Politechnika Wrocławska

# MECHANIKA BUDOWLI

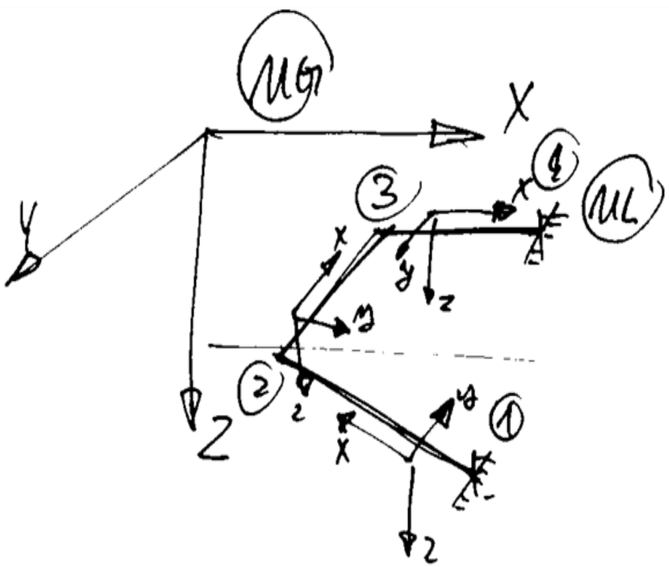
## ĆWICZENIA AUDYTORYJNE NR 2

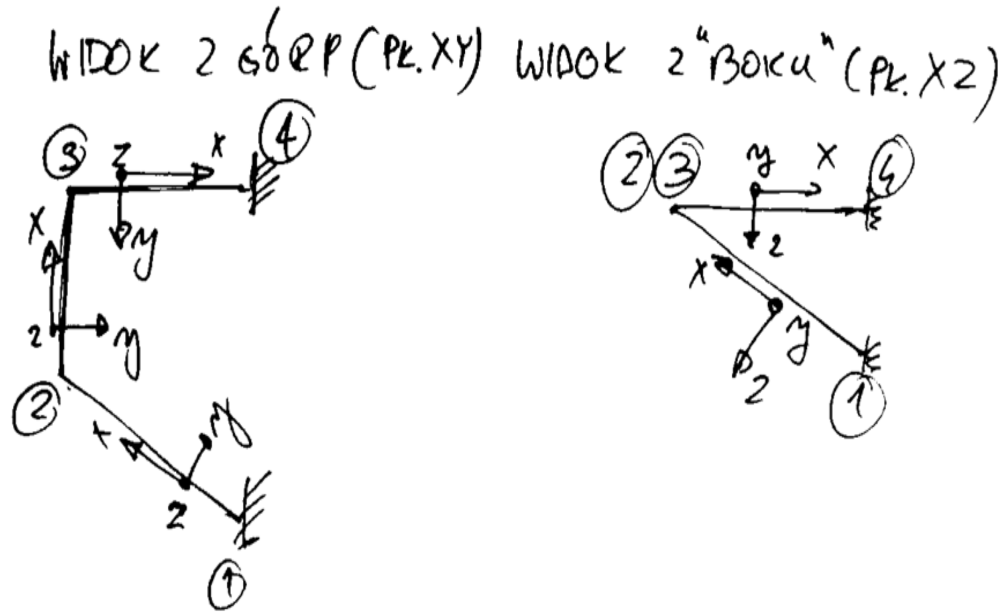
**Prowadząca: dr inż. Katarzyna Misiurek**

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

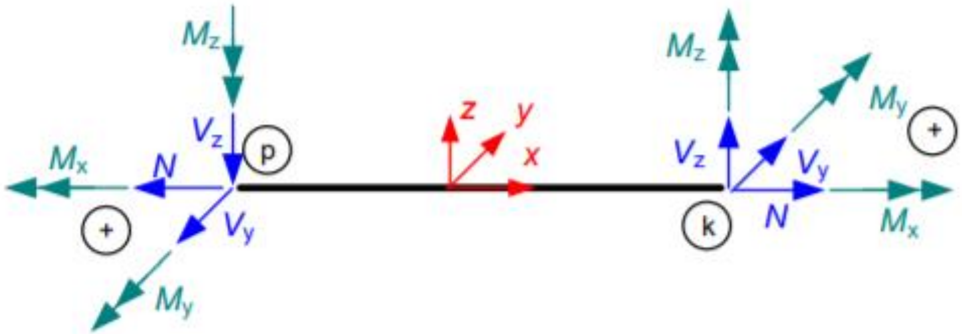
# UKŁADY PRZESTRZENNE – INFORMACJE PODSTAWOWE

**Układ globalny UG** jest jeden dla całej konstrukcji.
**Układ lokalnych UL** jest jeden dla każdego pojedynczego pręta.



