



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

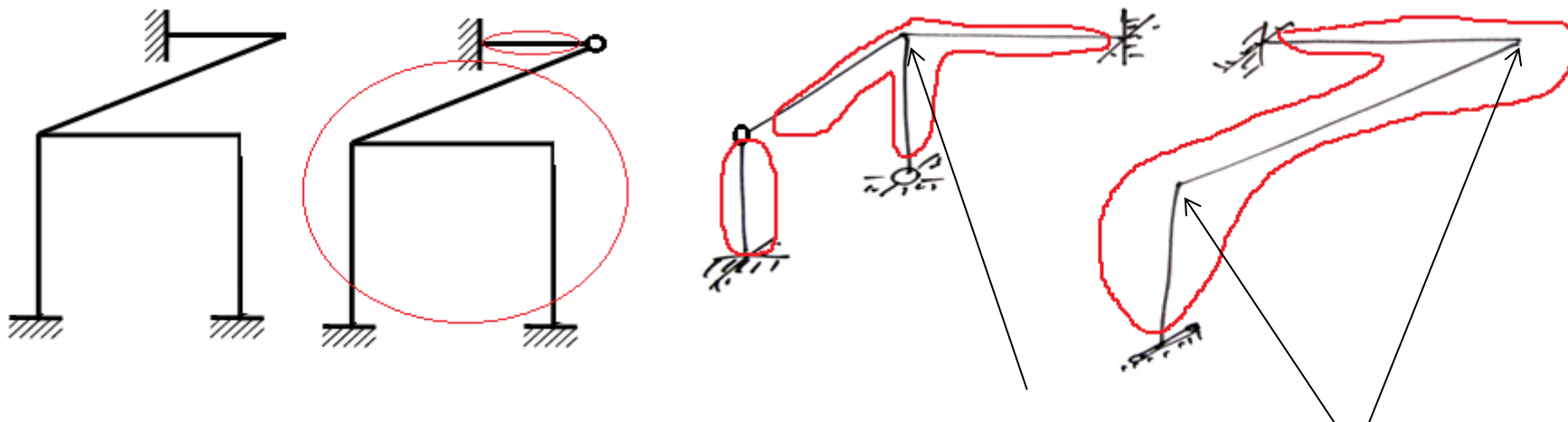
Wykład 2 PRZESTRZENNE UKŁADY PRĘTOWE SW

1

Prowadzący: dr inż. Olga Szytko-Bigus

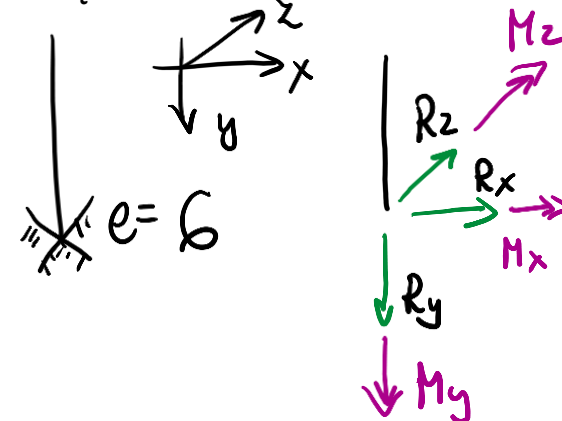
Ramy przestrzenne

W przypadku ustrojów prętowych przez tarczę należy rozumieć pręt lub zbiór prętów połączonych węzłami sztywnymi i tworzącymi graf otwarty.



- Podpory i połączenia należy traktować przestrzennie
- Sztywne połączenia dwóch prętów lub pręta z fundamentem jest równoznaczne z zastosowaniem 6 więzi elementarnych ($e=6$) i odebraniem 6 stopni swobody

POŁĄCZENIE SZTYWNE



1. Ramy przestrzenne – podpory

- Liczba typów podpór w płaskich układach prętowych:

$$n_p^{2D} = \sum_{k=1}^{n=3} \binom{n}{k} = \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{3!}{2!(3-2)!} + \frac{3!}{3!(3-3)!} = 7$$

- Liczba typów podpór w układach przestrzennych:

$$n_p^{3D} = \sum_{k=1}^{n=6} \binom{n}{k} = \frac{6!}{1!(6-1)!} + \frac{6!}{2!(6-2)!} + \dots + \frac{6!}{6!(6-6)!} = 63$$

(kombinacje bez powtórzeń, symbol Newtona)

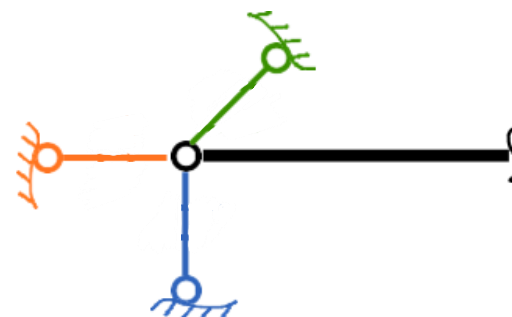
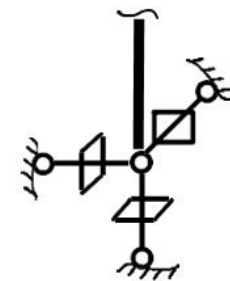
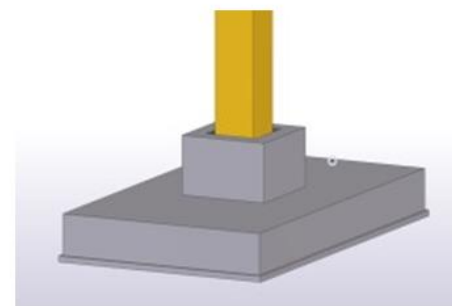
Jeśli uwzględnimy możliwość występowania więzi sprężystych, to liczba możliwych do skonstruowania podpór w układzie przestrzennym wyniesie aż **2509**.

1. Ramy przestrzenne – podpory

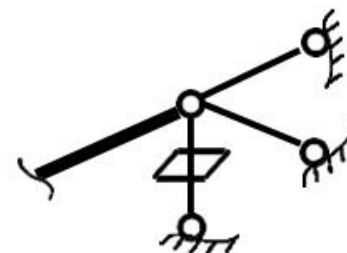
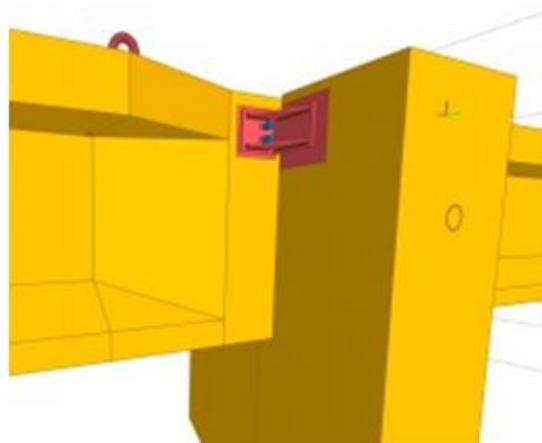
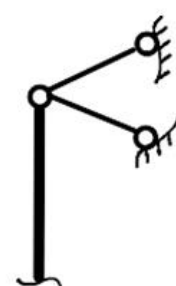
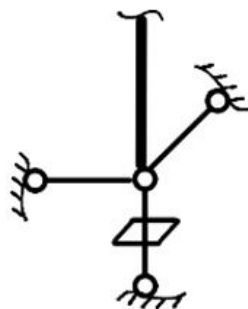
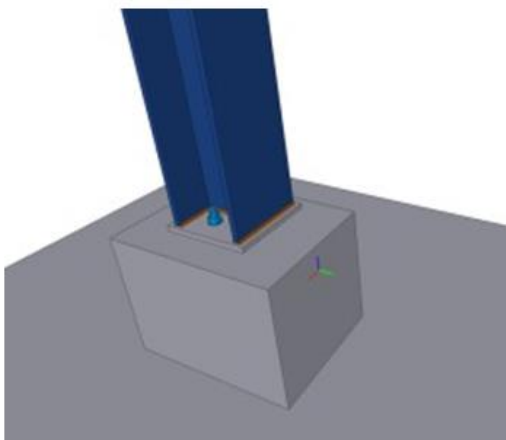
Konwencja oznaczania podpór za pomocą więzi elementarnych

Podpory w układach przestrzennych

- Podpory klasyczne, takie jak utwierdzenie czy przegub kulisty – przykład utwierdzenie słupa żelbetowego w stopie kielichowej
- Podpory niestandardowe, nieposiadające zazwyczaj konkretnych nazw.

