frac{q}{4} \int_{\frac{L}{2}}^L x(L-x)^2 dx + \frac{\frac{qL}{4}}{2 \frac{EI}{L^3}} =$$

$$= \frac{1}{EI} \frac{q}{4} \int_0^{\frac{L}{2}} (x^2 L - x^3) dx + \frac{1}{EI} \frac{q}{4} \int_{\frac{L}{2}}^L (L^2 x - 2Lx^2 + x^3) dx + \frac{qL^4}{8} =$$

$$= \frac{q}{4EI} * \frac{5L^4}{192} + \frac{q}{4EI} * \frac{5L^4}{192} + \frac{qL^4}{8EI} = \frac{53qL^4}{384EI}$$

- Wpływ sił tnących na wartość przemieszczenia

$$\bar{1}_i \Delta_{iF}(T) = \sum_p \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^F}{GA} dx$$

$$1kN \Delta_{iF}(T) = \sum_p \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^F}{GA} dx \quad /: 1kN$$

$$= \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \kappa \frac{\left(\frac{qL}{2} - qx\right)}{GA} dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{1}{2} \kappa \frac{\left(\frac{qL}{2} - qx\right)}{GA} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\kappa}{GA} \left( \frac{qL}{2} x \Big|_0^{\frac{L}{2}} - \frac{qx^2}{2} \Big|_0^{\frac{L}{2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{GA} \left( \frac{qL}{2} x \Big|_{\frac{L}{2}}^L - \frac{qx^2}{2} \Big|_{\frac{L}{2}}^L \right) = \frac{\kappa q L^2}{8GA}$$

{Przyjmując przykładowo belkę (I300,STAL):  $EI = 20090 \text{ kNm}^2$ ,  $GA = 544016,7 \text{ kN}$ ,  $\kappa = 5/6$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $q = 1 \text{ kN/m}$  uzyskujemy,  $\Delta_{iF}(M, S) = \frac{53qL^4}{384EI} = 6,87 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\Delta_{iF}(T) = \frac{\kappa q L^2}{8GA} = 1,9 * 10^{-7} \text{ m}$ , stąd wniosek, że wpływ sił tnących jest pomijalnie mały w stosunku do wpływu momentów zginających i sił tnących}

## UPROSZCZONE SPOSOBY OBLICZANIA CAŁKI Z ILOCZYNU DWÓCH FUNKCJI (WZORY SKRÓCONEGO CAŁKOWANIA)

1) **Wzór Wereszczagina:**  $\int F(x) * f(x) dx = \Omega_F * f(x_0)$

$\Omega_F$  – pole ograniczone funkcją dowolną  $F(x)$ , funkcją wyższego stopnia

$f(x_0)$  – wartość funkcji liniowej  $f(x)$  pod środkiem ciężkości funkcji dowolnej  $F(x)$

**Założenie** umożliwiające stosowanie wzoru:

- $F(x)$ -dowolna funkcja **o stałym znaku** na danym przedziale całkowania
- $f(x)$ -funkcja maksymalnie prostoliniowa w całym przedziale całkowania

$\int F(x) dx = \Omega_F$  - pole ograniczone funkcją wyższego stopnia  $F(x)$  w przedziale całkowania

$\int F(x)x dx = \Omega_F x_0$  - moment statyczny pola  $\Omega_F$  względem osi  $y$

$$\int F(x) * f(x) dx = \int_0^L F(x)(ax + b) dx =$$

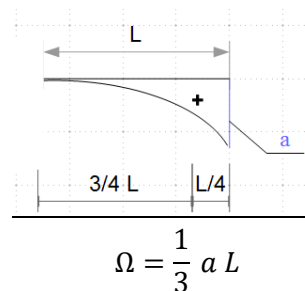
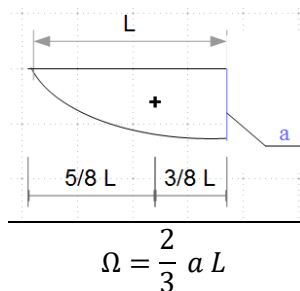
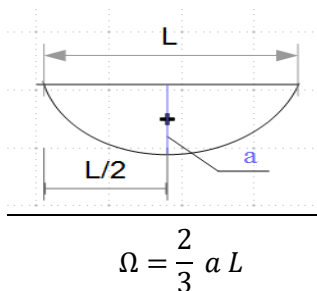
$$= a \int_0^L F(x)x dx + b \int_0^L F(x) dx =$$