# UKŁADY PRZESTRZENNE – INFORMACJE PODSTAWOWE




**Momenty zginające** odkładamy po stronie włókien rzeczywiście rozciąganych.

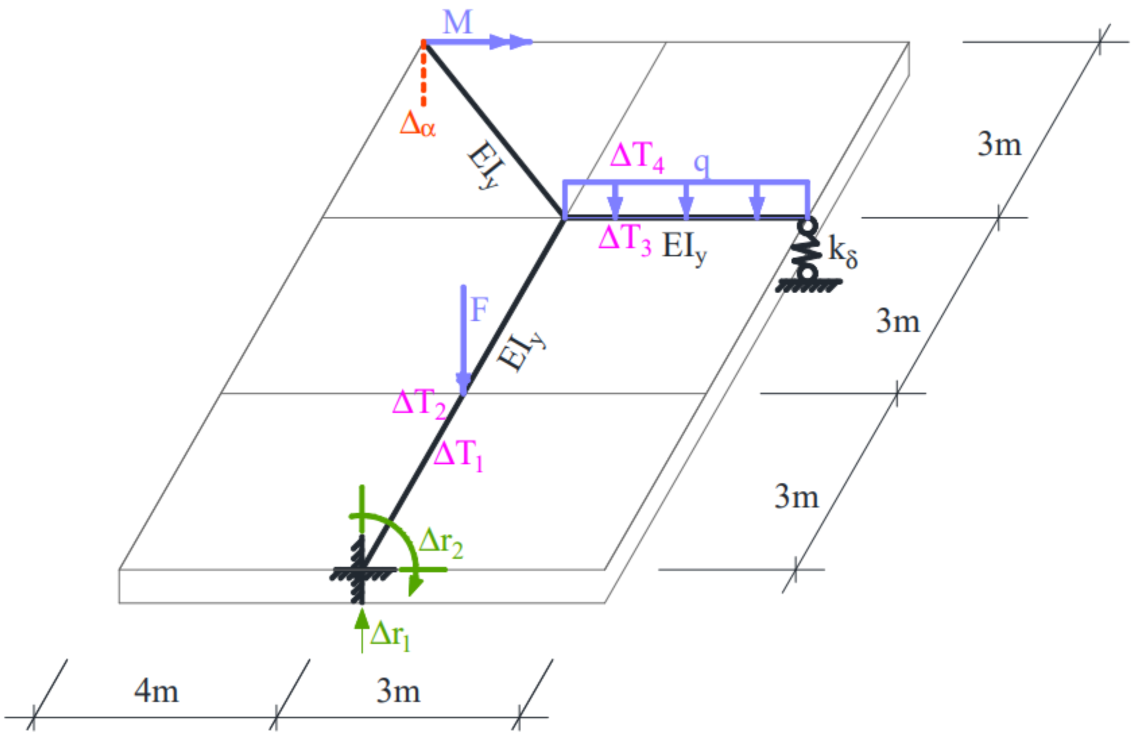
Momenty o wektorze w kierunku osi „y" oznaczmy jako $M_y$ i odkładamy w płaszczyźnie „xz", momenty o wektorze w kierunku osi „z" oznaczmy jako $M_z$ i odkładamy w płaszczyźnie „xy".

**Momenty skręcające** o wektorze w kierunku osi „x" oznaczmy jako $M_x$ i odkładamy w płaszczyźnie „xz" lub w płaszczyźnie „xy".

**Siły tnące** o wektorze w kierunku osi „y" oznaczmy jako $V_y$ i odkładamy w płaszczyźnie „xy", momenty o wektorze w kierunku osi „z" oznaczmy jako $V_z$ i odkładamy w płaszczyźnie „xz".

**Siły osiowe** o wektorze w kierunku osi „x" oznaczmy jako N i odkładamy w płaszczyźnie „xz" lub w płaszczyźnie „xy".

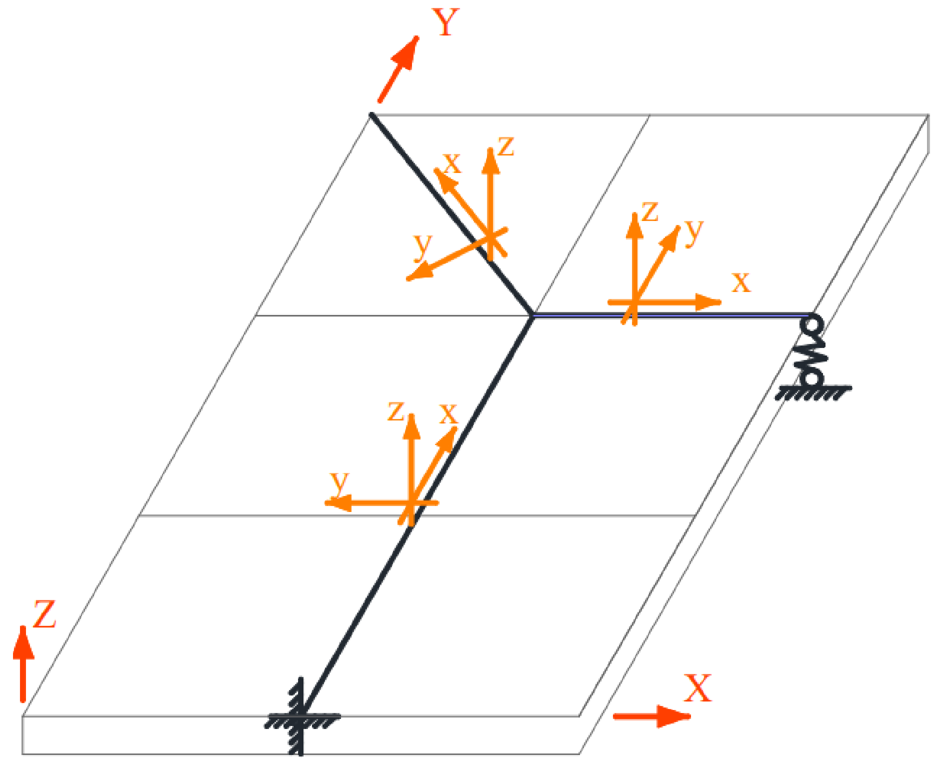
# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE




Rys. 1.1. Schemat statyczny

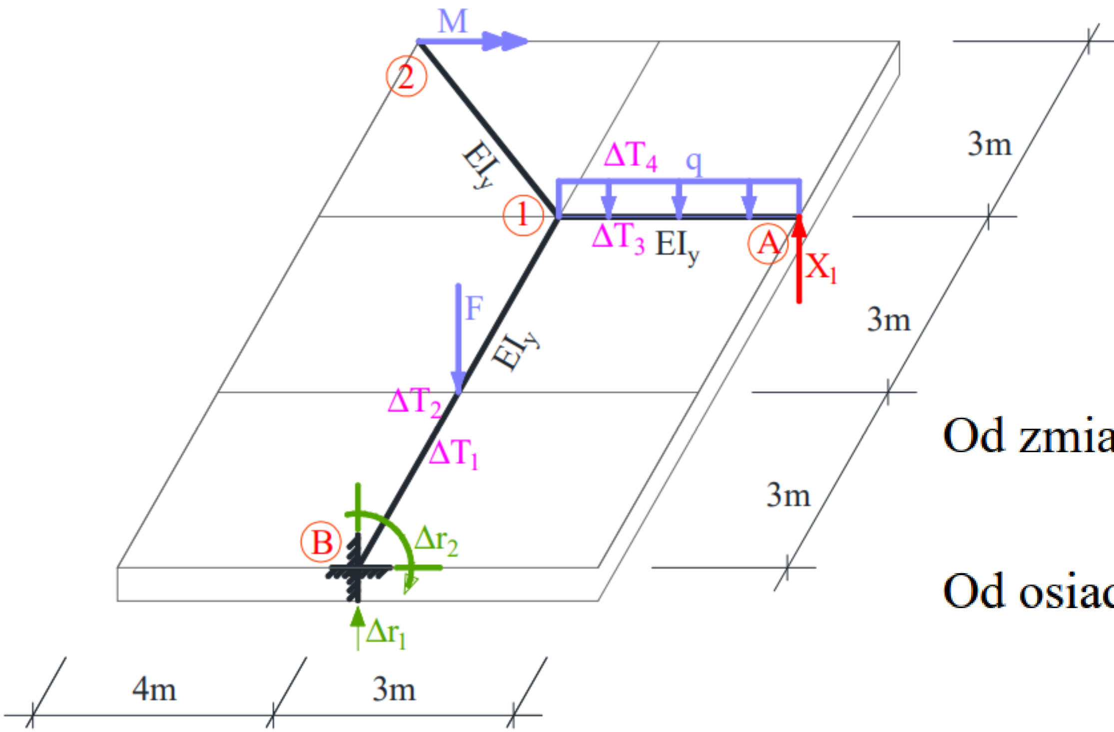
Dane do obliczeń: $F = 12$ kN; $q = 4$ kN/m; $M = 24$ kN m; $k_\delta = 8\ EI_y/m^3$; $\Delta T_1 = 20$ °C; $\Delta T_2 = -20$ °C; $\Delta T_3 = -15$ °C; $\Delta T_4 = 25$ °C; $\Delta r_2 = 0{,}03$ rad; $\Delta r_1 = 0{,}02$ m.

