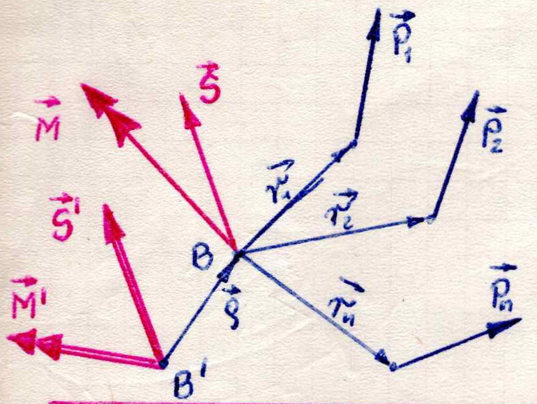
2.5. REDUKCJA UKŁADU SIŁ DO PUNKTU (układu wektorów)



Dany jest przestrzenny układ sił $\vec{P}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ oraz punktu B (bieguna)

<u>Siłą ogólną</u> (główną, zredukowaną) układu zredukowanego do punktu B nazywamy sumę wektorową sił $\vec{P}_i$, działającą na osi przechodzącej przez punkt B.

(suma układu)

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$$

<u>Momentem ogólnym</u> (głównym, zredukowanym) układu zredukowanego do punktu B nazywamy sumę wektorową momentów sił $\vec{P}_i$ względem bieguna B. (moment układu)

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{P}_i) = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{P}_n$$

Jeżeli $\vec{P}_i = P_{ix} i + P_{iy} j + P_{iz} k$; $\vec{r}_i = r_{ix} i + r_{iy} j + r_{iz} k$ to

$$\vec{S} = \sum_i (P_{ix} i + P_{iy} j + P_{iz} k) = \left(\sum_i P_{ix}\right) i + \left(\sum_i P_{iy}\right) j + \left(\sum P_{iz}\right) k =$$

$$= S_x i + S_y j + S_z k$$

$$\vec{M} = \sum_i \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ P_{ix} & P_{iy} & P_{iz} \end{vmatrix} = \sum_i \begin{vmatrix} r_{iy} & r_{iz} \\ P_{iy} & P_{iz} \end{vmatrix} i + \sum_i \begin{vmatrix} r_{iz} & r_{ix} \\ P_{iz} & P_{ix} \end{vmatrix} j + \sum \begin{vmatrix} r_{ix} & r_{iy} \\ P_{ix} & P_{iy} \end{vmatrix} k =$$

$$= M_x i + M_y j + M_z k$$

Jeżeli obierzemy nowy biegun B' taki, że $\overrightarrow{B'B} = \vec{\rho}$, to z definicji siły ogólnej wynika, że

$$\vec{S}' = S_x i + S_y j + S_z k$$

Zmiana bieguna redukcji powoduje jedynie zmianę osi działania siły ogólnej, nie zmieniając jej współrzędnych.

Moment ogólny układu wynosi

$$\underline{\vec{M}'} = \sum_i (\vec{\rho} + \vec{r}_i) \times \vec{P}_i = \vec{\rho} \times \sum \vec{P}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \underline{\vec{\rho} \times \vec{S} + \vec{M}}$$

Zmiana bieguna redukcji powoduje zmianę momentu ogólnego równą momentowi pierwotnej siły ogólnej (sumy układu) względem nowego bieguna

Lub inaczej: Jeżeli zmienimy biegun (punkt), względem którego wyznaczamy ogólny moment układu, wówczas moment ten zmienia się o moment siły ogólnej zaczepionej w poprzednim biegunie względem nowego bieguna.