$$= a \Omega_F x_0 + b \Omega_F =$$

$$= \Omega_F (ax_0 + b) = \Omega_F f(x_0)$$

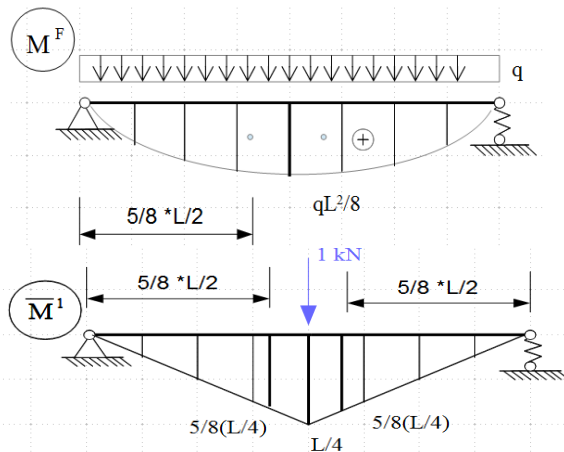
**Def.** Całka z iloczynu dwóch funkcji z których jedna jest dowolna ze stałym znakiem, a druga jest prostoliniowa równa się iloczynowi pola funkcji dowolnej i wartości funkcji prostoliniowej pod środkiem ciężkości funkcji dowolnej.

Pola wybranych figur



## Zastosowanie wzoru Wereszczagina

Wyznaczyć przesuw węzła w połowie rozpiętości belki o schemacie statycznym jak na rys. 1 (przykład 1)



1) Stan rzeczywisty

2) Stan wirtualnego obciążenia

3) Zastosowanie II sformułowania ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^{-1} \frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1 \text{ kN} \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^{-1} \frac{S_m^F}{k_m} \quad /: 1 \text{ kN}$$

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} \frac{L}{2} \frac{5}{8} \frac{L}{4} \right) + \frac{1}{EI} \left( \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} \frac{L}{2} \frac{5}{8} \frac{L}{4} \right) + \frac{\left( -\frac{qL}{2} \right) \left( \frac{-1}{2} \right)}{2 \frac{EI}{L^3}} = \frac{53qL^4}{384EI}$$

Wynik zgodny z rozwiązaniem podanym w Przykładzie 1.

2) **Wzór Simpsona:**  $\int F(x) * f(x) dx = \frac{L}{6} [F_p f_p + 4F_{sr} f_{sr} + F_k f_k]$

$F_p f_p$  – iloczyn wartości funkcji z początku przedziału całkowania

$F_{sr} f_{sr}$  – iloczyn wartości funkcji w środku przedziału całkowania

$F_k f_k$  – iloczyn wartości funkcji z końca przedziału całkowania

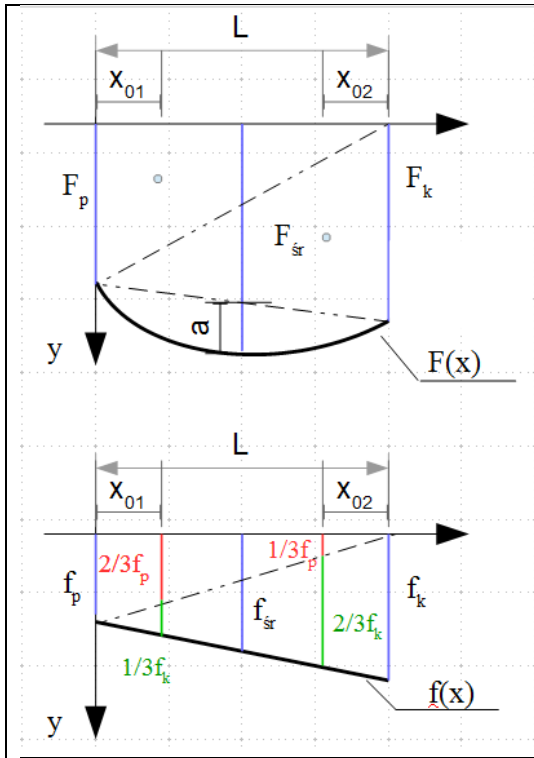
$L$  - przedział całkowania

**Założenie** umożliwiające stosowanie wzoru:

- $F(x)$ -funkcja maksymalnie drugiego stopnia (funkcja paraboliczna)
- $f(x)$ -funkcja maksymalnie prostoliniowa w całym przedziale całkowania

**\*Uwaga:**

Jeśli  $F(x)$  i  $f(x)$  są funkcjami wyższego rzędu niż w powyższym założeniu i są ciągłe i gładkie, wówczas podany wzór Simpsona będzie wzorem przybliżonym (nie dokładnym) całkowania iloczynu tych funkcji, a o dokładności przybliżenia będzie decydowała gęstość podziału przedziału całkowania.