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE




Rys. 2.1. Globalny i lokalne układy współrzędnych oraz numeracja węzłów

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE




Od zmian temperatury: $\delta_{11} X_1^T + \delta_{1T} = -\dfrac{X_1^T}{k_\delta}$

Od osiadania podpory: $\delta_{11} X_1^\Delta + \delta_{1\Delta} = -\dfrac{X_1^\Delta}{k_\delta}$

Rys. 4.1. Układ podstawowy metody sił

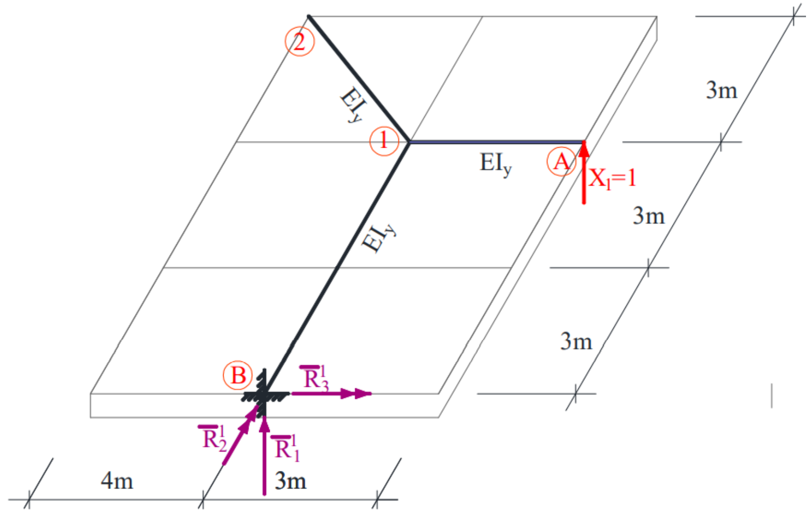
$$\delta_{iT} = \int \bar{M}_y^i \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} dx = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i}$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu temperatury w układzie podstawowym,

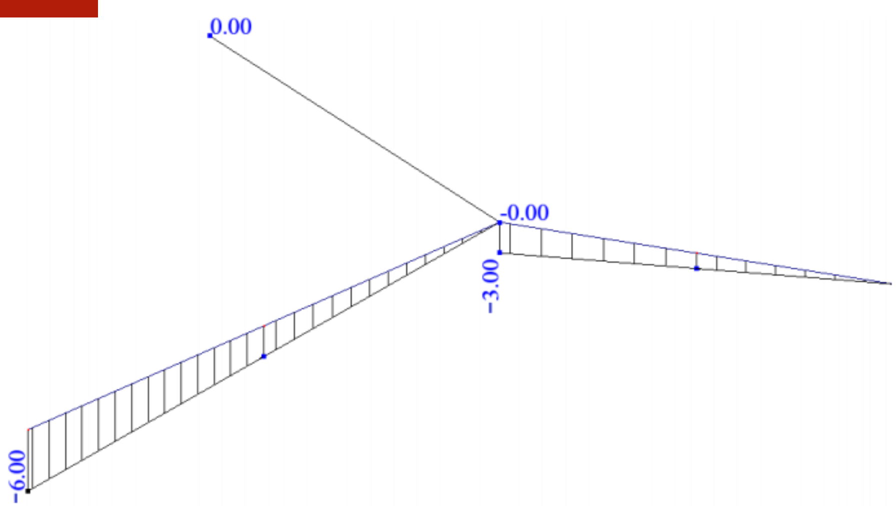
$$\delta_{i\Delta} = -\sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n$$

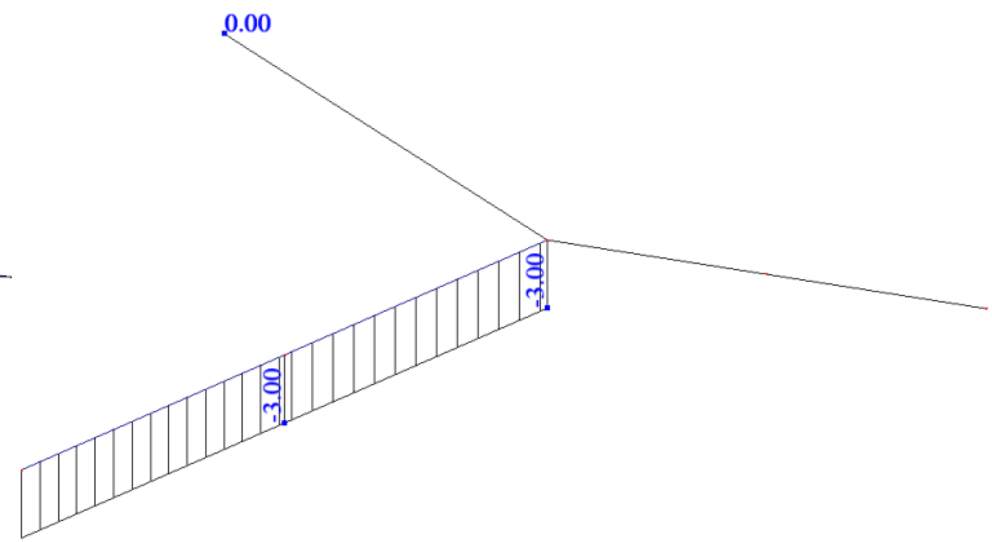
przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu osiadania podpór w układzie podstawowym