Wnioski:

1) Jeżeli siła ogólna układu = 0 ($\vec{S}=0$), to moment ogólny układu jest ustalony, niezależnie od położenia bieguna redukcji. Wektor momentu ogólnego jest wektorem swobodnym (por. zagadn. pary)
(bo jeśli $\vec{S}=0$ to $\vec{\rho}\times\vec{S}=0$ czyli $\vec{M}'=\vec{M}$)

2) Jeżeli zmiana położenia bieguna redukcji następuje wzdłuż linii działania siły ogólnej ($\vec{\rho} \parallel \vec{S}$), to moment ogólny nie zmienia się (współrzędne momentu są stałe)
(bo jeśli $\vec{\rho} \parallel \vec{S}$ to $\vec{\rho}\times\vec{S}=0$)

3) Iloczyn skalarowy momentu ogólnego i siły ogólnej jest niezmiennikiem układu (nie zależy od położenia bieguna redukcji)

$$\vec{M}'\cdot\vec{S}' = (\vec{\rho}\times\vec{S}+\vec{M})\cdot\vec{S}' = (\vec{\rho}\times\vec{S})\cdot\vec{S}' + \vec{M}\cdot\vec{S}' = \vec{M}\cdot\vec{S}$$

bo $\vec{S}\perp\vec{\rho}\times\vec{S}$ czyli $(\vec{\rho}\times\vec{S})\cdot\vec{S}=0$ $\quad(\vec{S}=\vec{S}')$

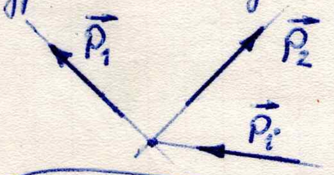
Iloczyn ten nazywamy **wyróżnikiem układu** (parametr układu)

$$w = \vec{M}\cdot\vec{S} = M_x S_x + M_y S_y + M_z S_z = \text{constans}$$

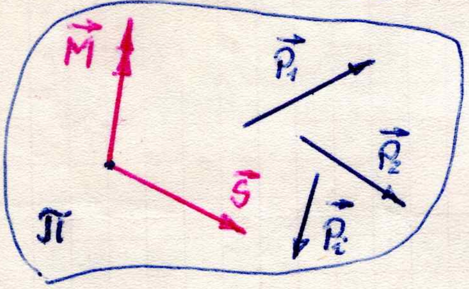
Interpretacja geometryczna:

Rzut momentu na kierunek siły ogólnej jest wielkością stałą!

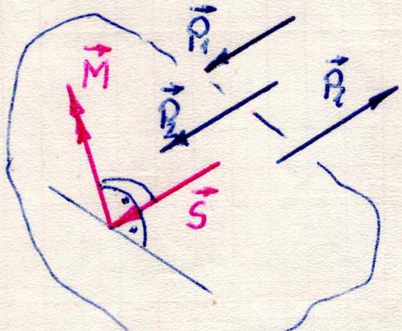
Przypadki szczególne:



a) Wyróżnik układu zbieżnego jest równy zeru. Wniosek jest oczywisty, jeżeli biegun redukcji obierzemy w środku zbieżności ($\vec{M}=0$)

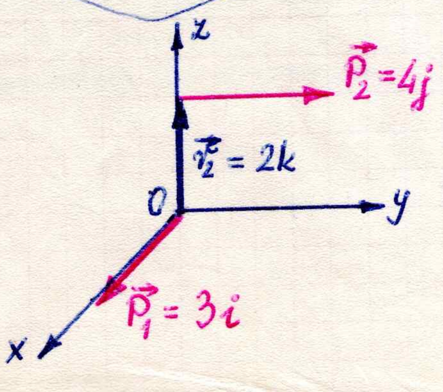


b) Wyróżnik układu płaskiego jest równy zeru. Wniosek ten wynika z faktu, że w układzie płaskim $\vec{M}\perp\vec{S}$ (bo siły leżą w płaszczyźnie a $\vec{M}$ jest do niej $\perp$)



c) Wyróżnik układu sił równoległych (przestrzennych) jest równy zeru. Wniosek ten wynika z faktu, że wektor momentu ogólnego musi leżeć w płaszczyźnie $\perp \vec{S}$, a więc $\vec{M}\perp\vec{S}$

d) Najprostszym przykładem układu o niezerowym wyróżniku jest układ dwóch sił działających na nierównoległych i nieprzecinających się (wichrowatych) liniach działania



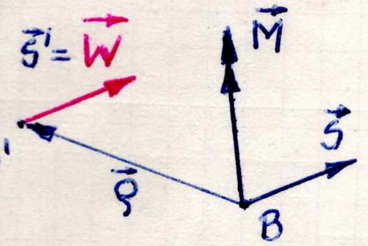
$$S = \vec{P}_1+\vec{P}_2 = 3i+4j$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8i$$

$$\vec{M}\cdot\vec{S} = -8\cdot 3 = -24 \neq 0$$

Jeżeli wyróżnik układu jest równy zeru ($w=0$), a siła ogólna układu jest różna od zera ($\vec{S}\neq 0$), to istnieje taki biegun redukcji (a więc także taka lokalizacja siły ogólnej), że moment ogólny układu jest równy zeru.

