

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

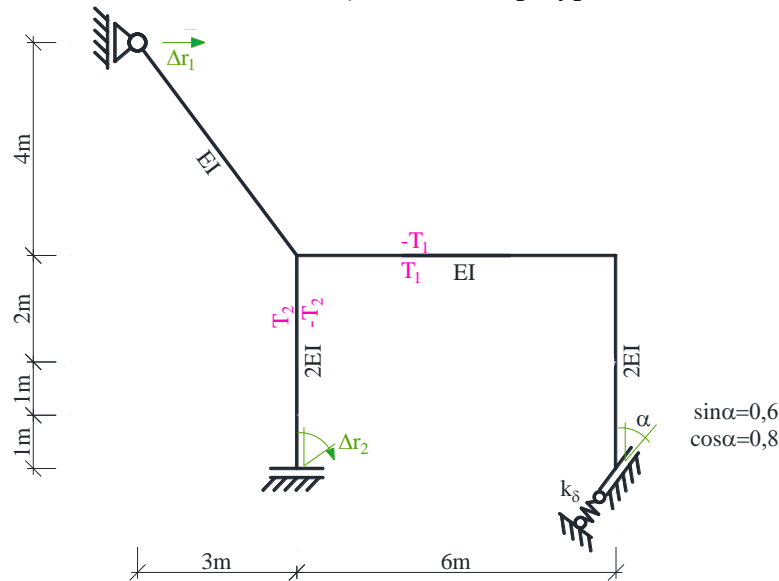
SPIS TREŚCI

1. DANE I SZUKANE	2
2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI	3
3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU.....	3
3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW	3
3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW.....	4
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU	5
4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ.....	5
5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO	6
5.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURĄ.....	6
5.2. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OSIADANIA PODPÓR	7
5.3. PIERWSZY STAN ROTACYJNY	9
5.4. DRUGI STAN ROTACYJNY	10
5.5. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY	11
5.6. DRUGI STAN TRANSLACYJNY	12
5.7. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE.....	14
5.7.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ	14
5.7.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ	14
5.7.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE.....	17
5.8. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW	18
5.8.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH	18
5.8.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW	19
6. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA.....	21

1. DANE I SZUKANE

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu jak na rysunku 1.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..



Rys. 1.1. Schemat statyczny

Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 20 \text{ kN m}$; $k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3$, $\Delta T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $\Delta T_2 = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}$; $\Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$.

Uwzględniając, że układ składa się z prętów o sztywności EI oraz $2EI$ przyjęto dwuteownik równoległościenny IPE 180 dla prętów o sztywności EI oraz 2 IPE 180 dla pręta o sztywności $2EI$

$$E = 210 \text{ GPa};$$

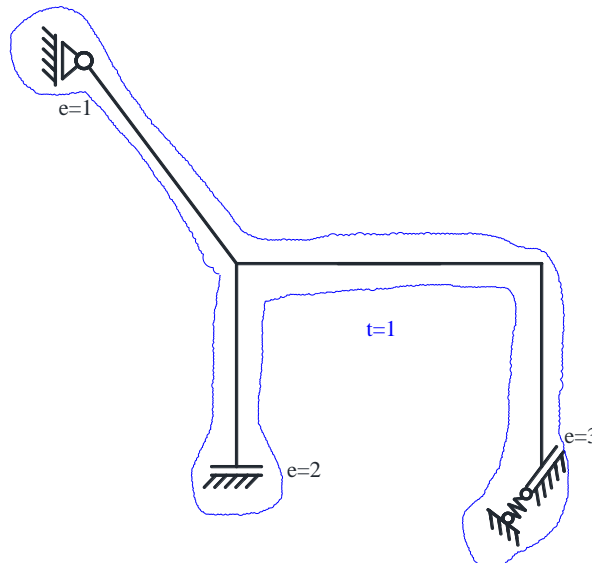
$$I_{\text{IPE 180}} = 1320 \text{ cm}^4.$$

$$EI = 210000000 \text{ kN/m}^2 * 1320 * 10^{-8} \text{ m}^4 = 2772 \text{ kNm}^2,$$

$$k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3 = 22176 \text{ kNm/m}^3.$$

2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności



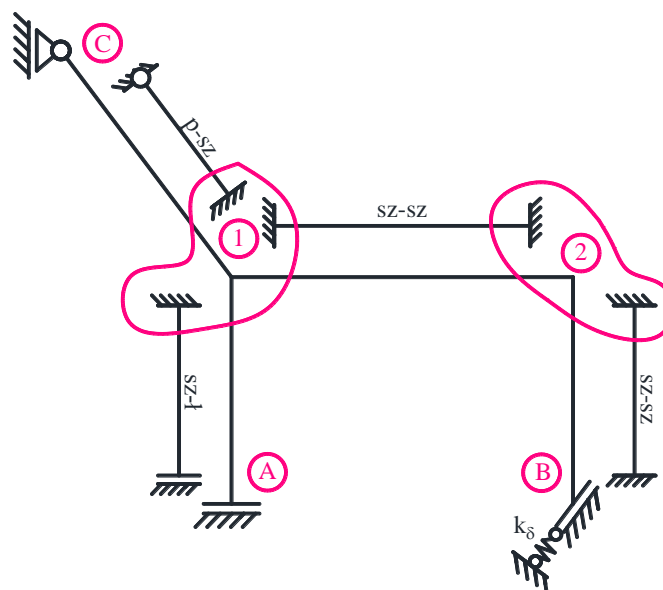
Rys. 2.1. Tarcze i więzi

$$t = 1, \quad e = 2 + 3 + 1 = 6, \quad n_h = e - 3 \cdot t = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją siedmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU

3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW



Rys. 3.1.1. Numeracja węzłów i typów prętów

Z przyjętego podziału na pręty wynika, że:

- Dla prętów i-j stosowane będą wzory transformacyjne w postaci:

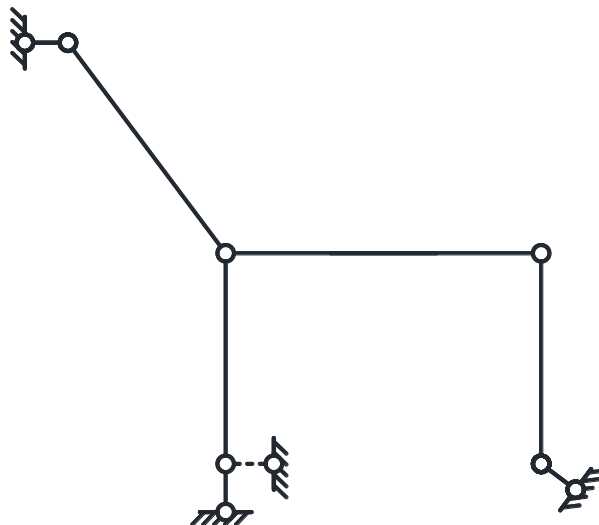
$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^0$$
$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^0$$

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, $\varphi_{2B} = \varphi_{21} = \varphi_2$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 2$.

3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym a prawym utwierdzony z przesuwnem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



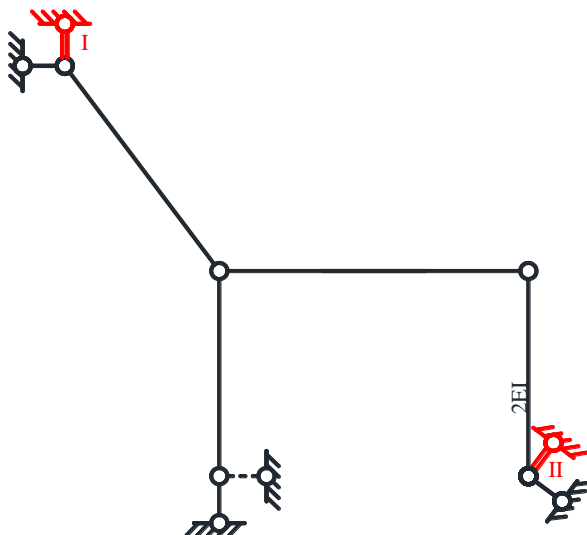
Rys. 3.2.1. Model przegubowy

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

$$n_\delta \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2,$$

gdzie: $w = 9$ - liczba węzłów modelu,
 $p = 8$ - liczba prętów w modelu,
 $r = 8$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 3.2.2. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 2 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwu węzłów $n_\delta = 2$.