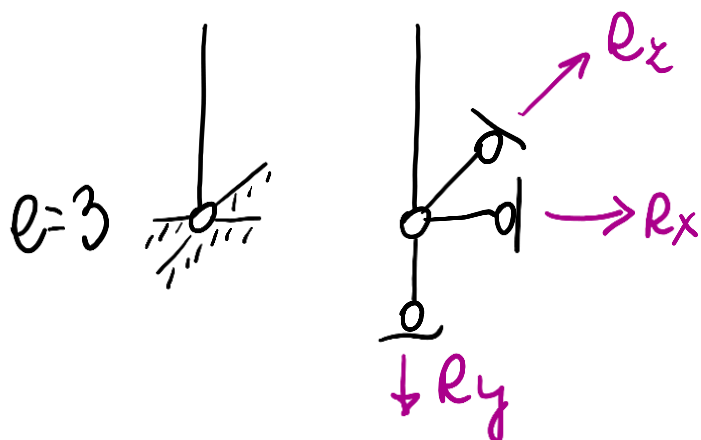


1. Ramy przestrzenne - podpory

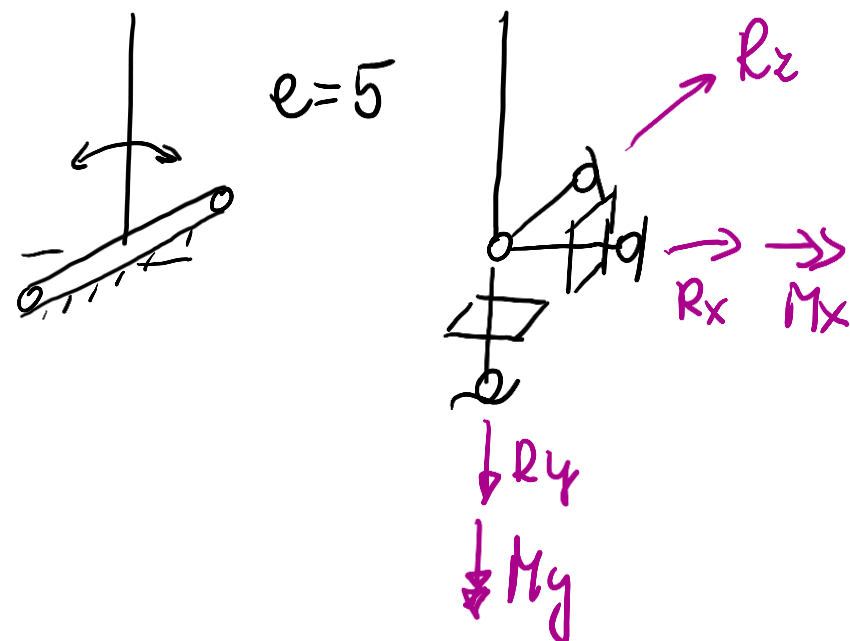


1. Ramy przestrzenne - podpory

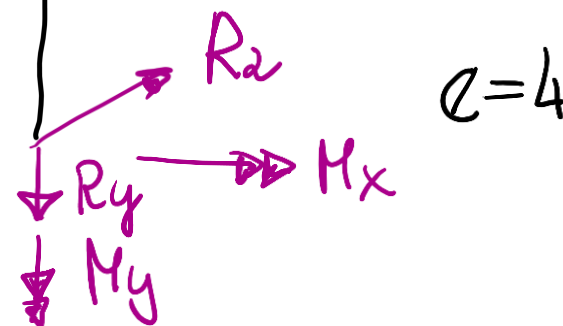
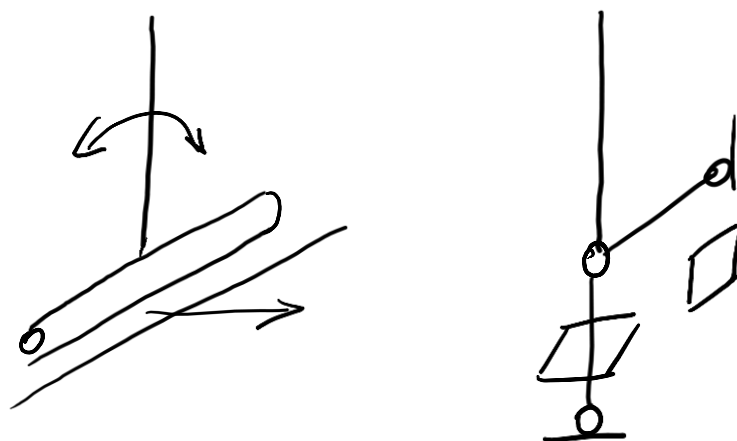
Przegub kołowy (kulisty)



Przegub wałkowy

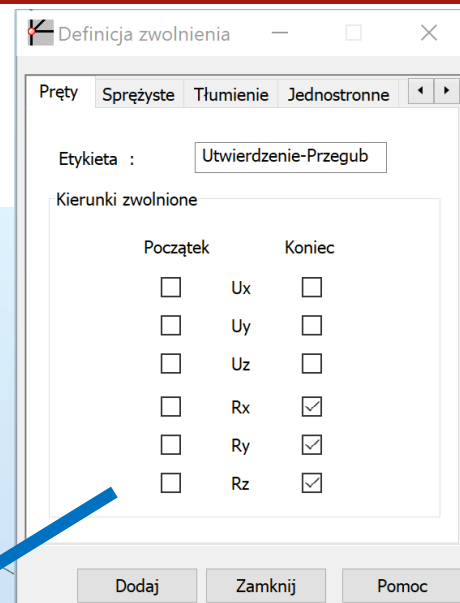
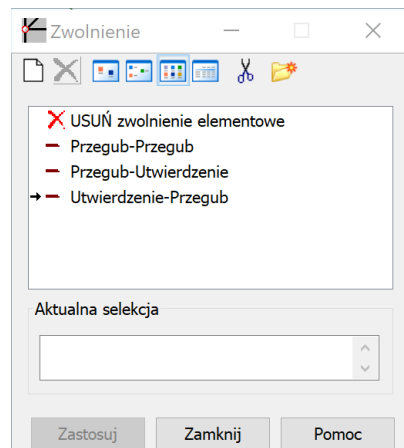
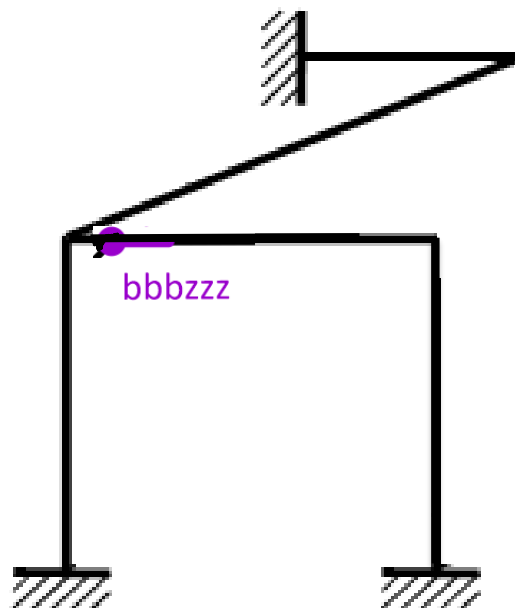


Przegub kulisty przesuwny

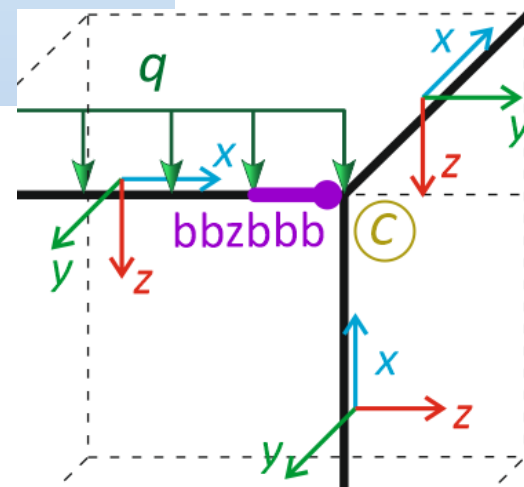
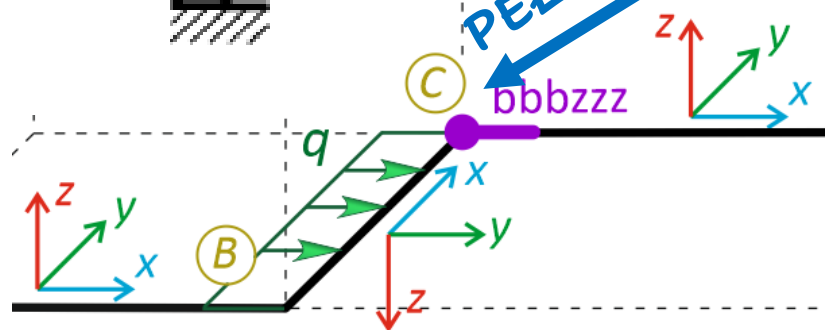


2. Połączenia między prętami

Ciągłość pręta zapewnia układ 6 więzi elementarnych odpowiedzialnych za przeniesienie kompletu sił wewnętrznych.