Siła ogólna układu tak zlokalizowana, że towarzyszący jej moment ogólny jest równy zeru, nazywa się <u>wypadkową układu</u>.



Dane: $\vec{S}$, $\vec{M}$, $w=\vec{M}\cdot\vec{S}=0$, B

Poszukiwany $\vec{\rho}=\overrightarrow{BB'}$ taki, że $\vec{M}'=0$ i wtedy

$$\vec{S}'=\vec{W}$$

$$\vec{M}'=\vec{M}+(-\vec{\rho})\times\vec{S}=0 \rightarrow \vec{\rho}\times\vec{S}=\vec{M}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(1) & S_z\rho_y - S_y\rho_z & = M_x \\
(2) & -S_z\rho_x + S_x\rho_z & = M_y \\
(3) & S_y\rho_x - S_x\rho_y & = M_z
\end{array}\right\}$$

Równanie te są nieoznaczone i mają ∞ wiele rozwiązań, istnieje bowiem ∞ wiele punktów B' leżących na prostej równoległej do $\vec{S}$.

Jeżeli $S_z\neq 0$, można założyć $\rho_z=0$ i wykorzystać (1) i (2)

$$\rho_y = M_x/S_z \quad , \quad \rho_x = -M_y/S_y$$

Jeżeli $S_y\neq 0$, można założyć $\rho_y=0$ i wykorzystać (1) i (3)

$$\rho_z=-M_x/S_y \quad , \quad \rho_x = M_z/S_y$$

Jeżeli $S_x\neq 0$, można założyć $\rho_x=0$ i wykorzystać (2) i (3)

$$\rho_z = M_y/S_x \quad , \quad \rho_y = -M_z/S_x$$

W każdym przypadku niewykorzystane równanie jest spełnione tożsamościowo!

Zestawienie wyników (przypadków)

Siła ogólna	Moment ogólny	Wyróżnik	Efekt redukcji
$\vec{S}\neq 0$	$\vec{M}\neq 0$	$w\neq 0$	Istnieje siła ogólna i moment ogólny (wektor i para lub dwie siły skośne)
$\vec{S}\neq 0$	$\vec{M}\neq 0$	$w=0$	Układ sprowadza się do wypadkowej
	$\vec{M}=0$		Wypadkowa $\vec{W}=\vec{S}$
$\vec{S}=0$	$\vec{M}\neq 0$		Układ sprowadza się do momentu pary
	$\vec{M}=0$		0

UKŁADY RÓWNOWAŻNE, RÓWNOWAŻĄCE I ZRÓWNOWAŻONE

1. RÓWNOWAŻNE

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakową siłę ogólną i jednakowy moment ogólny to są równoważne.

- Układy równoważne mają jednakowy wyróżnik (ale nie odwrotnie!)

2. RÓWNOWAŻĄCE SIĘ

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakowe co do modułu, ale odwrotnie skierowane siły ogólne oraz jednakowe co do modułu, ale odwrotnie skierowane momenty ogólne, to układy te są równoważące się.

- Układy równoważące się mają jednakowe wyróżniki.

3. ZRÓWNOWAŻONE !

Jeżeli układ sił zredukowany do dowolnego bieguna ma siłę ogólną równą zeru i moment ogólny równy zeru, to taki układ nazywamy równoważnym zeru, czyli zrównoważonym. (jest w równowadze).

- Dwa równoważące się układy tworzą razem układ zrównoważony.
- Wyróżnik układu zrównoważonego jest równy zeru (odwrotnie nie)!