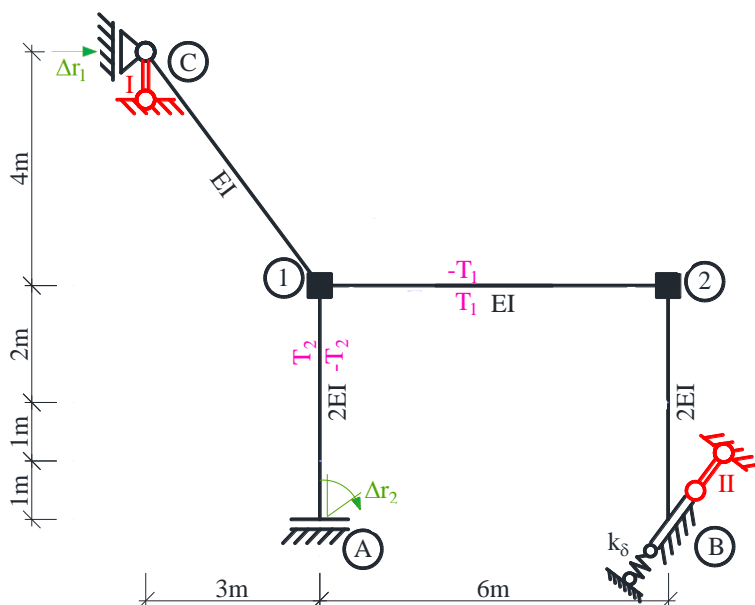
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIETYCZALNOŚCI UKŁADU

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 2 = 4.$$

4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMISZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rys.4.1., jest geometrycznie wyznaczalny.

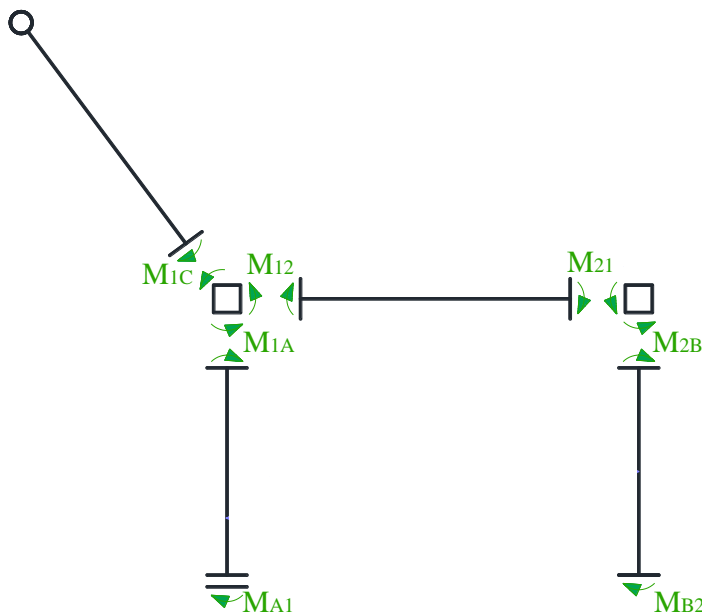


Rys. 4.1. Układ podstawowy metody przemieszczeń

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO

5.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie



$$M_{1A}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ\text{C} - (-25^\circ\text{C})}{0,18\text{m}} = -555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ\text{C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{A1}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ\text{C} - (-25^\circ\text{C})}{0,18\text{m}} = 555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ\text{C} \cdot \alpha_T}{m},$$

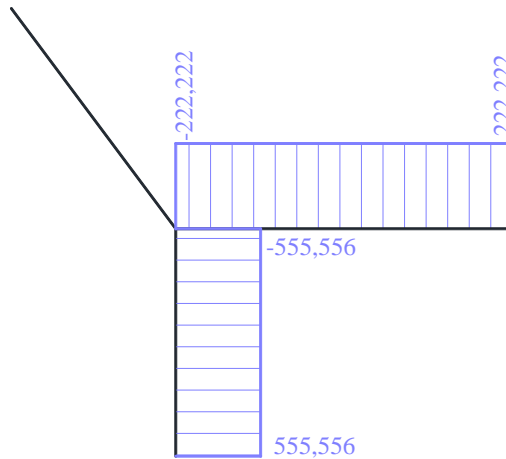
$$M_{1C}^T = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18\text{m}} = 0$$

$$M_{12}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,18\text{m}} = -222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ\text{C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{21}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,18\text{m}} = 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ\text{C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{2B}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18\text{m}} = 0,$$

$$M_{B2}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18\text{m}} = 0,$$



Rys. 5.1.1. Wykres momentów M^T w $\frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}$.

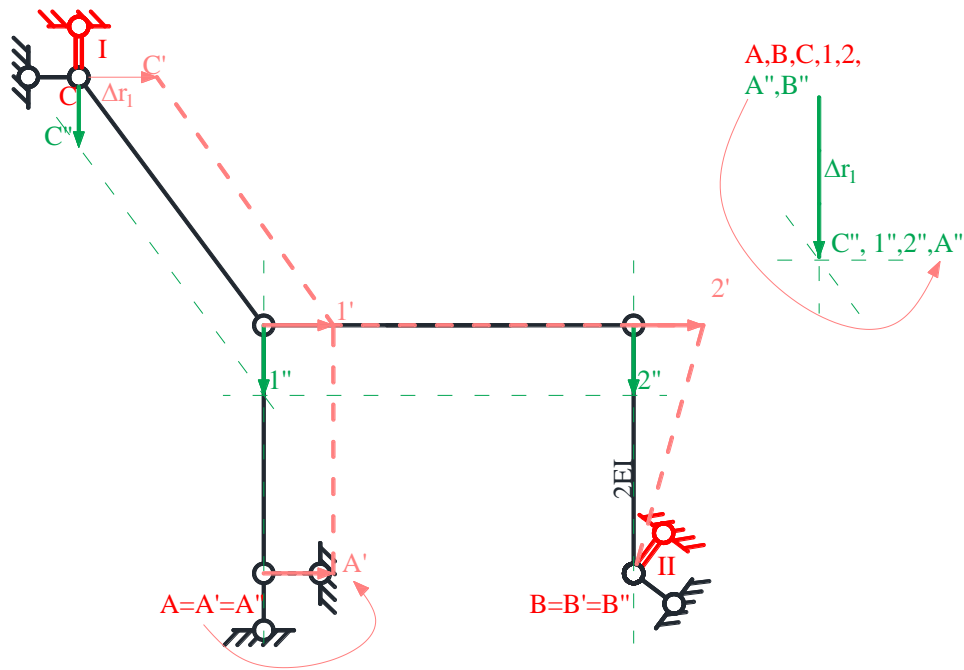
8.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OSIADANIA PODPÓR

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$. Momenty brzegowe od przemieszczenia podpór są obliczane przy wykorzystaniu wzorów transformacyjnych dla przyjętych elementów pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{ij}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij})$$

$$M_{ji}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij})$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszane jest przesunięcie o wartości $\Delta r_1 = 0,02m$. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



Rys. 5.2.1. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{\Delta r_1} &= -|1''2''| = 0 \\ \Delta_{2B}^{\Delta r_1} &= -|2''B''| = \Delta r_1 = 0,02m \quad (,+,“ \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo}) \\ \Delta_{1A}^{\Delta r_1} &= |1''A''| = 0 \\ \Delta_{1C}^{\Delta r_1} &= |1''C''| = 0 \end{aligned}$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_1}}{L_{ij}}$):

$$\begin{aligned} \psi_{12}^{\Delta r_1} &= 0, \\ \psi_{2B}^{\Delta r_1} &= \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005 \\ \psi_{1A}^{\Delta r_1} &= \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0 \end{aligned}$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia Δr_1 wynoszą:

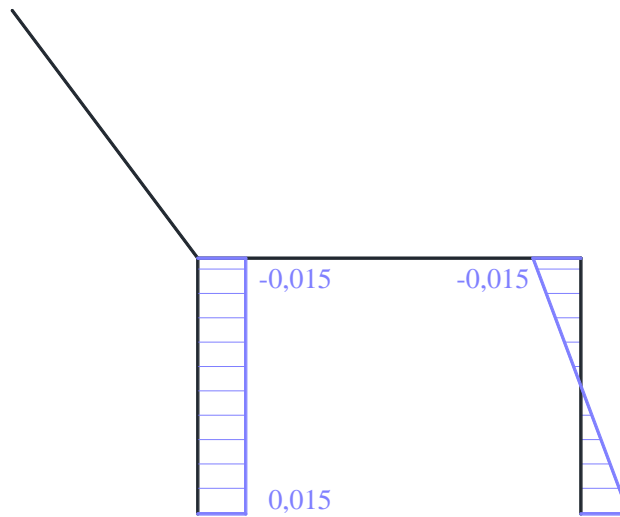
$$\begin{aligned} M_{12}^{\Delta r_1} &= \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21} - c_{12} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0, \\ M_{21}^{\Delta r_1} &= \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12} - c_{21} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0, \\ M_{1A}^{\Delta r_1} &= \frac{EI_{1A}}{L_{1A}}(a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \Delta r_2 - c_{1A} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 0,03 - 6 \cdot 0) = -0,015 \frac{EI}{m}, \\ M_{A1}^{\Delta r_1} &= \frac{EI_{A1}}{L_{A1}}(a_{A1} \cdot \Delta r_2 + b_{A1} \cdot \varphi_{1A} - c_{A1} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m}(1 \cdot 0,03 - 1 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,015 \frac{EI}{m}, \\ M_{1C}^{\Delta r_1} &= \frac{EI_{1C}}{L_{1C}}(a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{1C} - c_{1C} \cdot \psi_{1C}) = \frac{2EI}{4m}(3 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0, \\ M_{C1}^{\Delta r_1} &= \frac{EI_{C1}}{L_{C1}}(a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C} - c_{C1} \cdot \psi_{1C}) = \frac{EI}{5m}(0 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0, \end{aligned}$$

$$M_{2B}^{\Delta r} = \frac{EI_{2B}}{L_{2B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2} - c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005)$$

$$= -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^{\Delta r} = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B} - c_{B2} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005)$$

$$= -0,015 \frac{EI}{m}.$$



Rys. 5.2.2. Wykres momentów $M^{\Delta r}$ w $\frac{EI}{m}$.

5.3. PIERWSZY STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_l = \varphi_{lj} = 1$, $\varphi_2 = \delta_l = \delta_{ll} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2EI}{3m}$$

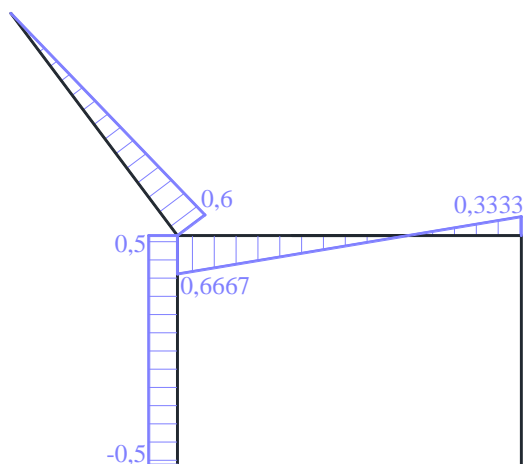
$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1EI}{3m}$$

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{4m} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1EI}{2m}$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1EI}{2m}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{3EI}{5m}$$

$$M_{C1}^1 = M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0$$



Rys. 5.3.1. Wykres momentów M^I w EI/m .

5.4. DRUGI STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_2 = \varphi_{2j} = 1$, $\varphi_I = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{2j}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{2j} \cdot \varphi_{2j} + b_{2j} \cdot \varphi_{j2}),$$

$$M_{j2}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{j2} \cdot \varphi_{j2} + b_{j2} \cdot \varphi_{2j}).$$

Momenty brzegowe wynoszą:

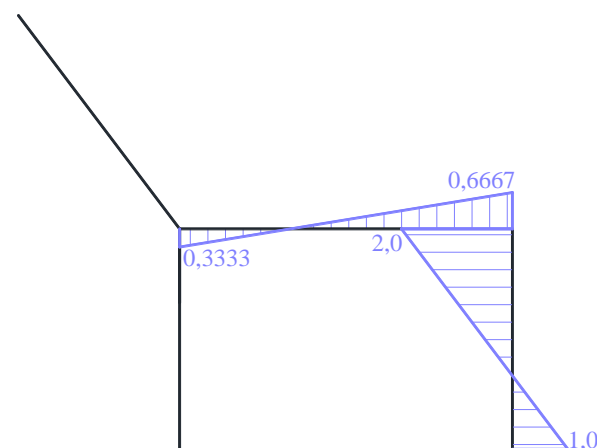
$$M_{21}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2EI}{3m}$$

$$M_{12}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1EI}{3m}$$

$$M_{2B}^2 = \frac{EI_{1B}}{L_{1B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2 \frac{EI}{m}$$

$$M_{B2}^2 = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1 \frac{EI}{m}$$

$$M_{1C}^2 = M_{C1}^2 = M_{1A}^2 = M_{A1}^2 = 0$$



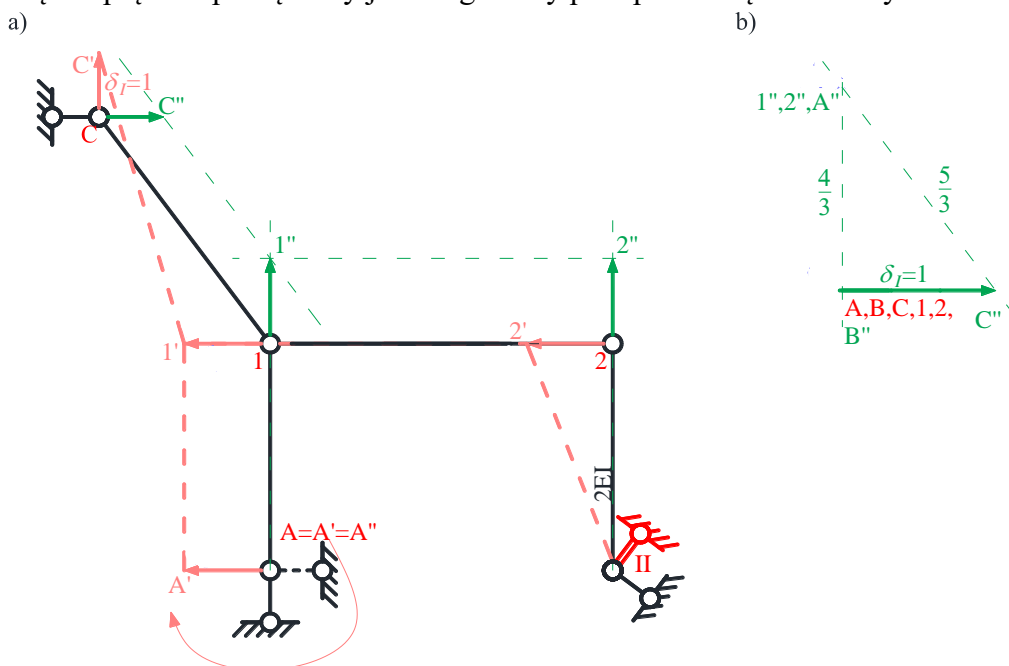
Rys. 5.4.1. Wykres momentów M^2 w EI/m .