PEŁNY PRZEGUB





3. Statyczna wyznaczalność i geometryczna niezmiennność ram przestrzennych

Ilościowy warunek geometrycznej niezmienności (GN) i statycznej wyznaczalności (SW) układu prętowego w przestrzeni ma postać

$$e = 6t$$

gdzie

e - jest liczbą więzi elementarnych,

t - jest liczbą tarcz otwartych.

□ **Stopień statecznej niewyznaczalności (SSN)** układu prętowego określa wzór

$$n_h = e - 6t$$

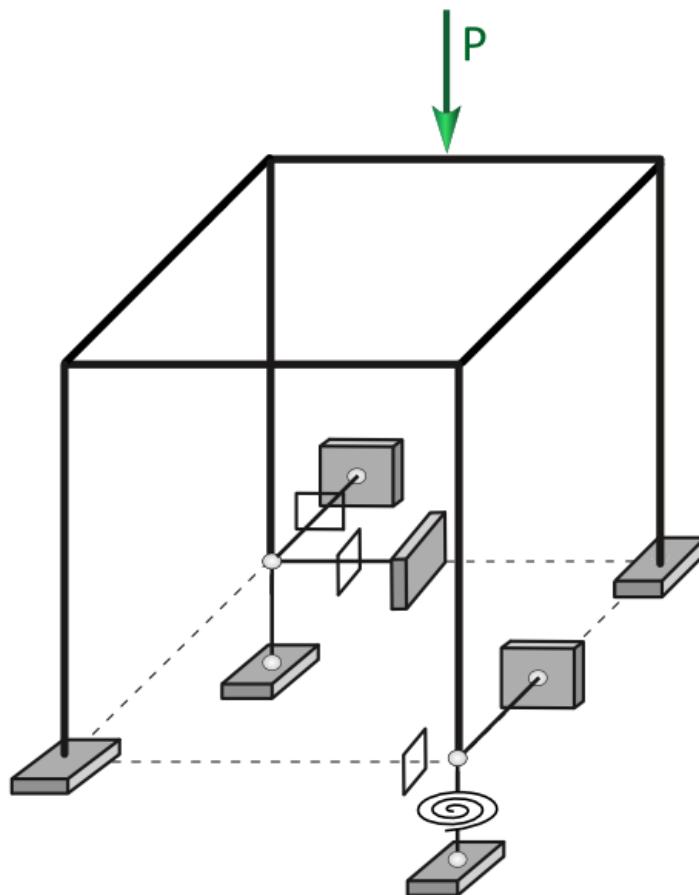
Gdy:

$n_h = 0$ układ jest **SW**.

$n_h > 0$ układ jest **SN**.

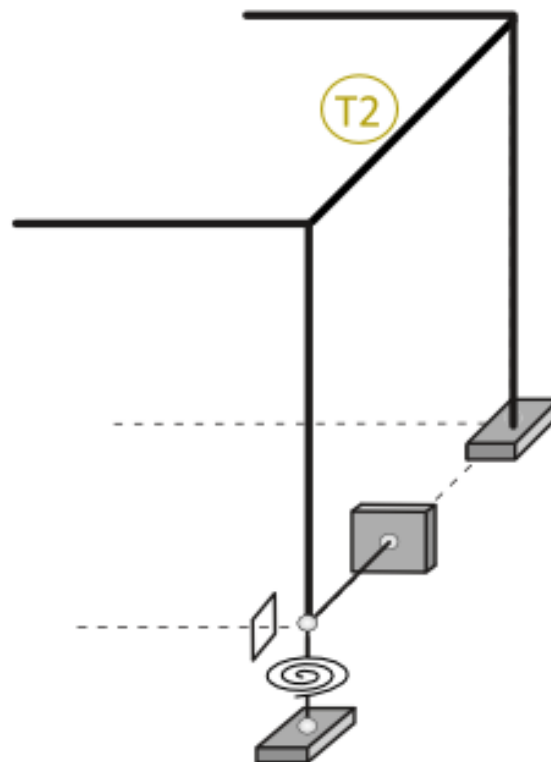
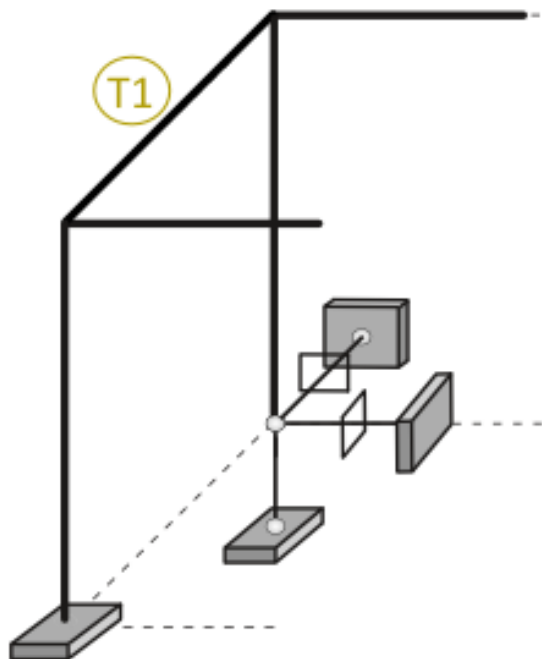
Ramy przestrzenne - przykład