Funkcje  $F(x)$ -rozkłada się na sumę dwóch trójkątów oraz parabolę, a następnie korzysta się ze wzoru Wereszczagina.

$$F_{sr} = \frac{F_p}{2} + \frac{F_k}{2} + a$$

$$a = F_{sr} - \frac{(F_p + F_k)}{2}$$

$$f_{sr} = \frac{(f_p + f_k)}{2}$$

$$\int F(x) * f(x) dx = \Omega_{F(\text{trójkąt1})} * f(x_{01}) + \Omega_{F(\text{trójkąt2})} * f(x_{02}) + \Omega_{F(\text{parabola})} * f(x_{0a}) =$$

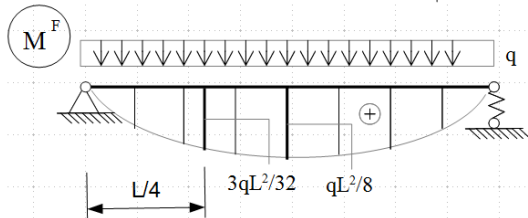
$$= \frac{1}{2} F_p L \left( \frac{2}{3} f_p + \frac{1}{3} f_k \right) + \frac{1}{2} F_k L \left( \frac{1}{3} f_p + \frac{2}{3} f_k \right) + \frac{2}{3} a L f_{sr} =$$

$$= \frac{L}{6} [F_p f_p + 4 F_{sr} f_{sr} + F_k f_k]$$

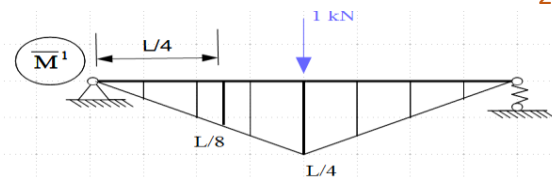
### Zastosowanie wzoru Simpsona

Wyznaczyć przesuw węzła w połowie rozpiętości belki o schemacie statycznym jak na rys.1 (przykład 1).

#### 1) Stan rzeczywisty



#### 2) Stan wirtualnego obciążenia



#### 3) Zastosowanie II sformułowania ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1kN \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m} \quad /: 1kN$$

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EI} \left( \frac{L}{6} (0 * 0 + 4 \frac{3qL^2}{32} \frac{L}{8} + \frac{qL^2}{8} \frac{L}{4}) \right) + \frac{1}{EI} \left( \frac{L}{6} (0 * 0 + 4 \frac{3qL^2}{32} \frac{L}{8} + \frac{qL^2}{8} \frac{L}{4}) \right) + \frac{(-\frac{qL}{2}) (\frac{-1}{2})}{2 \frac{EI}{L^3}}$$

$$= \frac{53qL^4}{384EI}$$

Wynik zgodny z rozwiązaniem podanym w Przykładzie 1.

3) **Wzór trapezów:**  $\int F(x) * f(x) dx = \frac{L}{6} [2(F_p f_p + F_k f_k) + F_p f_k + F_k f_p]$

**Założenie** umożliwiające stosowanie wzoru:

- $F(x)$ -funkcja liniowa w przedziale całkowania
- $f(x)$ -funkcja liniowa w przedziale całkowania

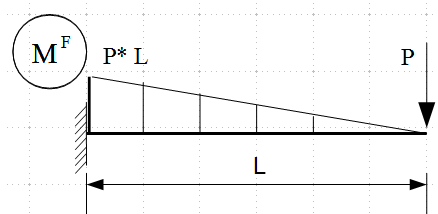
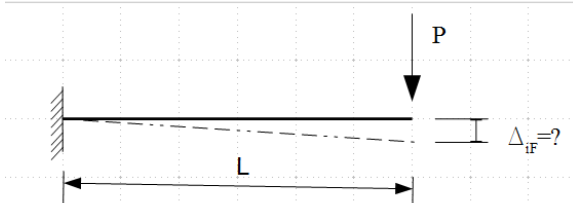
**\*Uwaga:** wzoru nie można stosować gdy jedna bądź obie funkcje są stałe