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE

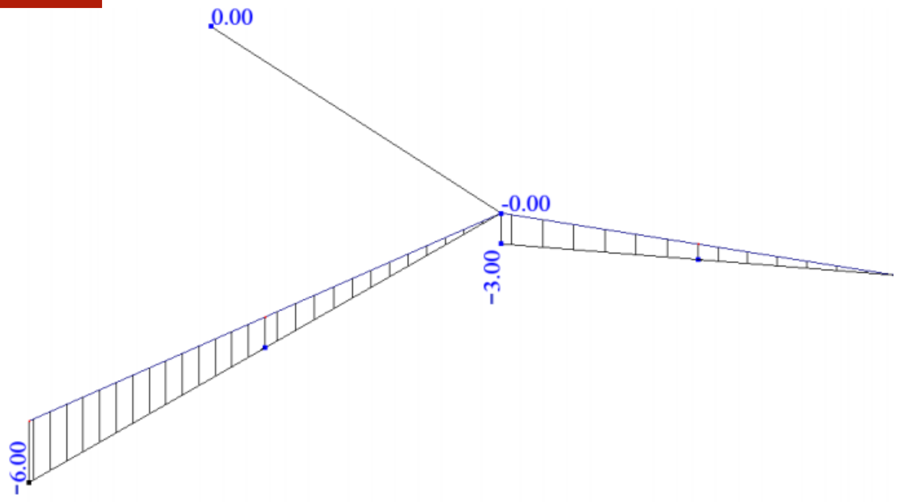


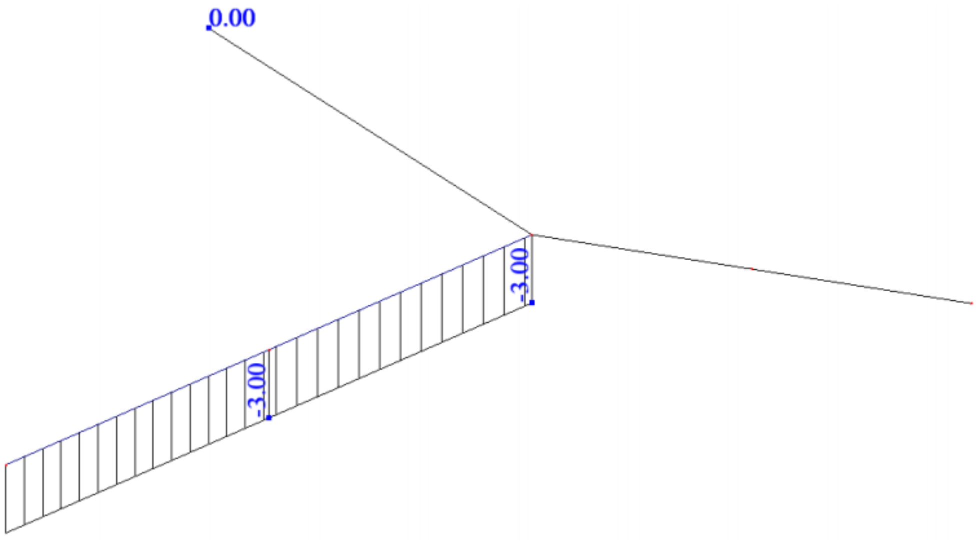

Rys. 7.2.1. Reakcje w układzie podstawowym od od $X_1$=1



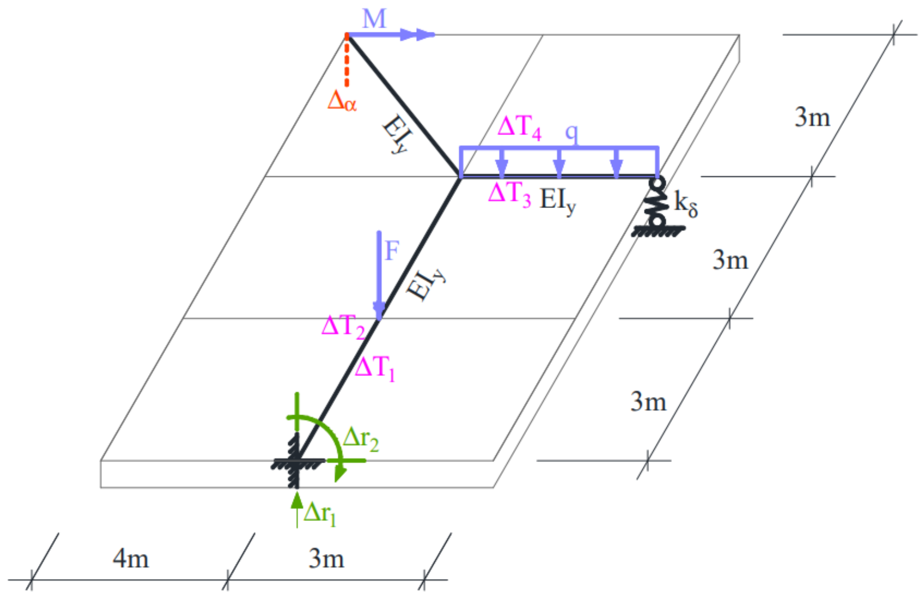
# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE



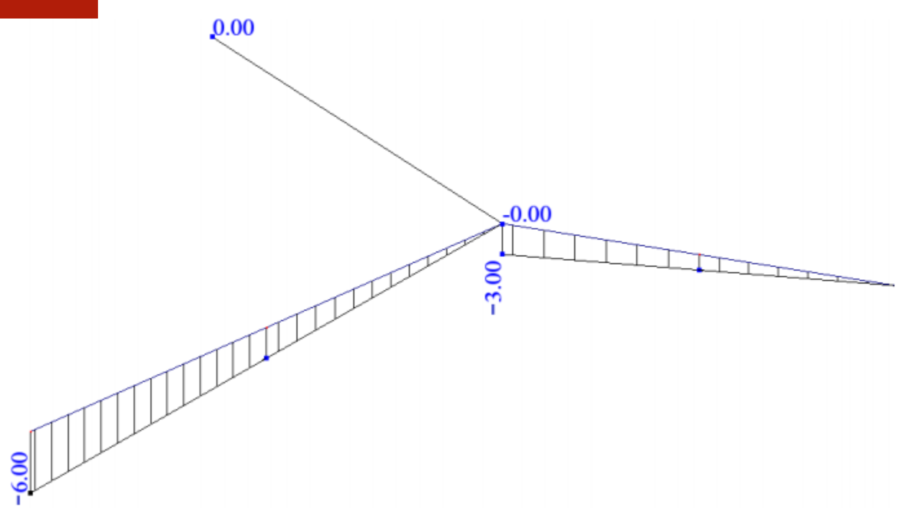

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_x} dx = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)m \cdot 3m \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3)m + \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6)m \cdot 6m \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)m +$$

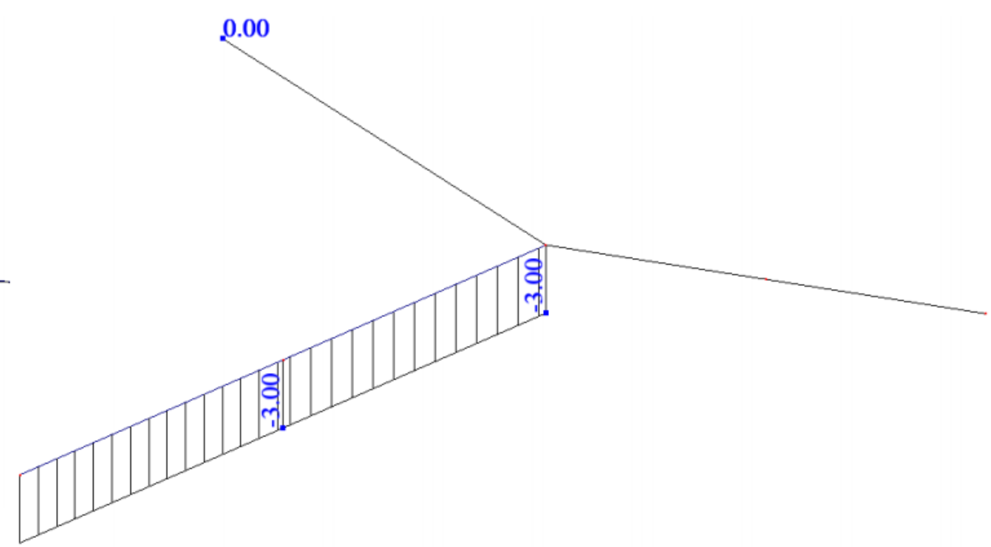
$$+ \frac{1}{0,769 EI_y} \cdot (-3)m \cdot 6m \cdot (-3)m = 9\frac{m^3}{EI_y} + 72\frac{m^3}{EI_y} + 70,2211\frac{m^3}{EI_y} = 151,2211\frac{m^3}{EI_y}$$




Rys. 1.1. Schemat statyczny

Dane do obliczeń: $F = 12$ kN; $q = 4$ kN/m; $M = 24$ kN m; $k_\delta = 8\ EI_y/m^3$; $\Delta T_1 = 20$ °C; $\Delta T_2 = -20$ °C; $\Delta T_3 = -15$ °C; $\Delta T_4 = 25$ °C; $\Delta r_2 = 0{,}03$ rad; $\Delta r_1 = 0{,}02$ m.



# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE

Wyrazy wolne $\delta_{iT}$ należy obliczyć według wzoru

$$\delta_{1T} = \int \bar{M}_y^1 \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} dx = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1}$$

gdzie $\Delta T_w$ to temperatura po dodatniej stronie osi z, $\Delta T_p$ to temperatura po stronie ujemnej osi z, $h$ to wysokość przekroju $h_{RO193,7x8,8} = 0,1937$ m. Do obliczeń przyjmiemy: $\alpha = 0.000012/^{o}C$,

$$\Omega_{\bar{M}_{y,1A}^1} = -3m \cdot 3m \cdot \frac{1}{2} = -4,5m^2, \qquad \Omega_{\bar{M}_{y,1B}^1} = -6m \cdot 6m \cdot \frac{1}{2} = -18m^2,$$

$$\delta_{1T} = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_{y\,1}^1} = 0,000012 \cdot \frac{1}{°C} \cdot \frac{-20°C - 20°C}{0,1937m} \cdot (-18)m^2 +$$

$$+0,000012 \cdot \frac{1}{°C} \cdot \frac{25°C - (-15)°C}{0,1937m} \cdot (-4,5)m^2 = 0,04461m - 0,01115m = 0,0335m$$

## Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$151,2211 \frac{m^3}{EI_y} X_1^T + 0,0335m = -\frac{X_1^T}{8\frac{m^3}{EI_y}} \quad \Rightarrow X_1^T = -0,00022 \frac{EI_y}{m^2} = -0,00022 \frac{4487,45kN \cdot m^2}{m^2} = -0,9919kN.$$

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE

Wyrazy wolne $\delta_{i\Delta}$ należy obliczyć według wzoru

$$\delta_{i1\Delta} = -\sum_n \overline{R}_n^1 \Delta r_n$$

Przemieszczenia podpory występują w węźle B (przemieszczenie pionowe $\Delta r_1$ oraz obrót $\Delta r_2$). Wartości reakcji wyznaczono w punkcie 7.2

$$\delta_{1\Delta} = -\overline{R}_1^1 \Delta r_1 - \overline{R}_2^1 \Delta r_2 = -(-1) \cdot 0{,}02m - 3m \cdot 0{,}03 = -0{,}07m$$

## Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$151{,}2211 \frac{m^3}{EI_y} X_1^\Delta + (-0{,}07)m = -\frac{X_1^\Delta}{8\frac{m^3}{EI_y}} \Rightarrow X_1^\Delta = 0{,}000463 \frac{EI_y}{m^2} = 0{,}000463 \frac{4487{,}45kN \cdot m^2}{m^2} = 2{,}0755kN.$$

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE

Reakcji i sił przekrojowe obliczono korzystając z zasady superpozycji

$$R_i^{\Delta} = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^{\Delta},$$

$$M_{y,ij}^{\Delta} = \bar{M}_{y,ij}^1 \cdot X_1^{\Delta},$$

$$M_{x,ij}^{\Delta} = \bar{M}_{x,ij}^1 \cdot X_1^{\Delta},$$

$$V_{z,ij}^{\Delta} = \bar{V}_{z,ij}^1 \cdot X_1^{\Delta}.$$

$$R_i^{T} = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^{T},$$

$$M_{y,ij}^{T} = \bar{M}_{y,ij}^1 \cdot X_1^{T},$$

$$M_{x,ij}^{T} = \bar{M}_{x,ij}^1 \cdot X_1^{T},$$

$$V_{z,ij}^{T} = \bar{V}_{z,ij}^1 \cdot X_1^{T}.$$

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE

## Obliczenie przemieszczenia

Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczane są ze wzorów:

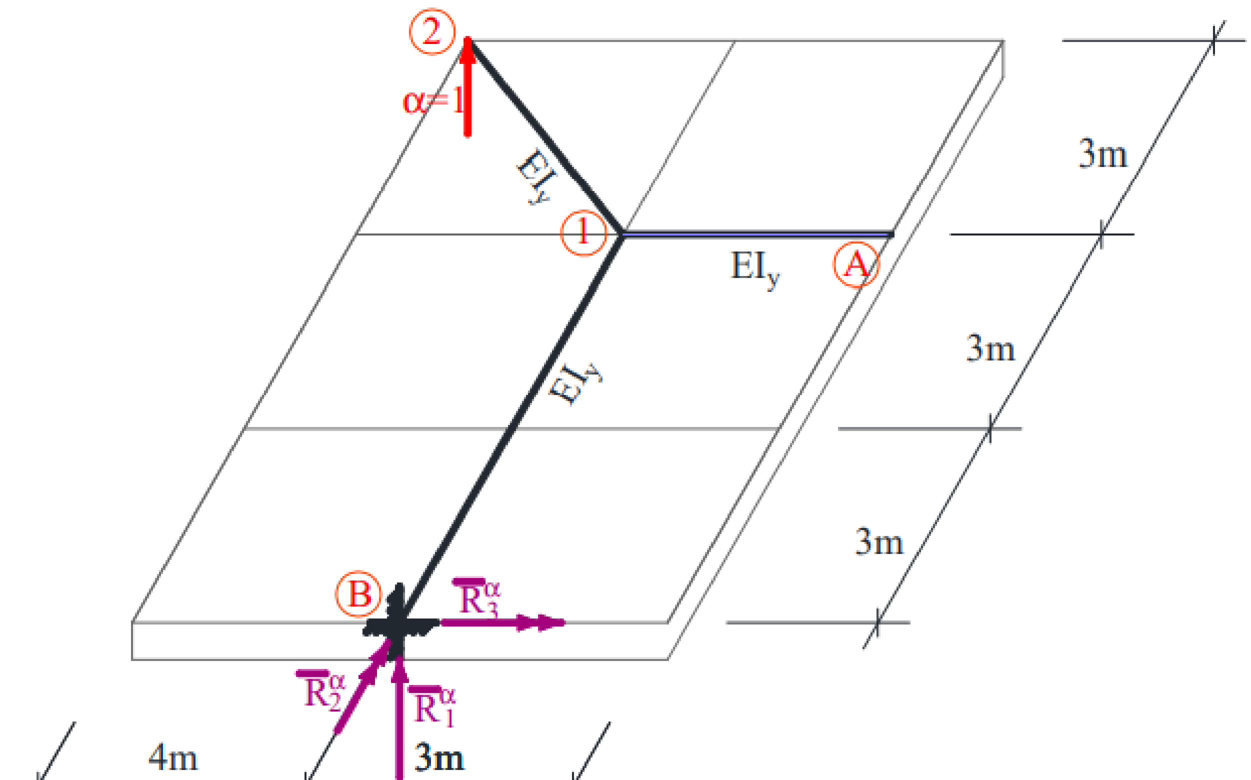
$$\Delta_i^F = \int \frac{\bar{M}_x^i \cdot M_x^F}{GI_x} dx + \int \frac{\bar{M}_y^i \cdot M_y^F}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$