P1: Określ stopień statycznej niewyznaczalności ramy przestrzennej



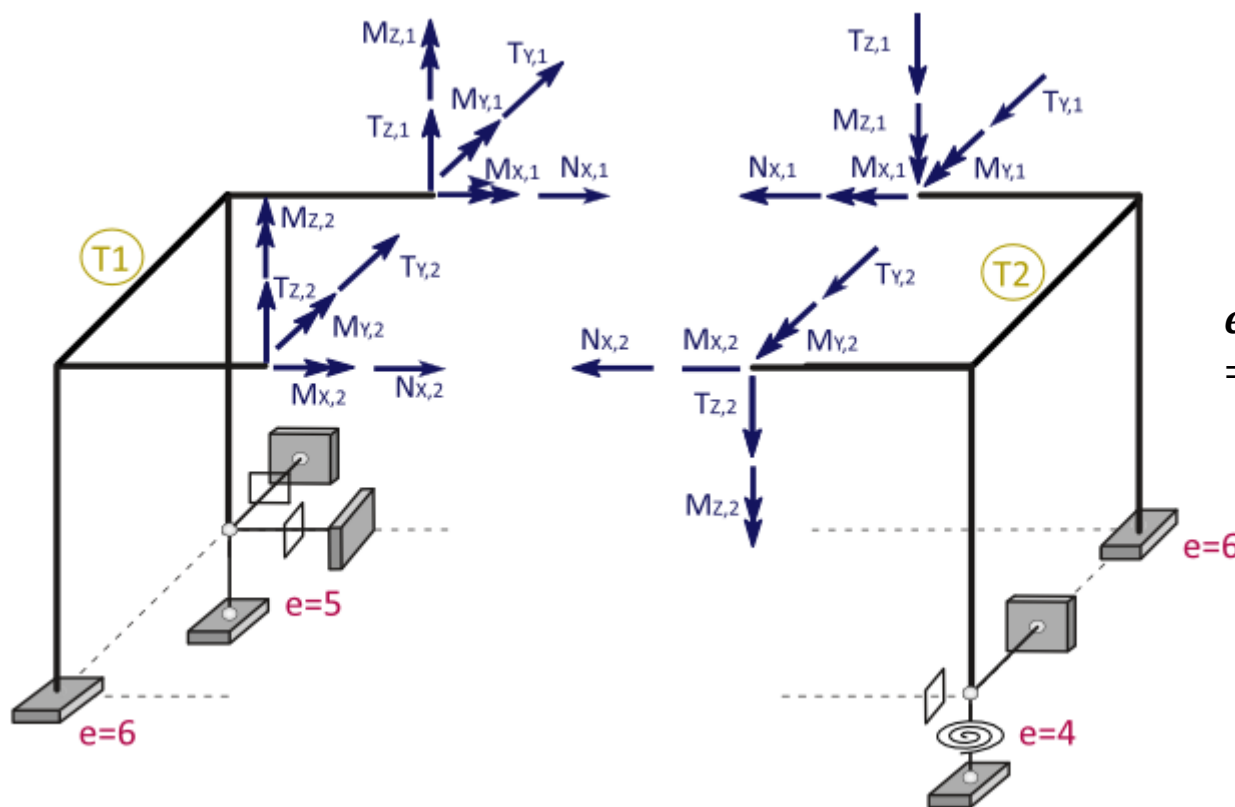
$$n_h = e - 6t$$

Ramy przestrzenne - przykład





Ramy przestrzenne - przykład



$$n_h = e - 6t$$

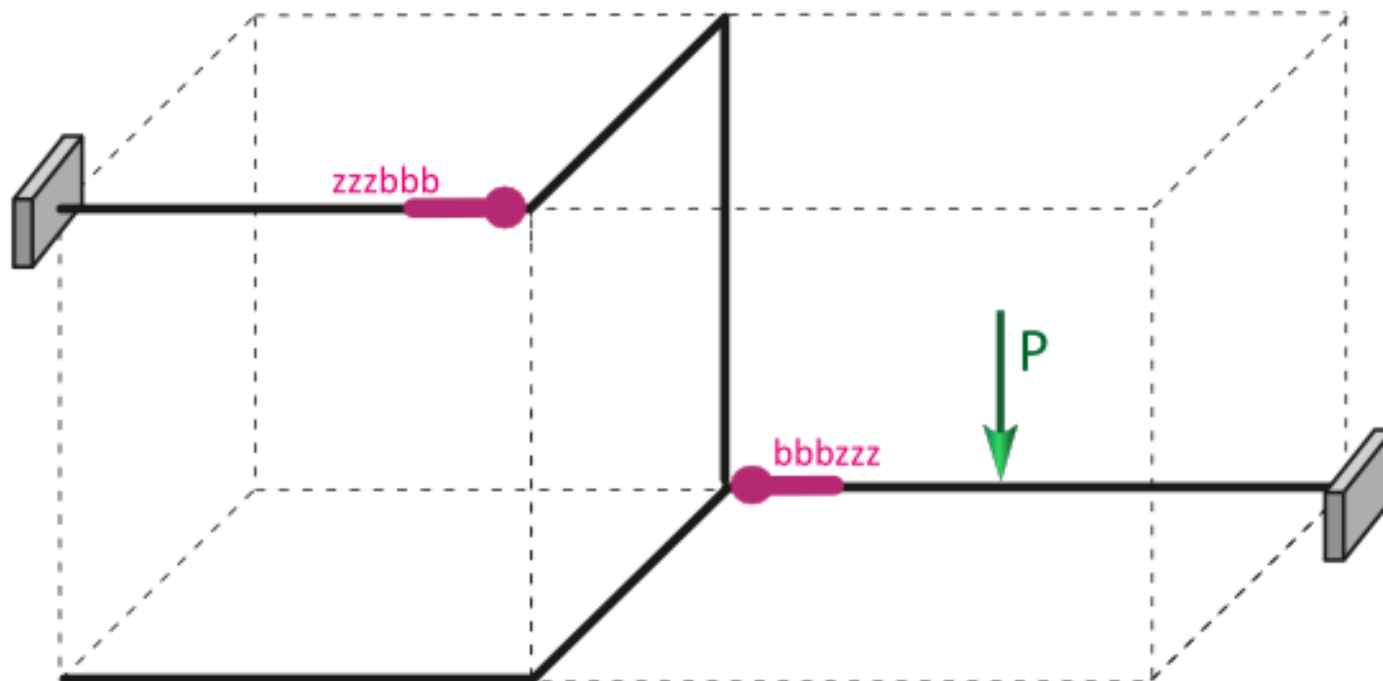
$$e = 6 + 5 + 6 + 4 + 6 + 6 = 33$$

$$t = 2$$

$$n_h = 33 - 6 \times 2 = 21$$

Ramy przestrzenne - przykład

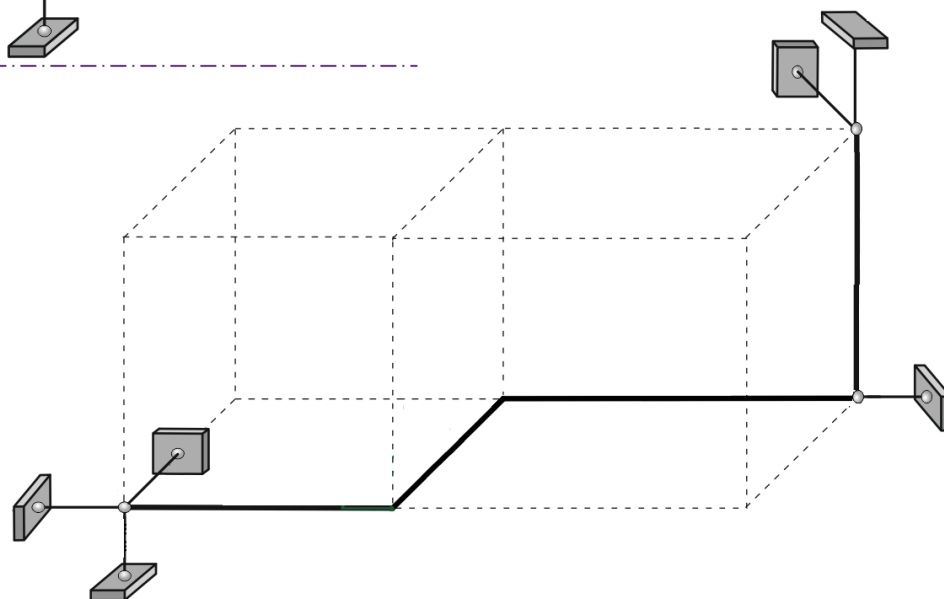
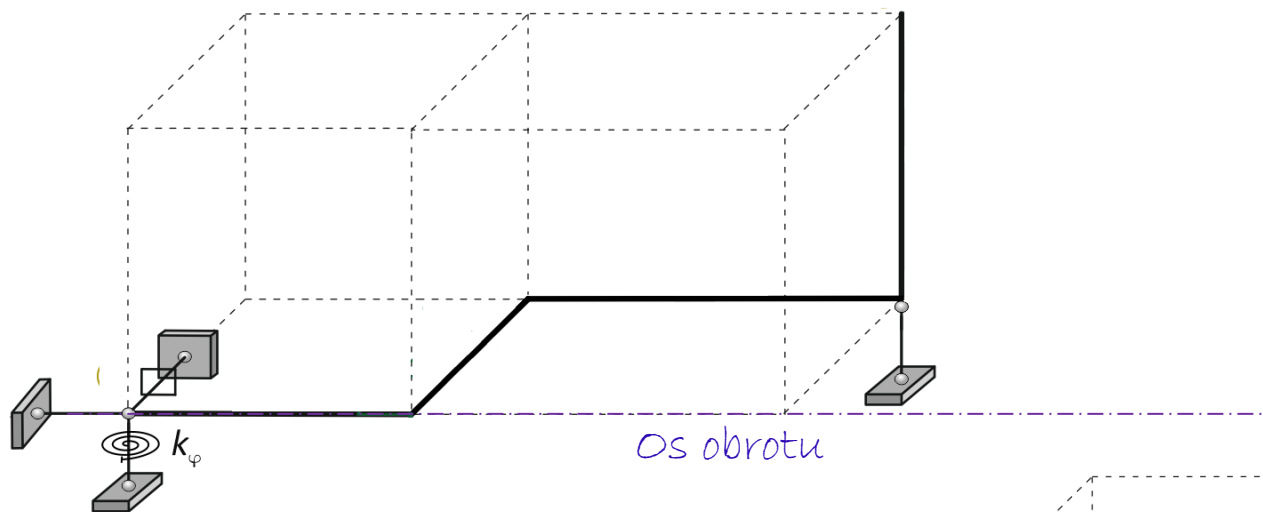
Przykład: Oblicz stopień statycznej niewyznaczalności ramy przestrzennej