<p style="text-align: center;"><math>F_{sr} = \frac{(F_p + F_k)}{2}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>f_{sr} = \frac{(f_p + f_k)}{2}</math></p>	<p>Przyjmując wartości funkcji w środku przedziału całkowania jako średnią z wartości końcowej i początkowej funkcji, a następnie stosując wzór Simpsona otrzymuje się podany wyżej wzór trapezów.</p> $\int F(x) * f(x) dx = \frac{L}{6} [F_p f_p + 4F_{sr} f_{sr} + F_k f_k] =$ $= \frac{L}{6} [F_p f_p + 4 \left( \frac{F_p + F_k}{2} \right) \left( \frac{f_p + f_k}{2} \right) + F_k f_k] =$ $= \frac{L}{6} [F_p f_p + F_p f_p + F_k f_k + F_p f_k + F_k f_p + F_k f_k] =$ $= \frac{L}{6} [2(F_p f_p + F_k f_k) + F_p f_k + F_k f_p]$
---	--

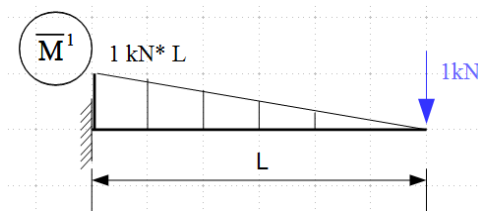
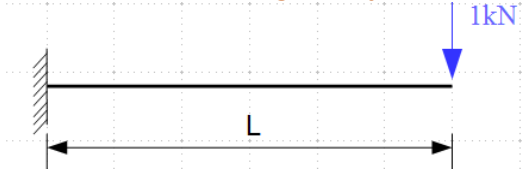
### Zastosowanie wzoru trapezów

Wyznaczyć przesuw końca wspornika obciążonego jak na rysunku poniżej.

#### 1. Stan rzeczywisty



#### 2. Stan wirtualnego obciążenia



#### 3. Zastosowanie II sformułowania ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

$$1kN \Delta_{iF} = \frac{1}{EI} \frac{L}{6} [2(PL * L * 1kN + 0) + 0 + 0] = \frac{PL^3}{3EI} * 1kN \quad /: 1kN$$

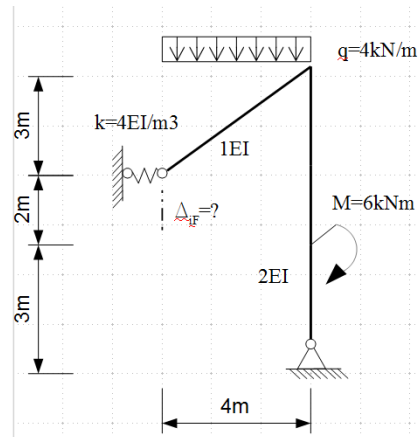
$$\Delta_{iF} = \frac{PL^3}{3EI}$$

Przykład podsumowujący umiejętność wyznaczania przemieszczeń w układach STATYCZNIE WYZNACZALNYCH od dowolnych wpływów obciążeń.

1) Obciążenie czynne „F”

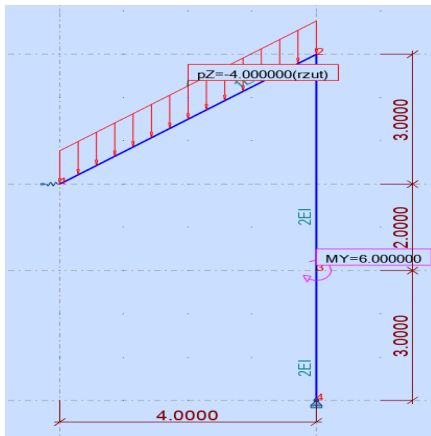
Wyznaczyć wartość przemieszczenia  $\Delta_{IF}=?$

Dane:  $GA \rightarrow \infty, EA \rightarrow \infty$

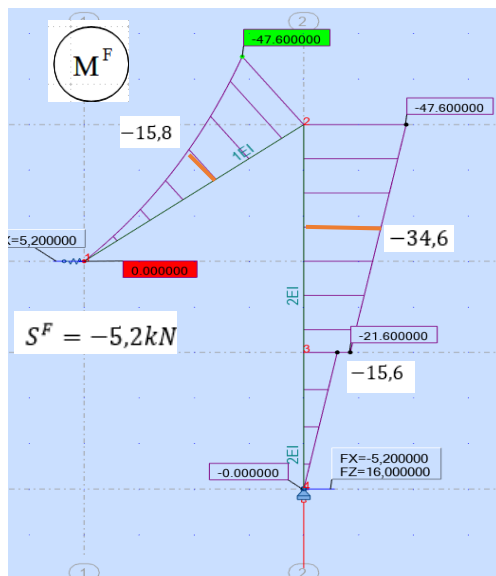


1. Stan rzeczywisty

Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia.