5.5. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układu z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



Rys. 5.5.1. a) plan przesunięć obróconych i możliwych, b) B.P.P.O.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{2B}^I = -|2''B''| = -\frac{4}{3} \quad (,,-'', \text{ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{1C}^I = +|1''C''| = +\frac{5}{3} (,,+', \text{ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo})$$

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = 0$$

$$\Delta_{1A}^I = |1''A''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1A}^I = \psi_{12}^I = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{2B}^I = M_{B2}^I = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^I = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{1C}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{C1}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{C1} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3m} = 0,$$

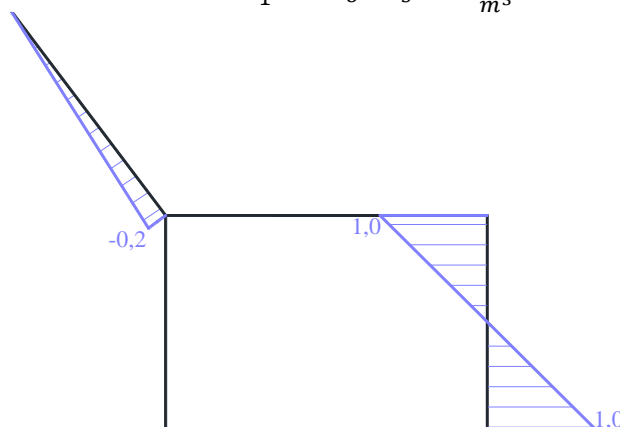
$$M_{1A}^I = M_{A1}^I = M_{12}^I = M_{21}^I = 0$$

Zmiana długości więzi sprężystej:

$$\delta_s^I = 0$$

Siła w więzi sprężystej:

$$S_1^{\delta_I} = k_\delta \cdot \delta_s^I = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 = 0$$



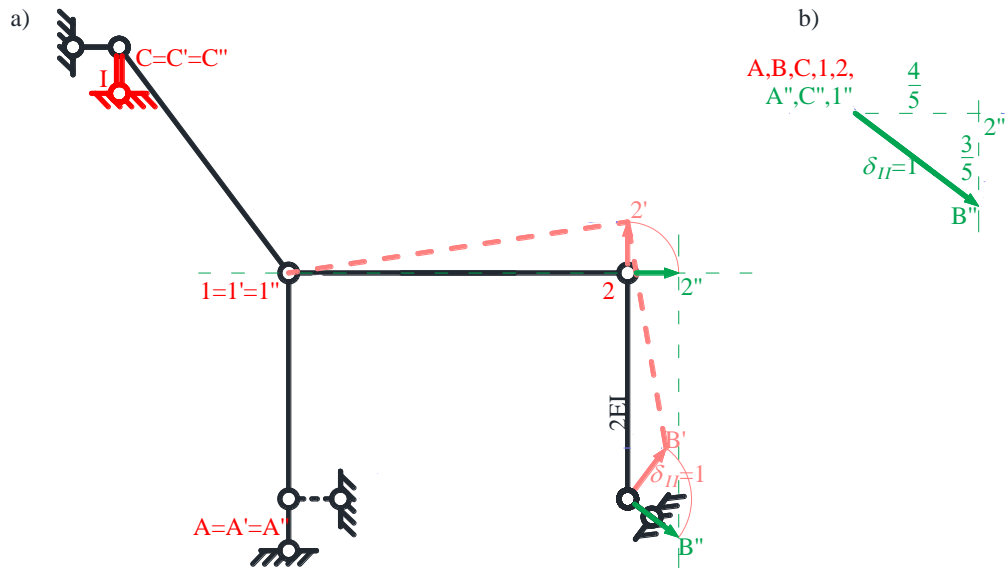
Rys. 5.5.2. Wykres momentów M^I w EI/m^2 .

5.6. DRUGI STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_{II} = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^{II} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^{II}, \quad M_{ji}^{II} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ji}^{II}.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi II. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



Rys. 5.6.1. a) Plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^{II} = -|1''2''| = -\frac{4}{5} \text{ („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo)}$$

$$\Delta_{12}^{II} = -|2''B''| = -\frac{3}{5} \text{ („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo)}$$

$$\Delta_{1A}^{II} = |1''A''| = 0$$

$$\Delta_{1C}^{II} = |1''C''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{II} = \frac{\Delta_{ij}^{II}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_{II} wynoszą:

$$M_{12}^{II} = M_{21}^{II} = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^{II} = -\frac{EI}{6m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{2B}^{II} = M_{B2}^{II} = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{II} = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}$$

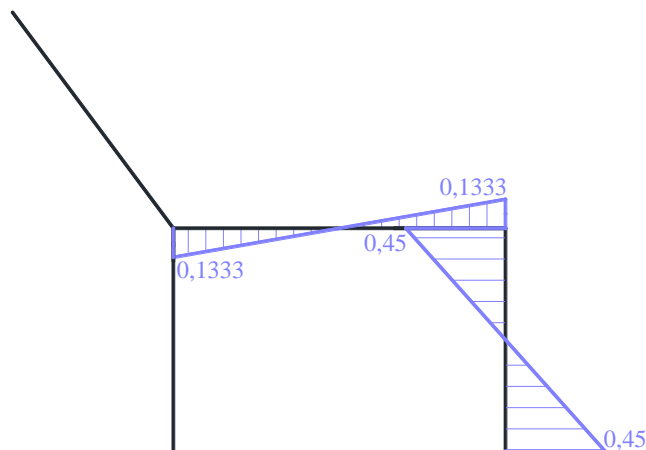
$$M_{1A}^{II} = M_{A1}^{II} = M_{1C}^{II} = M_{C1}^{II} = 0$$

Zmiana długości więzi sprężystej:

$$\delta_s^{II} = 1$$

Siła w więzi sprężystej:

$$S_1^{\delta_{II}} = k_\delta \cdot \delta_s^{II} = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 8 \frac{EI}{m^3}$$



Rys. 5.6.2. Wykres momentów M^II w EI/m^2 .

5.7. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

5.7.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$\begin{aligned} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} &= 0 \\ k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} &= 0 \\ k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I I} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} &= 0 \\ k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1o} &= k_{1T} + k_{1\Delta r} \\ k_{2o} &= k_{2T} + k_{2\Delta r} \\ k_{Io} &= k_{IT} + k_{I\Delta r} \\ k_{IIo} &= k_{IIT} + k_{II\Delta r} \end{aligned}$$

5.7.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^\varphi = (0,6667 + 0,5 + 0,6 + 0) \frac{EI}{m} = \frac{53 EI}{30 m} \\ &= 4897,2 kN m, \end{aligned}$$

$$k_{12} = \sum_j M_{1j}^2 = M_{12}^2 + M_{1A}^2 + M_{1C}^2 = (0,3333 + 0 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m} = 924,0 kN m,$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = 0 + 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{EI}{m^2} = -554,4 kN,$$

$$k_{1II} = \sum_j M_{1j}^{II} = M_{12}^{II} + M_{1A}^{II} + M_{1C}^{II} = \frac{2 EI}{15 m^2} + 0 + 0 = 0,1333 \frac{EI}{m^2} = 369,6 kN,$$

$$\begin{aligned} k_{1T} &= \sum_j M_{1j}^T = M_{12}^T + M_{1A}^T + M_{1C}^T = -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} - 555,55556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 0 \\ &= -777,7778 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} = -25,872 kN m, \end{aligned}$$

$$k_{1\Delta r} = \sum_j M_{1j}^{\Delta r} = M_{12}^{\Delta r} + M_{1A}^{\Delta r} + M_{1C}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m} = -41,58 kN m,$$

$$k_{10} = k_{1T} + k_{1\Delta r} = -25,872N m - 41,58kN m = -67,452kN m$$

$$k_{21} = \sum_j M_{2j}^1 = M_{21}^1 + M_{2B}^1 = (0,3333 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m} = 924,0kN m,$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k_2^\varphi = M_{21}^2 + M_{2B}^2 + k_2^\varphi = \left(\frac{2}{3} + 2 + 0\right) \frac{EI}{m} = \frac{8 EI}{3 m} = 2,6667 \frac{EI}{m} = 7392kN m,$$

$$k_{2I} = \sum_j M_{2j}^I = M_{21}^I + M_{2B}^I = 0 + 1 \frac{EI}{m^2} = 1 \frac{EI}{m^2} = 2772kN m,$$

$$k_{2II} = \sum_j M_{2j}^{II} = M_{21}^{II} + M_{2B}^{II} = \left(\frac{2}{15}\right) \frac{EI}{m^2} + \left(\frac{9}{20}\right) \frac{EI}{m^2} = \frac{7 EI}{12 m^2} = 0,5833 \frac{EI}{m^2} = 1661,7kN m,$$