3. Statyczna wyznaczalność i geometryczna niezmiennosć ram przestrzennych

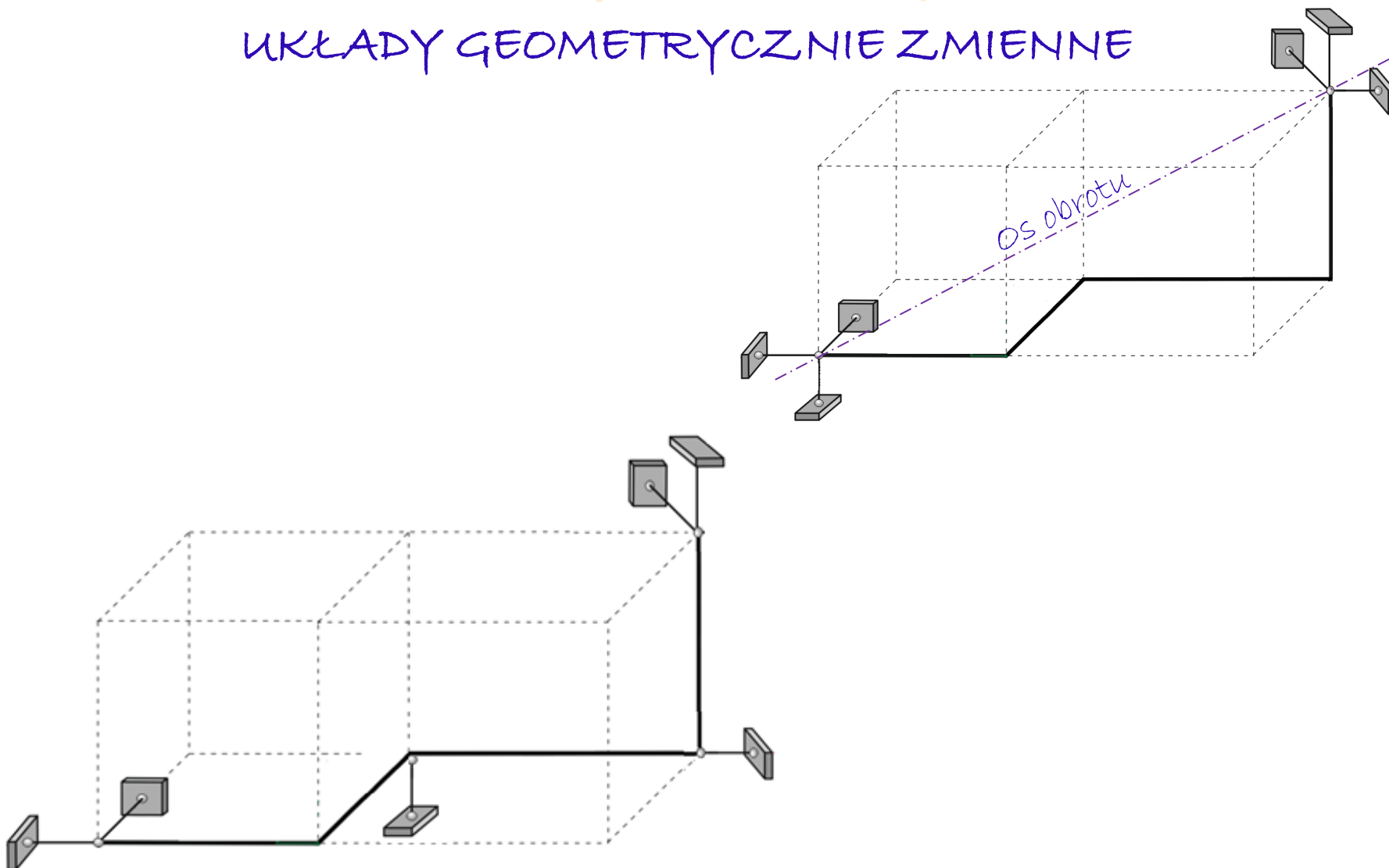
UKŁADY GEOMETRYCZNIE NIEZMIENNE





3. Statyczna wyznaczalność i geometryczna niezmiennosć ram przestrzennych

UKŁADY GEOMETRYCZNIE ZMIENNE



3. Statyczna wyznaczalność i geometryczna niezmiennność ram przestrzennych

Możemy również zapisać komplet niezależnych równań równowagi statycznej (liczba równań powinna odpowiadać liczbie więzi elementarnych e)

$$Kq=F$$

i sprawdzić czy wyznacznik macierzy współczynników jest różny od zera

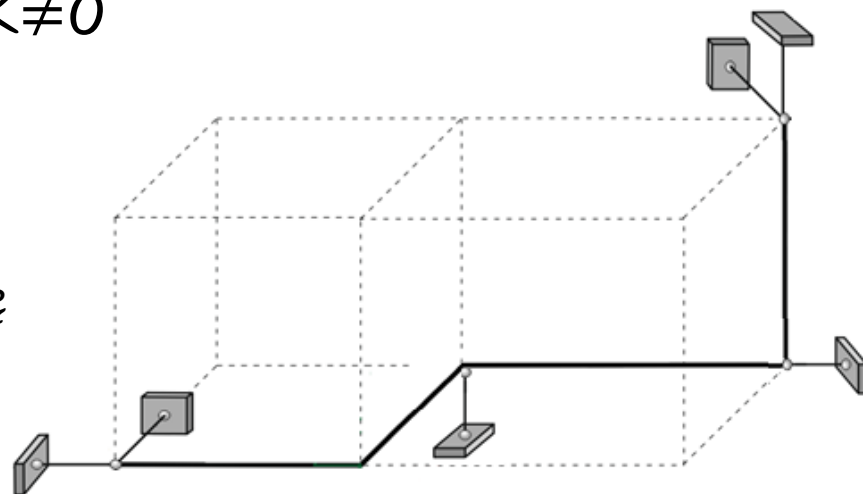
$$\det K \neq 0$$

gdzie:

K - macierz sztywności

q - wektor przemieszczeń

F - wektor zawierający informację o położeniu obciążeń



Macierz sztywności K musi być nieosobliwa i jest to jednocześnie warunek geometrycznej niezmienności konstrukcji!

4. Obliczanie przemieszczeń

- Metody rozwiązywania przestrzennych układów prętowych:
 - równania równowagi dla układów SW czyli $e-6t=0$,
 - Metoda Sił (MS) dla układów SN czyli $e-6t>0$.