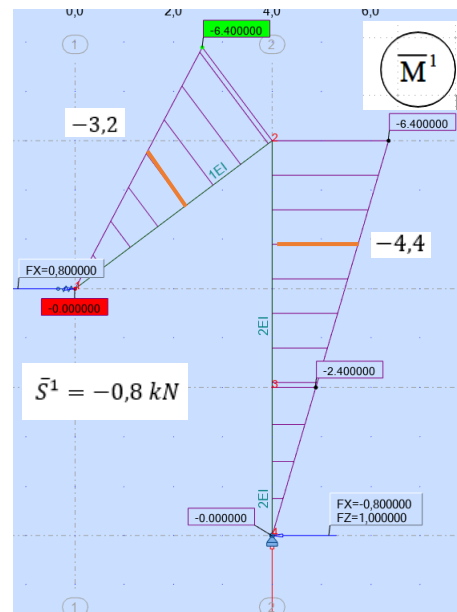
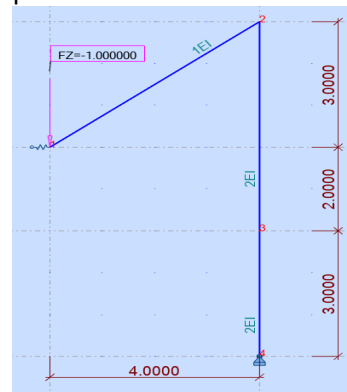


Robot rzutuje obciążenie na pręt stąd graficzna różnica w stosunku do danych.



2. Stan wirtualnego obciążenia

Rozwiązanie od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



3) Zastosowanie II sformułowania ZPP



$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_p \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^F}{GA} dx + \sum_p \int \bar{N}^1 \frac{N^F}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

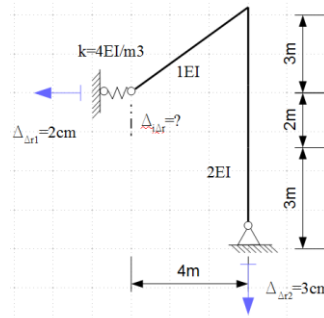
gdy:  $\lim_{GA \rightarrow \infty} \sum_p \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^F}{GA} dx = 0$  ,  $\lim_{EA \rightarrow \infty} \sum_p \int \bar{N}^1 \frac{N^F}{EA} dx = 0$

wówczas:  $\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_p \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$

\*uwaga: należy uwzględnić 3 przedziały całkowania i należy uwzględnić znak momentów zginających (wartości odłożone po stronie włókien wyróżnionych są dodatnie, po przeciwnej ujemne)

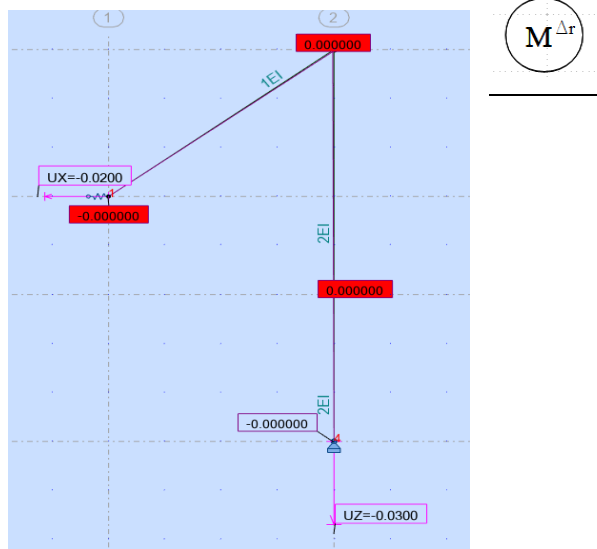
$$\begin{aligned} 1kN \Delta_{iF} &= \frac{1}{EI} \frac{5m}{6} (0 + 4(-3,2kNm)(-15,8kNm) + (-6,4kNm)(-47,6kNm)) \\ &+ \frac{1}{2EI} \frac{5m}{6} [(-6,4kNm)(-47,6kNm) + 4(-4,4kNm)(-34,6kNm) \\ &+ (-2,4kNm)(-21,6kNm)] + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} 3m(-2,4kNm) \frac{2}{3} (-15,6kNm) \\ &+ \frac{(-0,8kN)(-5,2kN)}{4 \frac{EI}{m^3}} = 844,426 \frac{kNm^3}{EI} \quad /: 1kN \\ \Delta_{iF} &= 844,426 \frac{kNm^3}{EI} \quad \left[ \frac{kNm^3}{EI} = \frac{kNm^3}{\frac{kN}{m^2} m^4} = m \right] \end{aligned}$$