$$k_{2T} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = 222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 0$$

$$= 222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} = 7,392kN m.$$

$$k_{2\Delta r} = \sum_j M_{2j}^{\Delta r} = M_{21}^{\Delta r} + M_{2B}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m} = -41,58kN m.$$

$$k_{2o} = k_{2T} + k_{2\Delta r} = 7,392kN m - 41,58kN m = -34,188kN m$$

$$k_{I1} = - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I$$

$$= -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^I - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^I$$

$$- (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^I$$

$$= - \left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0$$

$$- \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = -0,2 \frac{EI}{m^2} = -554,4kN$$

$$k_{I2} = - \sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^I$$

$$= -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^I - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^I$$

$$= - \left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \frac{1}{3m}$$

$$- \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2} = 2772kN,$$

$$k_{II} = - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I$$

$$= -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I$$

$$+ k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^I$$

$$= -(0 + 0) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - \left(-\frac{1 EI}{5 m^2} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right)$$

$$+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 0 = 0,7333333 \frac{EI}{m^3} = 2032,7991 \frac{kN}{m},$$

$$\begin{aligned}
 k_{II} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^{II} \\
 &= -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^I \\
 &\quad - (M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^I + k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^{II} \\
 &= - \left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} \right) \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 1 = 0,3 \frac{EI}{m^3} = 831,6 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{IT} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^I - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^I \\
 &\quad - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^I \\
 &= - \left(-555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot \frac{1}{3m} \\
 &\quad - \left(-222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 \\
 &\quad - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{I\Delta r} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{Ar} + M_{ji}^{Ar}) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^{Ar} + M_{21}^{Ar}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{Ar} + M_{A1}^{Ar}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{Ar} + M_{C1}^{Ar}) \psi_{1C}^I \\
 &\quad - (M_{2B}^{Ar} + M_{B2}^{Ar}) \psi_{2B}^I \\
 &= -(0 + 0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 \\
 &\quad - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = -0,01 \frac{EI}{m^2} = -27,72 kN
 \end{aligned}$$

$$k_{Io} = k_{IT} + k_{I\Delta r} = 0 - 27,72 kN = -27,72 kN$$

$$\begin{aligned}
 k_{II1} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^{II} \\
 &= -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^{II} \\
 &\quad - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^{II} = \\
 &= - \left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{4}{30m} \right) - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 \\
 &\quad - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0 \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} = 369,6 kN,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II2} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^{II} \\
 &= -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^{II} \\
 &\quad - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^{II} = \\
 &= - \left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{4}{30m} \right) - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 \\
 &\quad - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) = 0,5833 \frac{EI}{m^2} = 16617 kN,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^I \\
 &= -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I \\
 &\quad - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^I \\
 &= -(0 + 0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0 - 0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 0 = 0,3 \frac{EI}{m^3} = 831,6 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^{II} \\
 &= -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^{II} \\
 &\quad - (M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^{II} \\
 &= -\left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0 + 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 \\
 &\quad - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,1705 \frac{EI}{m^3} = 22648,626 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^I - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^I - \\
 &\quad - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^I = -\left(-555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}\right) \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) \\
 &\quad - \left(-222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}\right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - (0 - 0) \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{Ar} + M_{ji}^{Ar}) \psi_{ij}^{II} \\
 &= -(M_{12}^{Ar} + M_{21}^{Ar}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{Ar} + M_{A1}^{Ar}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{Ar} + M_{C1}^{Ar}) \psi_{1C}^{II} \\
 &\quad - (M_{2B}^{Ar} + M_{B2}^{Ar}) \psi_{2B}^{II} \\
 &= -(0 + 0) \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 \\
 &\quad - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = -0,0045 \frac{EI}{m^2} = -12,474 kN,
 \end{aligned}$$

$$k_{III} = k_{III} + k_{III} = 0 - 12,7575 kN = -12,7575 kN.$$

5.7.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$4897,2 kN \cdot m \cdot \varphi_1 + 924,0 kN \cdot m \cdot \varphi_2 - 554,4 kN \cdot \delta_I + 369,6 kN \cdot \delta_{II} - 67,45 kN \cdot m = 0$$

$$924,0 kN \cdot m \cdot \varphi_1 + 7392 kN \cdot m \cdot \varphi_2 + 2772 kN \cdot \delta_I + 1661,7 kN \cdot \delta_{II} - 34,188 kN = 0$$

$$-554,4 kN \cdot \varphi_1 + 2772 kN \cdot \varphi_2 + 2032,7991 \frac{kN}{m} \cdot \delta_I + 831,6 \frac{kN}{m} \cdot \delta_{II} - 27,72 kN = 0$$

$$369,6 kN \cdot \varphi_1 + 1661,7 kN \cdot \varphi_2 + 831,6 \frac{kN}{m} \cdot \delta_I + 22648,626 \frac{kN}{m} \cdot \delta_{II} - 12,7575 kN = 0$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 0,01937 \\
 \delta_I &= 0,03262 m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= -0,00997 \\
 \delta_{II} &= -0,00025 m
 \end{aligned}$$

5.8. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

5.8.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^o,$$

Momenty brzegowe:

$$M_{12} = M_{12}^1 \cdot \varphi_1 + M_{12}^2 \cdot \varphi_2 + M_{12}^I \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{12}^o = [0,6667 \cdot 0,01937 + 0,3333 \cdot (-0,00997) + 0 \cdot 0,03262m + 0,1333 \cdot (-0,00025)m - 222,222^\circ\text{C} \cdot \frac{0,000012}{^\circ\text{C}} + 0] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = 19,0902\text{kN} \cdot m,$$

$$M_{21} = M_{21}^1 \cdot \varphi_1 + M_{21}^2 \cdot \varphi_2 + M_{21}^I \cdot \delta_I + M_{21}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{21}^o = [0,3333 \cdot 0,01937 + 0,6667 \cdot (-0,00997) + 0 \cdot 0,03262m + 0,1333 \cdot (-0,00025)m + 222,222^\circ\text{C} \cdot \frac{0,000012}{^\circ\text{C}} + 0] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = 6,7602\text{kN} \cdot m,$$

$$M_{1A} = M_{1A}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1A}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1A}^I \cdot \delta_I + M_{1A}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1A}^o = [0,5 \cdot 0,01937 + 0 \cdot (-0,00997) + 0 \cdot 0,03262m + 0 \cdot (-0,00025)m - 555,556^\circ\text{C} \cdot \frac{0,000012}{^\circ\text{C}} - 0,015] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = -33,2164\text{kN} \cdot m,$$

$$M_{A1} = M_{A1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{A1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{A1}^I \cdot \delta_I + M_{A1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{A1}^o = [-0,5 \cdot 0,01937 + 0 \cdot (-0,00997) + 0 \cdot 0,03262m + 0 \cdot (-0,00025)m + (-9) + 555,556^\circ\text{C} \cdot \frac{0,000012}{^\circ\text{C}} - 0,015] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = 33,2164\text{kN} \cdot m$$

$$M_{1C} = M_{1C}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1C}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1C}^I \cdot \delta_I + M_{1C}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1C}^o = 0,6 \frac{EI}{m} \cdot 0,01937 + 0 \cdot (-0,00997) + (-0,2) \frac{EI}{m^2} \cdot 0,03262m + 0 \cdot (-0,00025)m + 0 + 0] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = 14,1263\text{kN} \cdot m$$

$$M_{C1} = M_{C1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{C1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{C1}^I \cdot \delta_I + M_{C1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{C1}^o = 0 \cdot 0,01937 + 0 \cdot (-0,00997) + 0 \cdot 0,03262m + 0 \cdot (-0,00025)m + 0 + 0 = 0$$

$$M_{2B} = M_{2B}^1 \cdot \varphi_1 + M_{2B}^2 \cdot \varphi_2 + M_{2B}^I \cdot \delta_I + M_{2B}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{2B}^o = [0 \cdot 0,01937 + 2 \cdot (-0,00997) + 1 \cdot 0,03262m + 0,45 \cdot (-0,00025)m + 0 - 0,015] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = -6,7620\text{kN} \cdot m$$