Wyznaczamy wartości reakcji w układach SW oraz wartości sił hiperstatycznych i reakcji w układach SN

- W układach przestrzennych:
 - występuje 6 rodzajów sił wewnętrznych:

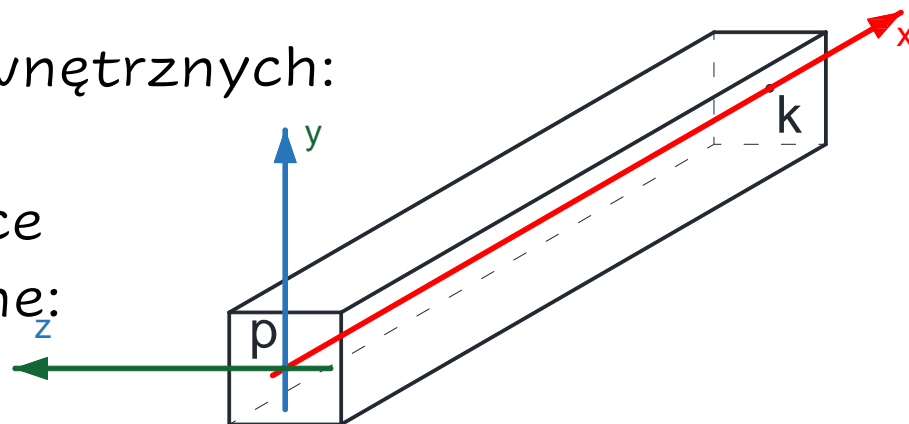
$M_x, M_y, M_z, N_x, V_y, V_z$

- pręt musi posiadać następujące charakterystyki geometryczne:

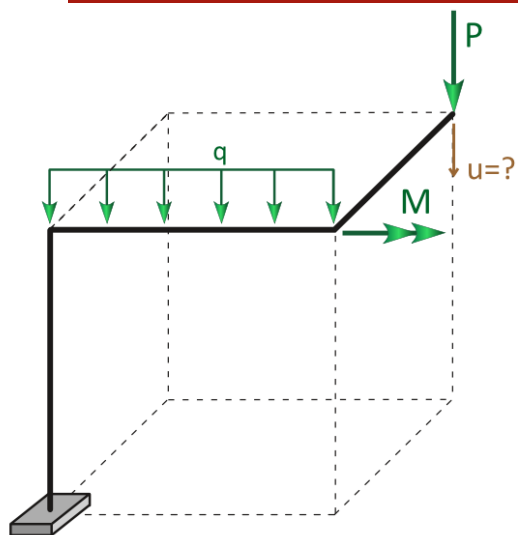
$I_s = I_x, I_y, I_z, A_x=A_y=A_z=A, k$

- pręt musi posiadać następujące charakterystyki materiałowe:

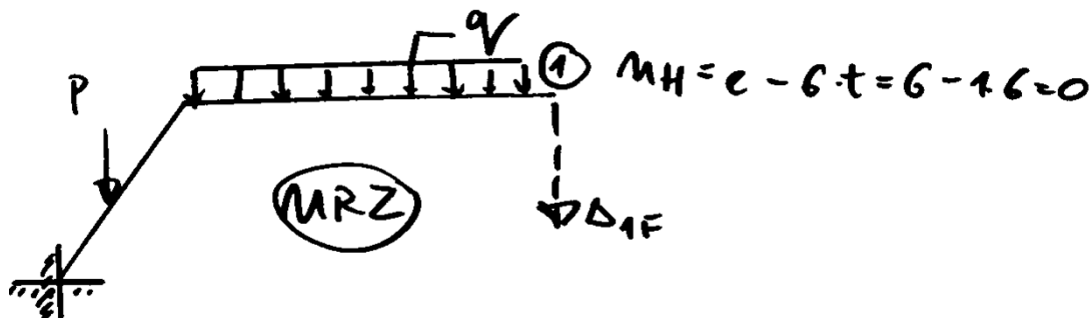
E, G, ν



4. Obliczanie przemieszczeń



Algorytm wyznaczania przemieszczeń w statycznie wyznaczalnych układach przestrzennych od obciążeń mechanicznych



Wzór na wyznaczanie przemieszczeń od obciążeń mechanicznych

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{EI_z} \cdot dx +$$

$$+ \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot Vy^i \cdot Vy^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

Z reguły pomija się wpływ odkształcalności postaciowej, a często także wpływ odkształcalności osiowej. Przemieszczenia elementarne oblicza się wg wzoru (po pominięciu tych wpływów).

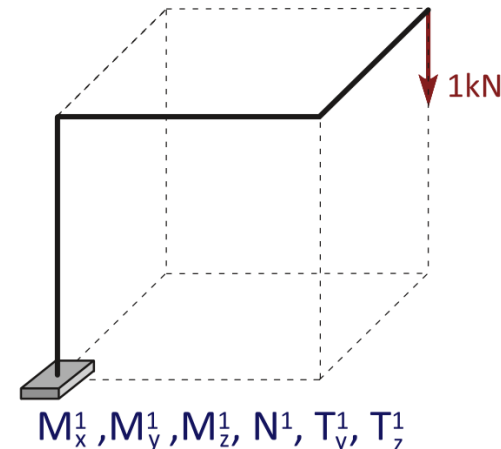
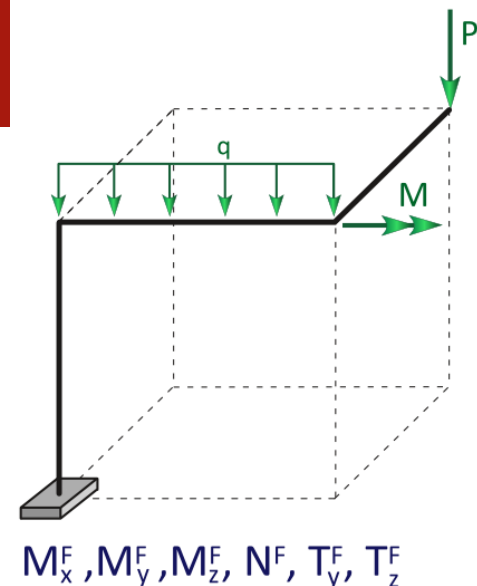


4. Obliczanie przemieszczeń

KROK 1. Wyznaczenie sił wewnętrznych (wykresów) od obciążenia danego

KROK 2. Wyznaczenie sił wewnętrznych (wykresów) od obciążenia jednostkowego na kierunku szukanego przemieszczenia

KROK 3. Zastosowanie II ZPP



$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EI_y} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{EI_z} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

4. Obliczanie przemieszczeń

Bezwymiarowe współczynniki κ uwzględniają wpływ nierównomierności rozkładu naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym pręta.

Wartość współczynnika κ dobierana jest tak, aby uzyskać zastępczą, reprezentatywną wartość naprężenia stycznego, która pozwoli otrzymać prawidłową wartość kąta odkształcenia postaciowego.

Wykorzystując podejście energetyczne można wyprowadzić następujące zależności:

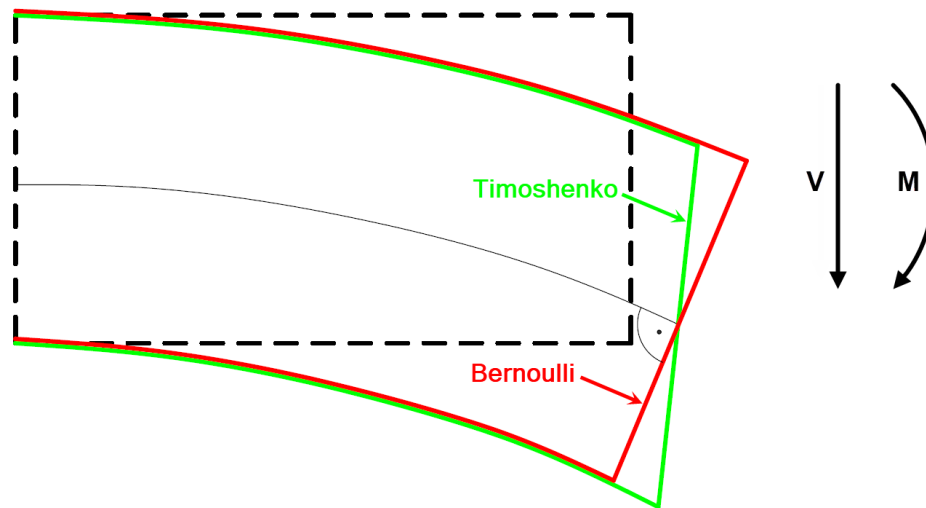
$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{\bar{S}_z^2(y)}{b^2(y)} dA$$

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{\bar{S}_y^2(z)}{b^2(y)} dA$$

\bar{S}_z, \bar{S}_y - moment statyczny odciętej części przekroju obliczany względem osi y i z

5. BELKA TIMOSHENKI

Udział sił tnących staje się istotny w przypadku elementów krępych oraz prętów charakteryzujących się dużą podatnością na ścinanie, czyli małą sztywnością postaciową rozumianą jako iloczyn GA_v , a więc na przykład prętów wielogałęziowych połączonych przewiązkami lub skratowaniem czy blachownic o cienkich środnikach. Belki, w których uwzględniamy wpływ odkształcalności postaciowej określamy mianem belek Timoshenki – w odróżnieniu od klasycznych belek Eulera – Bernoulliego.