2) Obciążenie osiadaniami podpór „ $\Delta_r$ ”  
Wyznaczyć wartość przemieszczenia  $\Delta_{i\Delta_r} = ?$



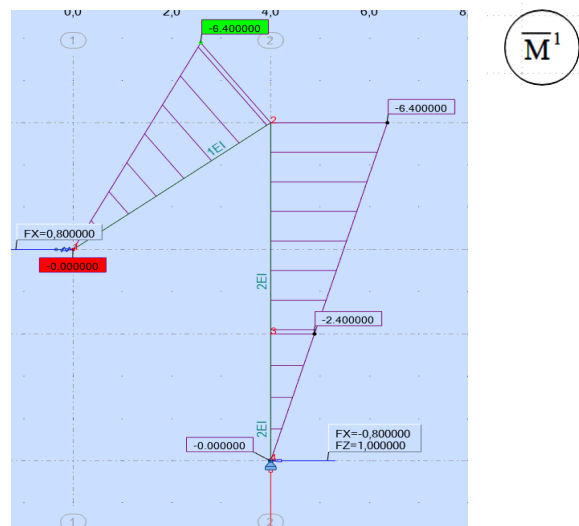
### 1. Stan rzeczywisty

Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia



### 2. Stan wirtualnego obciążenia

Rozwiązanie od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



3) Zastosowanie II sformułowania ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_{i \Delta_r} = - \sum_m \bar{R}_m 1 \Delta_{r_m}$$

$$1kN \Delta_{i \Delta_r} = -(0.8kN * (-0,02m) + 1kN(-0,03m)) = 0,046kNm \quad /: 1kN$$

$$\Delta_{i \Delta_r} = 0,046m$$

Węzeł przesunie się w dół zgodnie z przyjętym zwrotem siły jednostkowej w stanie wirtualnego obciążenia.

3) Obciążenie wpływem temperatury „ $\Delta T$ ”

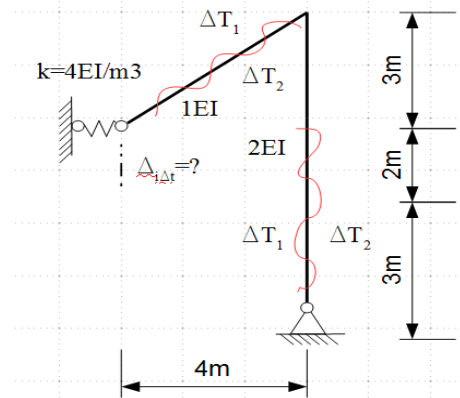
Wyznaczyć wartość przemieszczenia  $\Delta_{i \Delta_t} = ?$

Dane:  $\Delta T_1 = 10^\circ C$

$\Delta T_2 = -14^\circ C$

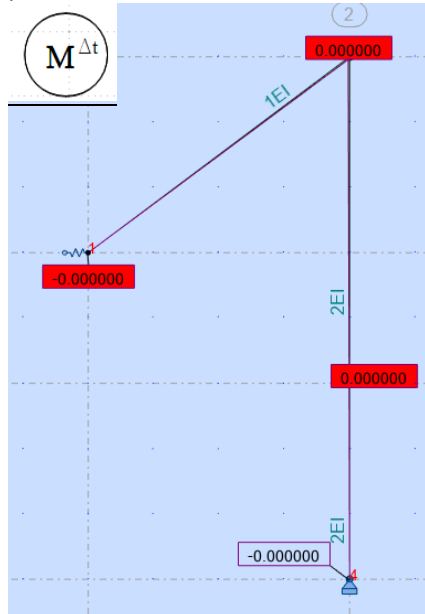
$\alpha_t = 1,2 * 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$  ;