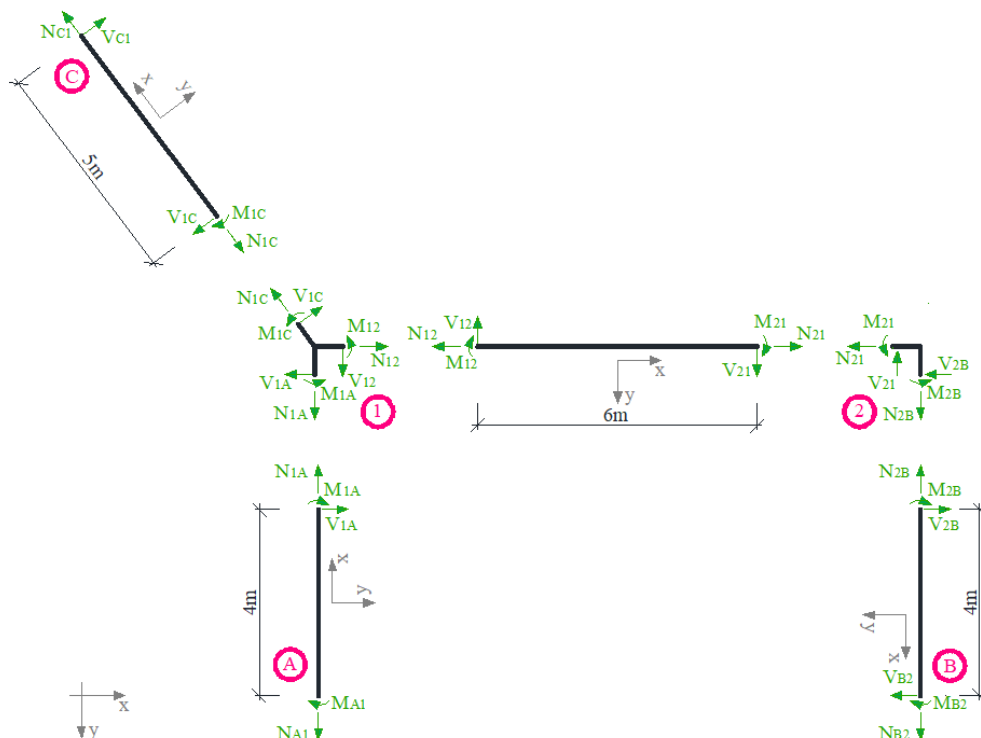
$$M_{B2} = M_{B2}^1 \cdot \varphi_1 + M_{B2}^2 \cdot \varphi_2 + M_{B2}^I \cdot \delta_I + M_{B2}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{B2}^o = [0 \cdot 0,01937 + 1 \cdot (-0,00997) + 1 \cdot 0,03262m + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot (-0,00025)m - 0,015] \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} = 20,8857.$$

Moment zginający w więzi sprężystej:

$$S_\delta = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I + S_1^{\delta_{II}} \cdot \delta_{II} = 0 \cdot 0,03262m + 8 \cdot \frac{2772\text{kN}}{m} \cdot (-0,00025m) = -5,544\text{kN}.$$

5.8.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 5.8.2.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{21} + V_{21} \cdot 6m = [19,0902 + 6,7620 + V_{21} \cdot 6]kN \cdot m = 0$$

$$\Rightarrow V_{21} = -4,3087kN,$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = [V_{12} - (-4,3087)]kN = 0 \Rightarrow V_{12} = -4,3087kN$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$$

Pręt 1-A

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_{1A} = 0,$$

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 4m = [33,2164 - 33,2164 + 0]kN \cdot m = 0,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A}.$$

Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C} + V_{1C} \cdot 5m = [14,1263 + V_{1C} \cdot 5]kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = -2,8253kN,$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + V_{C1} \cdot 5m = [14,1263 + V_{C1} \cdot 5]kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{C1} = -2,8253kN,$$

$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C}$$

Pręt 2-B

$$\sum M_2 = M_{2B} + M_{B2} + V_{B2} \cdot 4m = [-6,7620 + 20,8875 + V_{B2} \cdot 4]kN \cdot m = 0$$

$$\Rightarrow V_{B2} = -3,5314kN,$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_{B2} - V_{2B} = 0 \Rightarrow V_{2B} = -3,5314kN,$$

$$\sum N = N_{2B} - N_{B1} = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C}$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} = [6,7620 + (-6,7620)]kN \cdot m = 0,000$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = [-3,5314 + N_{21}]kN = 0 \Rightarrow N_{21} = 3,5314kN,$$

$$\sum Y = V_{21} - N_{2B} = [-4,3087 - N_{2B}]kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = -4,3087kN.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2} = N_{2B} = -4,3087kN$

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12} = N_{21} = 3,5314kN$.

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1C} = [19,0902 + (-33,2164) + 14,1263]kN \cdot m = 0,0001,$$

$$\sum X = N_{12} - V_{1A} + V_{1C} \cdot \sin\alpha - N_{1C} \cdot \cos\alpha$$

$$= [3,5314kN - 0 + (-2,8253) \cdot 0,8 - N_{1C} \cdot 0,6]kN = 0 \Rightarrow N_{1C} = 2,1185kN,$$

$$\sum Y = N_{1A} + V_{12} - V_{1C} \cdot \cos\alpha - N_{1C} \cdot \sin\alpha$$

$$= [N_{1A} + (-4,3087) - (-2,8253) \cdot 0,6 - 2,1185 \cdot 0,8]kN = 0 \Rightarrow N_{21}$$

$$= 4,3083kN,$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1} = N_{1A} \Rightarrow N_{A1} = 4,3083kN$,

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1} = N_{1C} \Rightarrow N_{C1} = 2,1185kN$.

Obliczenie momentów zginających

$$M_{zgin,12} = M_{12} = 19,0902kN \cdot m$$

$$M_{zgin,21} = -M_{21} = -6,7620kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = -33,2164kN \cdot m$$

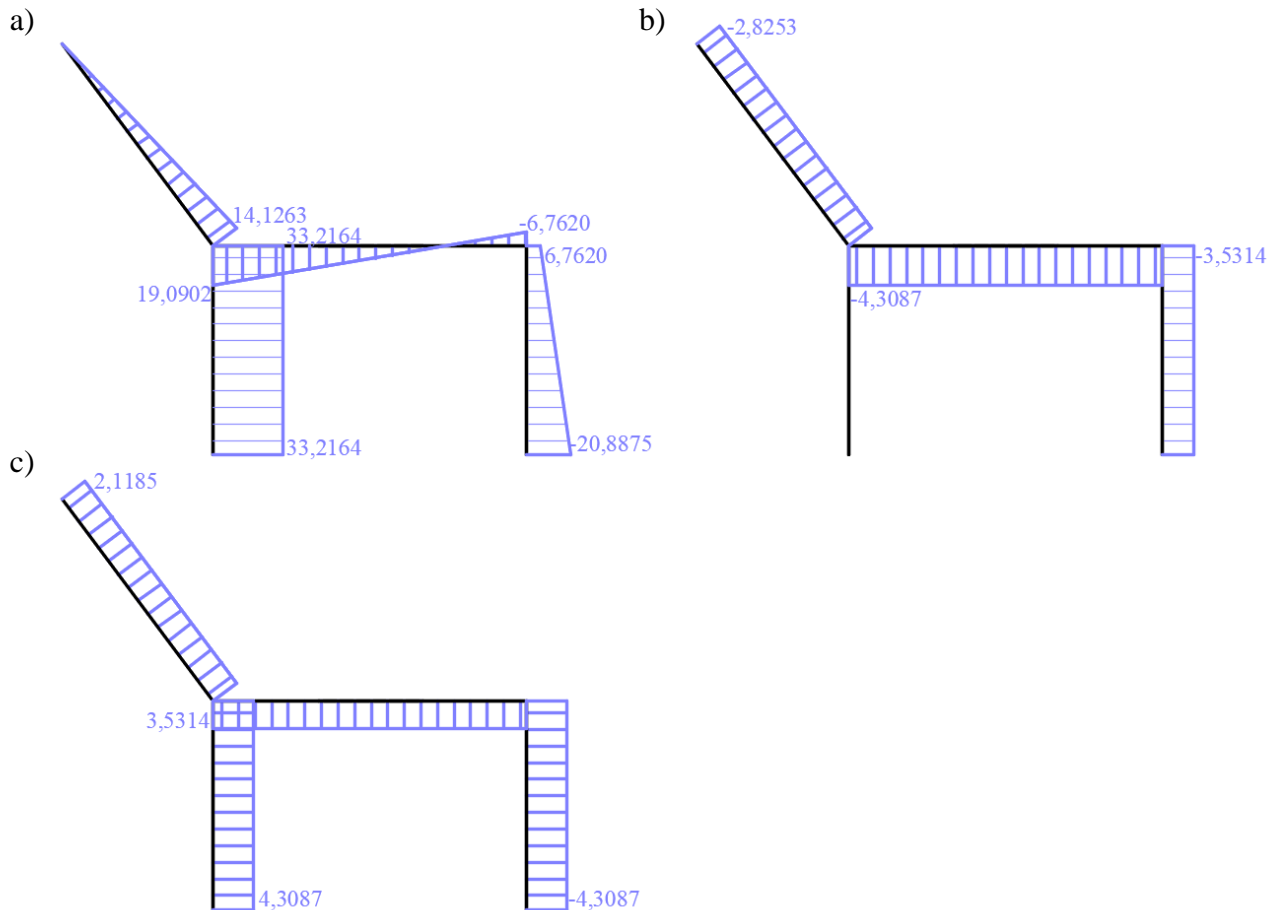
$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = -33,2164kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = 14,1263kN \cdot m$$