5. BELKA TIMOSHENKI

BELKA TIMOSHENKI

- równanie różniczkowe osi odkształconej:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y} - \kappa_z \frac{p_z(x)}{GA}$$

- maksymalne ugięcie belki swobodnie podpartej obciążonej siłą skupioną przyłożoną w środku rozpiętości z uwzględnieniem sił tnących wynosi:

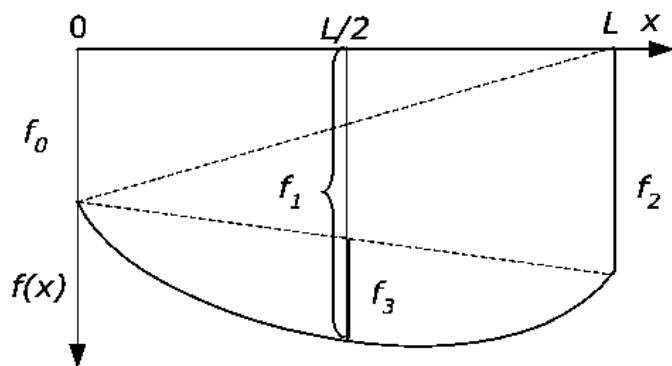
$$f_{max} = \frac{PL^3}{48EI_y} \left[1 + \frac{12\kappa_z EI_y}{L^2 GA} \right]$$

- Jeśli założymy, że przekrój poprzeczny belki jest prostokątny, to otrzymamy:

$$f_{max} = \frac{PL^3}{48EI_y} \left[1 + \frac{14,4E}{G} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]$$

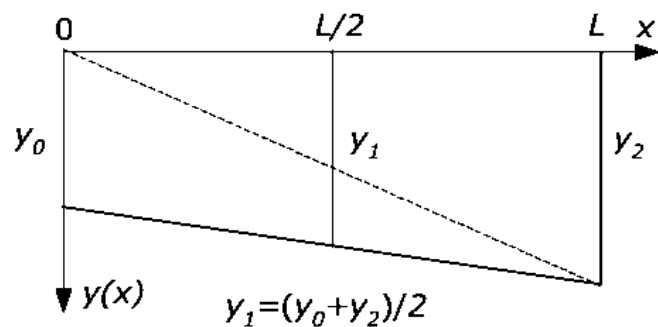
CAŁKOWANIE WYKRESÓW

Funkcje $f(x)$ rozkłada się na sumę dwóch trójkątów oraz parabolę, której pole równa się $2/3$ pola otaczającego $f(x)$ prostokąta. Przedstawimy to w sposób wykresny i skorzystamy ze wzoru Wereszczagina.



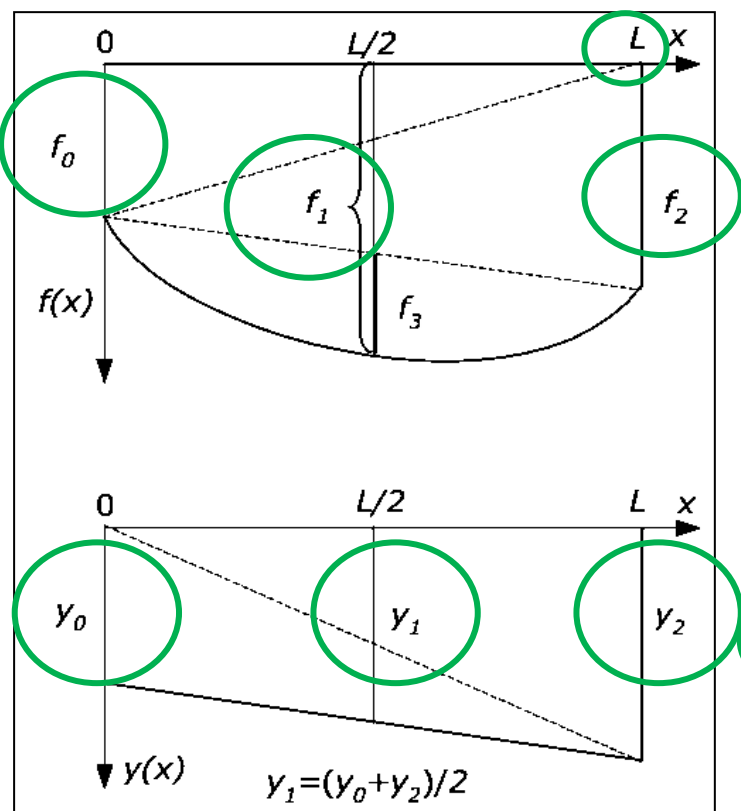
wzór Wereszczagina

$$\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \Omega_F \cdot f(x_{0F})$$



CAŁKOWANIE WYKRESÓW

Funkcje $f(x)$ rozkłada się na sumę dwóch trójkątów oraz parabolę, której pole równa się $2/3$ pola otaczającego $f(x)$ prostokąta. Przedstawimy to w sposób wykresny i skorzystamy ze wzoru Wereszczagina.



Wzór na obliczenie całki dwóch
wzór Simpsona

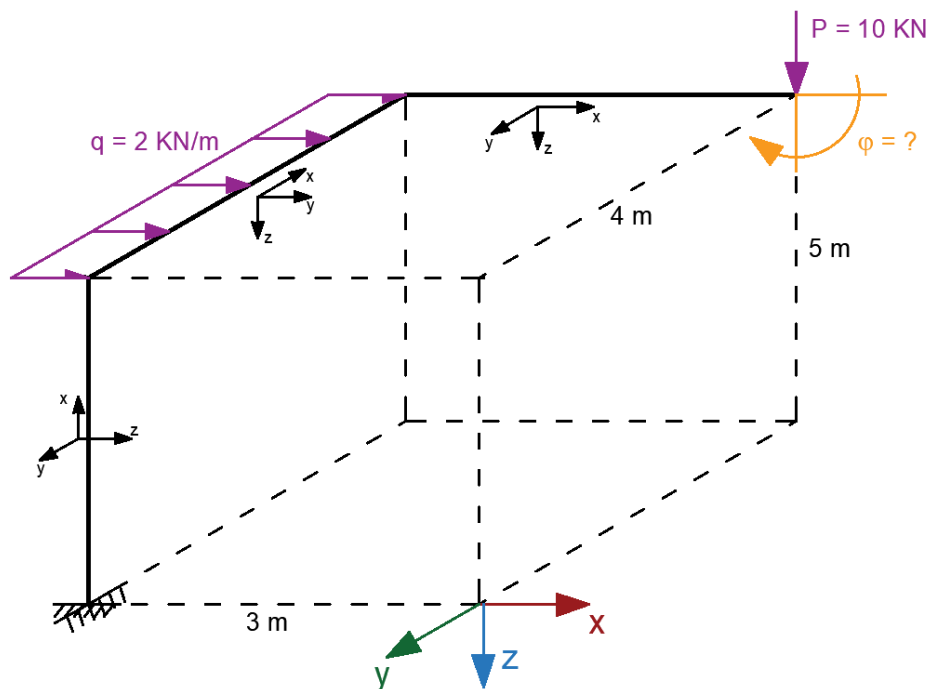
$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \cdot y(x) dx &= \int_0^L (f_0 \nabla) y(x) dx + \int_0^L (\nabla f_2) y(x) dx + \int_0^L (\nabla f_3) y(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot L \cdot f_0 \cdot \left(\frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_0 \right) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot f_2 \cdot \left(\frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_0 \right) + \frac{2}{3} \cdot L \cdot f_3 \cdot y_1 = \\ &= \frac{L}{6} (f_0 \cdot y_0 + 4 \cdot f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2) \end{aligned}$$

6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Obliczyć wartość obrotu we wskazanym węźle.