$h = 0,2m$



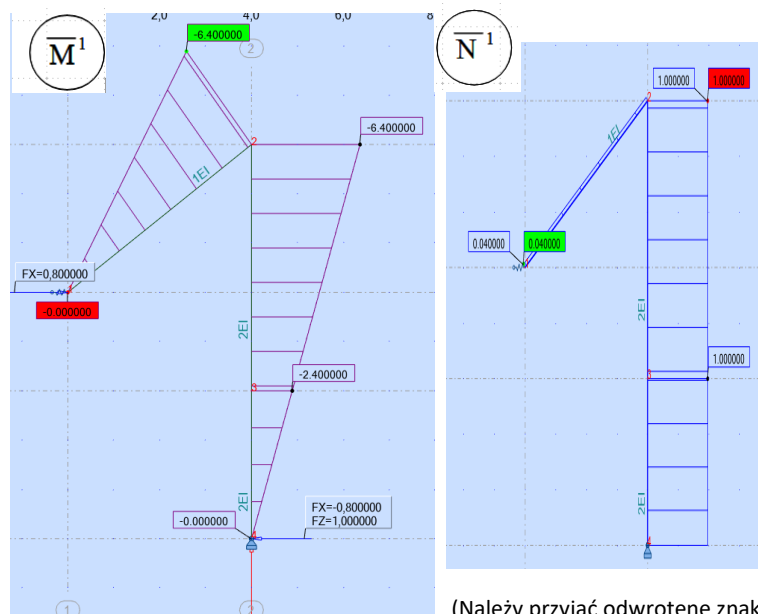
1. Stan rzeczywisty

Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia



2. Stan wirtualnego obciążenia

Rozwiązanie od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



(Należy przyjąć odwrotne znaki ze względu, że Robot oznacza siły ściskające + , a rozciągające jako -)

### 3. Zastosowanie II sformułowania ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_{i\Delta_t} = \sum_p (\alpha_t \Delta T_0 \int \bar{N}^1 dx)_p + \sum_p \left( \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \int \bar{M}^1 dx \right)_p$$

$$\begin{aligned} 1kN \Delta_{i\Delta_t} &= 1,2 * 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} * \frac{(-14^\circ C - 10^\circ C)}{0,2m} \frac{1}{2} 5 m (-6,4kNm) + 1,2 * 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} * \\ &* \frac{(10^\circ C - (-14^\circ C))}{0,2m} \frac{1}{2} 5 m (-4kNm) + 1,2 * 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} * \\ &* \frac{(10^\circ C + (-14^\circ C))}{2} 5 m (-0,04kN) + 1,2 * 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} * \\ &* \frac{(10^\circ C + (-14^\circ C))}{2} 5 m (-1kN) = 8,764 * 10^{-3} kNm \quad /: 1kN \end{aligned}$$

$$\Delta_{i\Delta_t} = 8,764 * 10^{-3} m$$

Węzeł przesunie się w dół zgodnie z przyjętym zwrotem siły jednostkowej w stanie wirtualnego obciążenia.

### 4) Obciążenie błędami montażu „ $\Delta_m$ ”

Wyznaczyć wartość przemieszczenia  $\Delta_{i\Delta_{tm}} = ?$

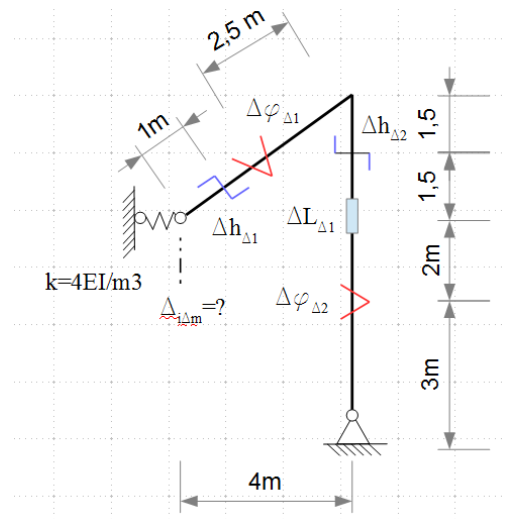
Dane:  $\Delta\varphi_{\Delta 1} = 0,04 rad$