$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 0$$

$$M_{zgin,2B} = M_{2B} = -6,7602kN \cdot m$$

$$M_{zgin,B2} = -M_{B2} = -20,8875kN \cdot m$$

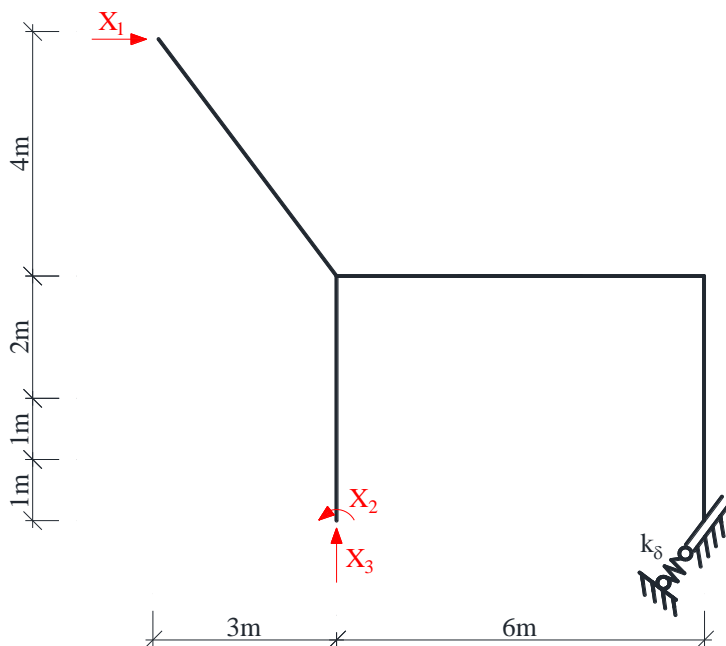


Rys. 5.8.2.2. Wykres a) momentów zginających M w $kN\cdot m$, b) sił tnących V w kN , c) sił osiowych N w kN

6. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

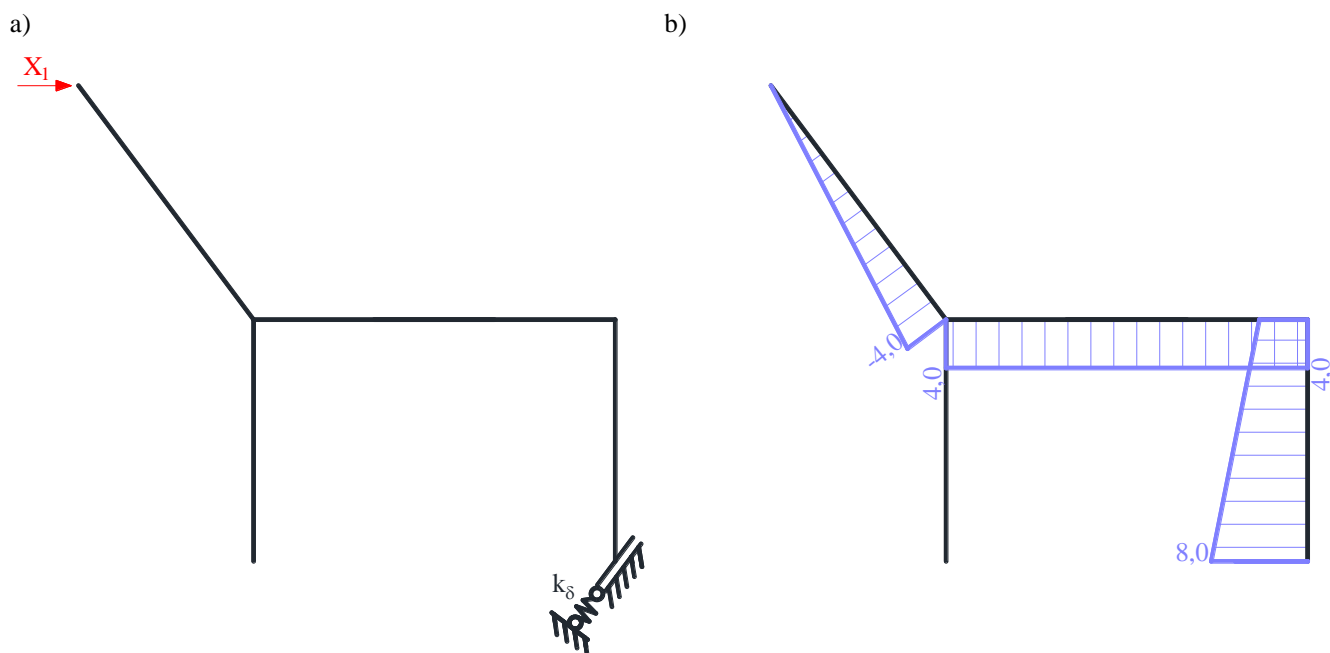
Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając pięć więzi podporowych. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

$$\Delta_{i0} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^0}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^0}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n$$



Rys. 6.1. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego

- Przeszyczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3 = 1$



Rys. 6.2. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^1 w m.

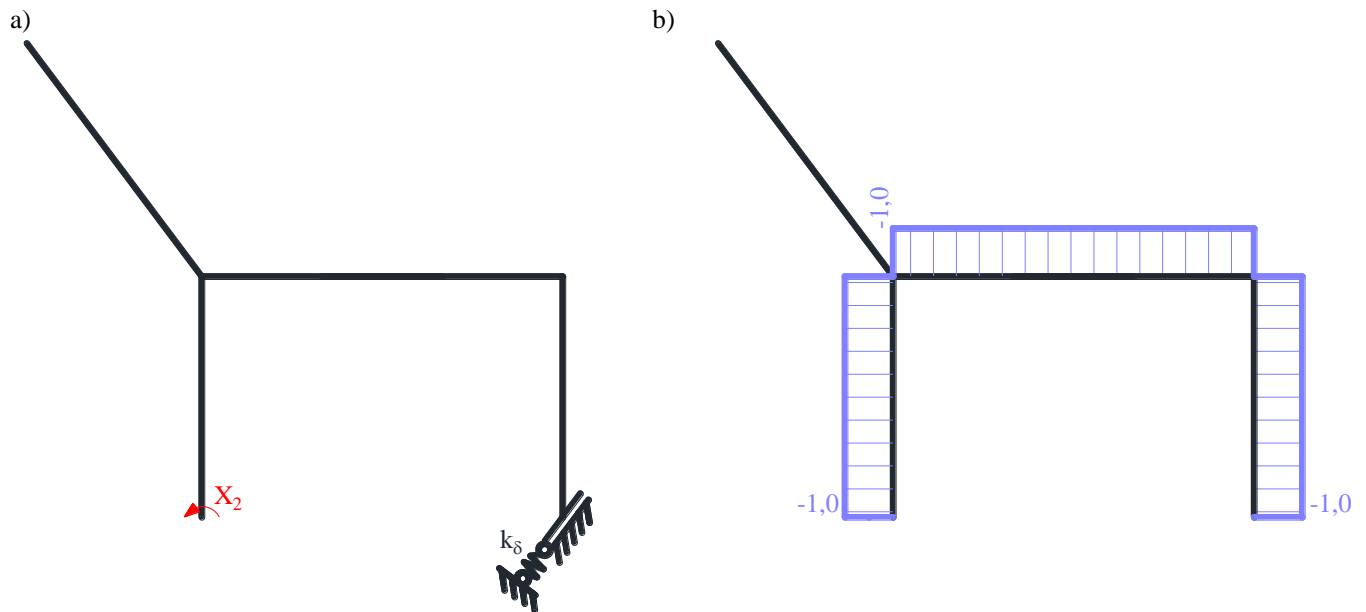
Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^1 = -1 \cdot 0,6 = 0,6$