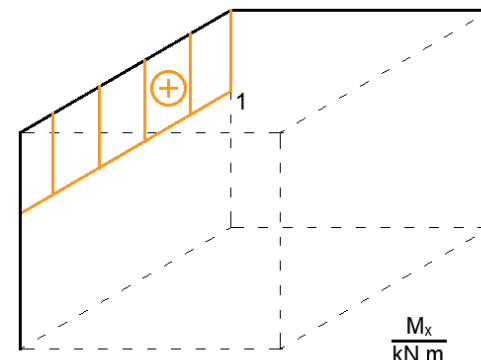
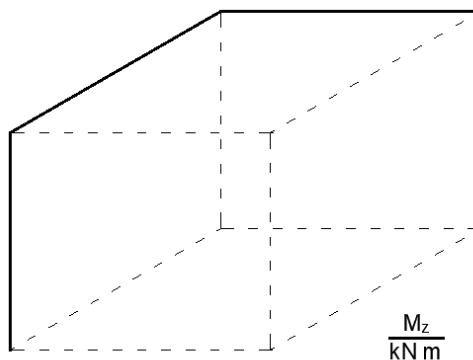
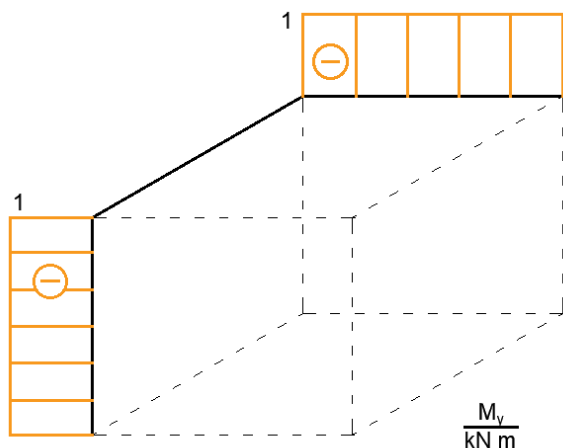
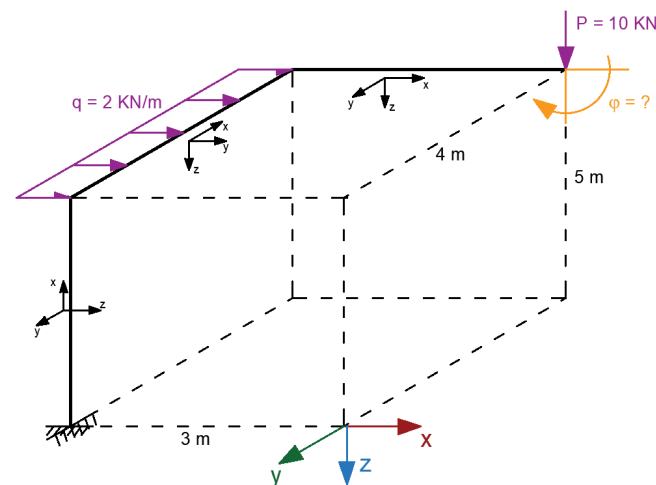
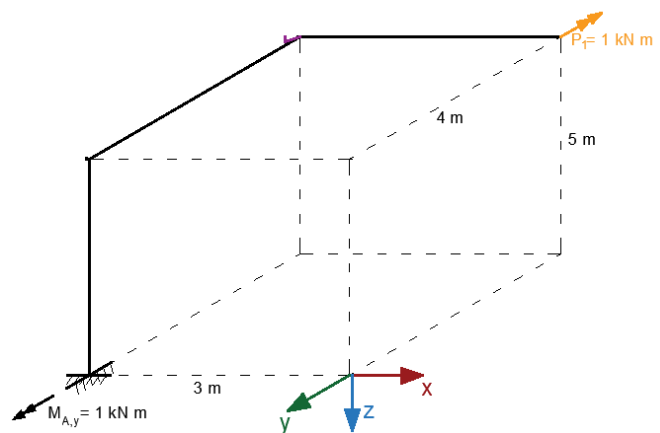
Przyjęto przekrój kołowy o $GI_x = 0,769 EI_y = 0,769 EI_z$

1. Rozwiązanie układu przestrzennego od obciążenia danego (wyniki otrzymane w zadaniu rozwiązywanym na poprzednim wykładzie)



6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

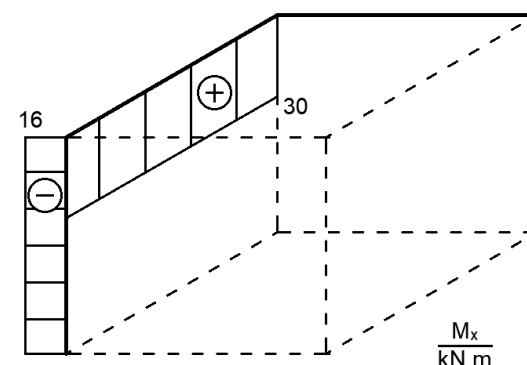
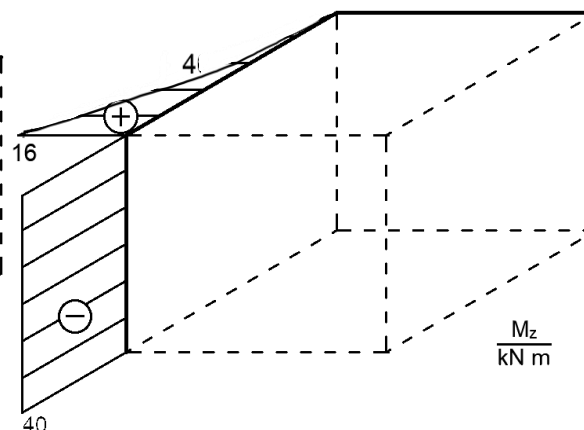
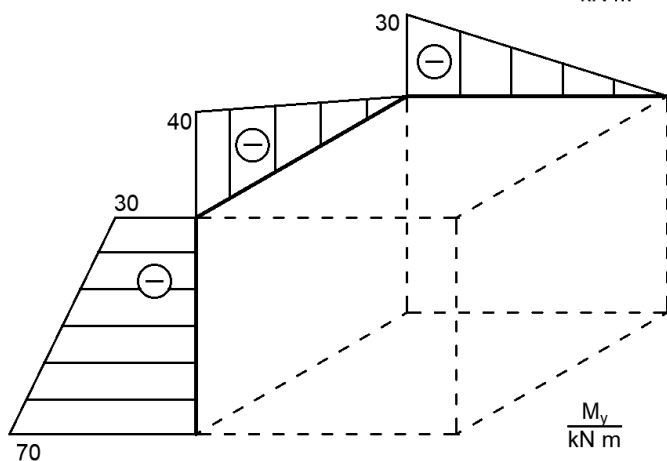
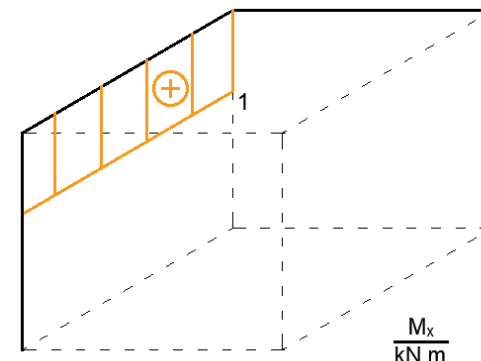
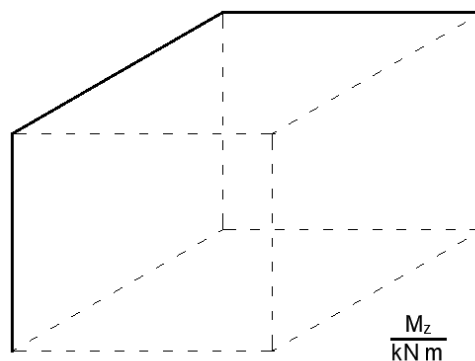
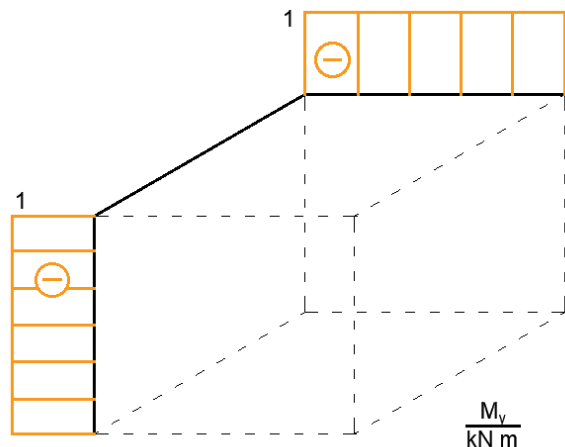
2. Rozwiązanie układu przestrzennego od siły jednostkowej na kierunku szukanego przemieszczenia





6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

3. Obliczenie szukanego przemieszczenia



$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{El_y} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{El_z} \cdot dx$$