$$\Delta\varphi_{\Delta 2} = 6^\circ$$

$$\Delta h_{\Delta 1} = 2 cm$$

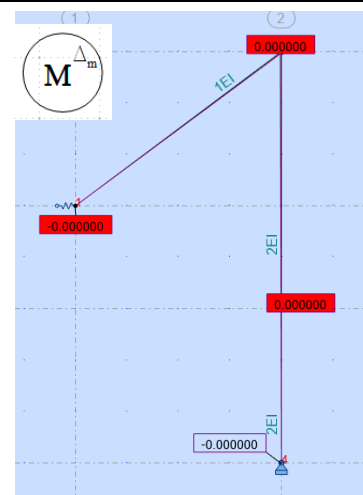
$$\Delta h_{\Delta 2} = 3 cm$$

$$\Delta L_{\Delta 1} = -4 cm$$



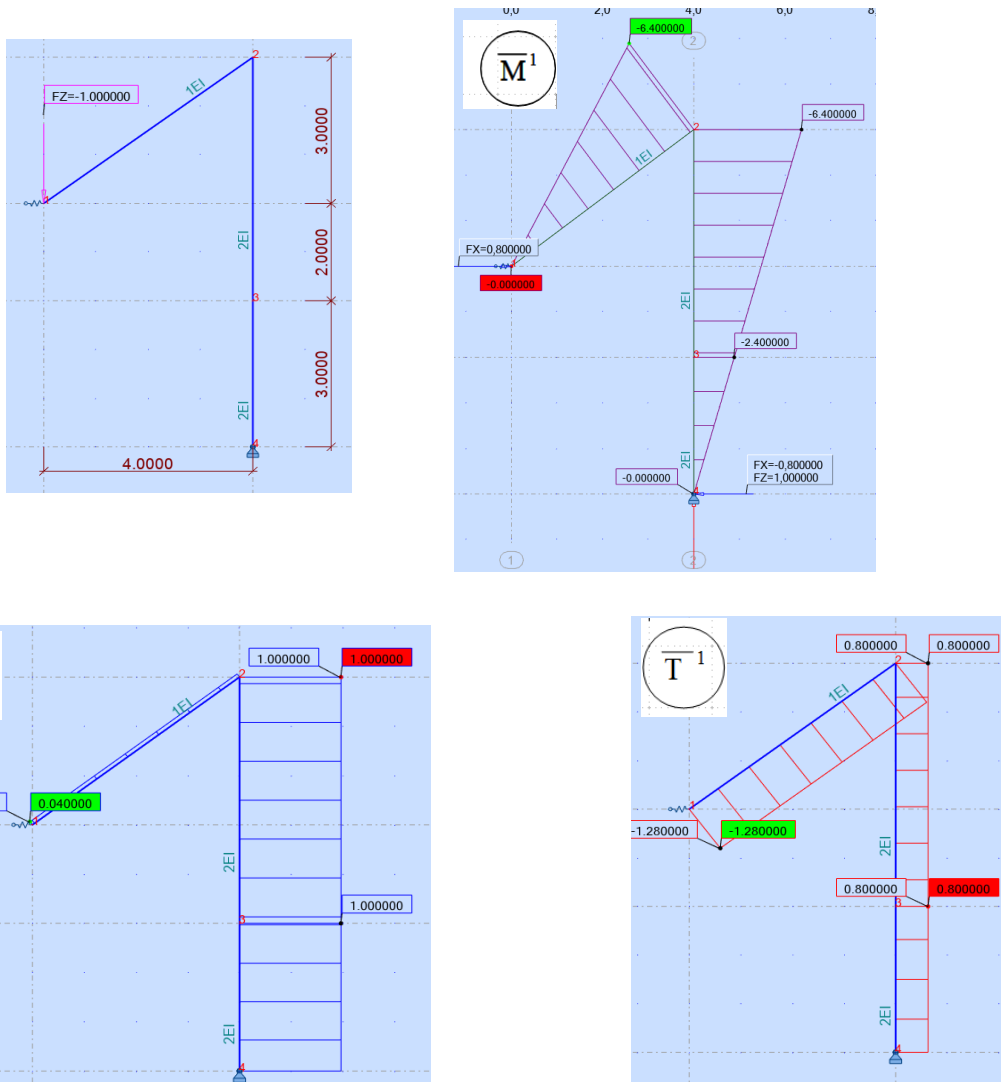
### 1) Stan rzeczywisty

Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia



## 2) Stan wirtualnego obciążenia

Rozwiązanie od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



## 3) Zastosowanie II sformułowania ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = \sum_k \bar{M}^1 \Delta\varphi_{\Delta k} + \sum_n \bar{T}^1 \Delta h_{\Delta n} + \sum_s \bar{N}^1 \Delta L_{\Delta s}$$

\*Uwaga: należy przyjmować odpowiednie znakowanie podanych wartości błędów (zgodnie z wykładem 3)

$$1kN \Delta_i \Delta_m = ((-3,2kNm)(-0,04rad) + (-2,4kNm) \frac{(6^\circ \pi)}{180^\circ} rad + (-1,28kN) 0,02m + 0,8kN(-0,03m) + (-1,0kN)(-0,04m) = -0,1329kNm \quad /: 1kN$$

$$\Delta_i \Delta_m = -0,1329m$$

Węzeł przesunie się w górę, przeciwnie do przyjętego zwrotu siły jednostkowej w stanie wirtualnego obciążenia.