$$\Delta_{10} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^0}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^0}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n$$

$$= \frac{6m}{6 \cdot 2772 kN \cdot m^2} [4m \cdot 19,0902 kN \cdot m + 4 \cdot 4m \cdot 6,6164 kN \cdot m + 4m \cdot (-6,7620) kN \cdot m] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4m}{6 \cdot 2 \cdot 2772 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [4m \cdot (-6,7620) \text{ kN} \cdot \text{m} + 4 \cdot 6m \cdot (-13,8248) \text{ kN} \cdot \text{m} + 8m \\
 & \quad \cdot (-20,8875) \text{ kN} \cdot \text{m}] \\
 & + \frac{5m}{6 \cdot 2772 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [0 \cdot 0 + 4 \cdot (-2)m \cdot 7,06315 \text{ kN} \cdot \text{m} + (-4)m \cdot 14,1263 \text{ kN} \cdot \text{m}] \\
 & + \frac{0,6 \cdot (-5,544) \text{ kN}}{22176 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{20^\circ\text{C} - (-20)^\circ\text{C}}{0,18\text{m}} \cdot (6\text{m} \cdot 4\text{m}) - 1 \cdot 0,02\text{m} = 0,0000\text{m}
 \end{aligned}$$

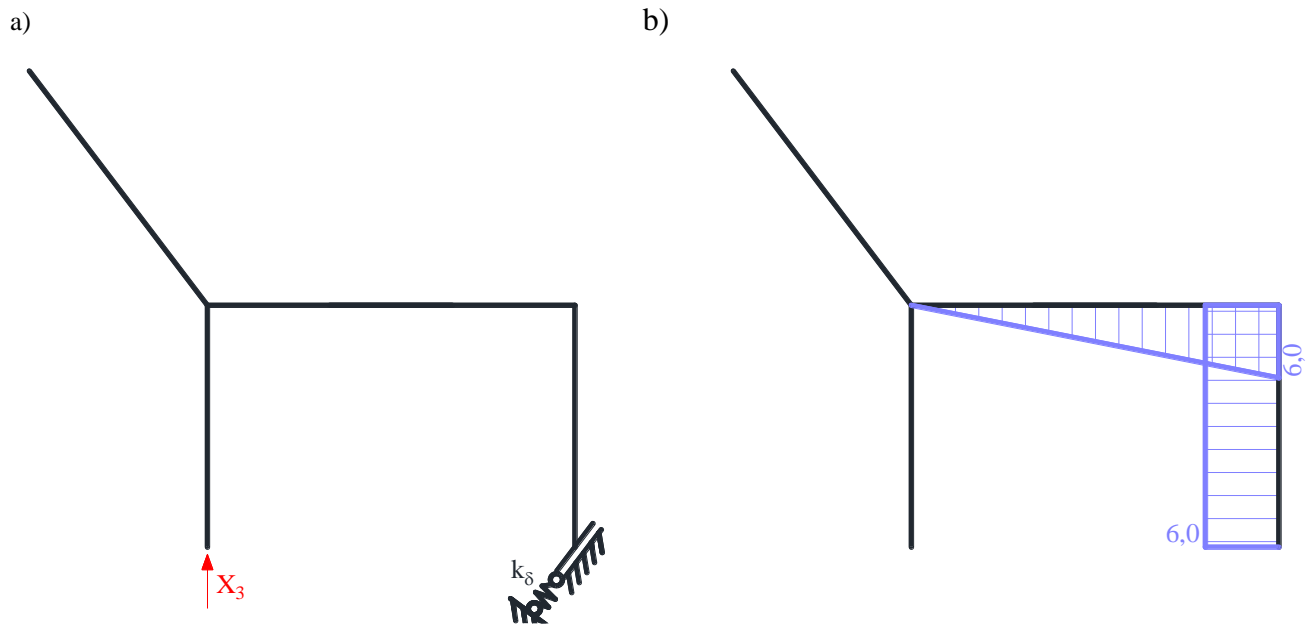
- Przeszyczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_2 = 1$



Rys. 6.3. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_2 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^2 .

$$\begin{aligned}
 \Delta_{20} &= \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^0}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{s}_n^2 \cdot s_n^0}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^2} - \sum_n \bar{R}_n^2 \Delta r_n = \\
 & \frac{1}{2 \cdot 2772 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} \cdot 4\text{m} \cdot (-1) \cdot 33,2164 \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 & + \frac{6\text{m}}{6 \cdot 2772 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [(-1) \cdot 19,0902 \text{ kN} \cdot \text{m} + 4 \cdot (-1) \cdot 6,6164 \text{ kN} \cdot \text{m} + (-1) \cdot (-6,7620) \text{ kN} \cdot \text{m}] + \\
 & + \frac{4\text{m}}{6 \cdot 2 \cdot 2772 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [(-1) \cdot (-6,7620) \text{ kN} \cdot \text{m} + 4 \cdot (-1) \cdot (-13,8248) \text{ kN} \cdot \text{m} \\
 & \quad + (-1) \cdot (-20,8875) \text{ kN} \cdot \text{m}] + \frac{0 \cdot (-5,544) \text{ kN}}{22176 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} \\
 & + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-25^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{0,18\text{m}} \cdot (-1) \cdot 4\text{m} + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{20^\circ\text{C} - (-20)^\circ\text{C}}{0,18\text{m}} \cdot (-1) \cdot 6\text{m} - (-1) \cdot 0,03 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3 = 1$



Rys. 6.4. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_3 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^3 w m.

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_8^3 = -1 \cdot 0,8 = -0,8$

momentów zginających \bar{M}^1 w m.

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_8^1 = 1 \cdot 0,6 = 0,6$

$$\Delta_{30} = \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^0}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^0}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^3} - \sum_n \bar{R}_n^3 \Delta r_n$$

$$= \frac{6m}{6 \cdot 2772 kN \cdot m^2} [0 \cdot 19,0902 kN \cdot m + 4 \cdot 3m \cdot 6,6164 kN \cdot m + 6m \cdot (-6,7620) kN \cdot m] +$$

$$+ \frac{4m}{6 \cdot 2 \cdot 2772 kN \cdot m^2} [6m \cdot (-6,7620) kN \cdot m + 4 \cdot 6m \cdot (-13,8248) kN \cdot m + 6m \cdot (-20,8875) kN \cdot m] +$$

$$+ \frac{5m}{6 \cdot 2772 kN \cdot m^2} [0 \cdot 0 + 4 \cdot (-2)m \cdot 7,06315 kN \cdot m + (-4)m \cdot 14,1263 kN \cdot m]$$

$$+ \frac{0,6 \cdot (-5,544) kN}{22176 \frac{kN}{m}} + 0,000012 \frac{1}{^\circ C} \cdot \frac{20^\circ C - (-20)^\circ C}{0,18m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 6m \right) = 0,00020m$$