$$\Delta_i^T = \int \frac{\bar{M}_x^i \cdot M_x^T}{GI_x} dx + \int \frac{\bar{M}_y^i \cdot M_y^T}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^T}{k_n} + \frac{\alpha \cdot (T_{z+} - T_{z-})}{h} \cdot \Omega_{\cdot \bar{M}_y^i}$$

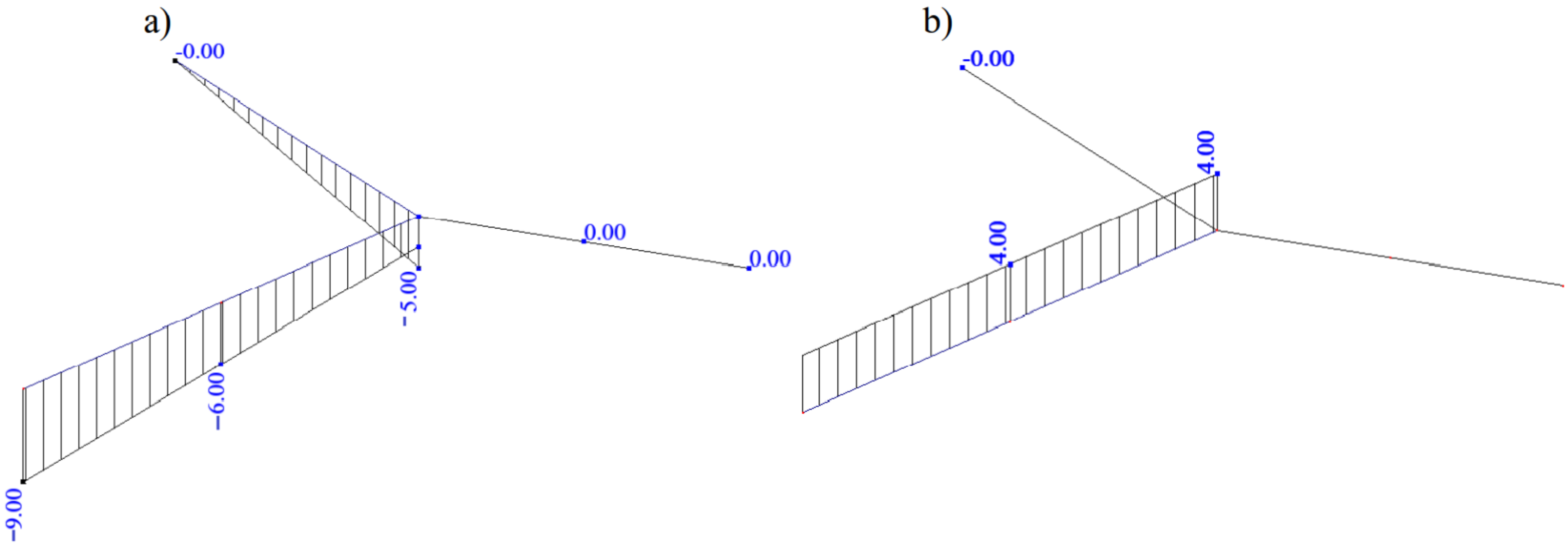
$$\Delta_i^\Delta = \int \frac{\bar{M}_x^i \cdot M_x^\Delta}{GI_x} dx + \int \frac{\bar{M}_y^i \cdot M_y^\Delta}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_r \bar{R}_r^i \cdot \Delta r_r$$

# DŹWIGAR ZAŁAMANY W PLANIE - ZADANIE

. **Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jed**
**w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**

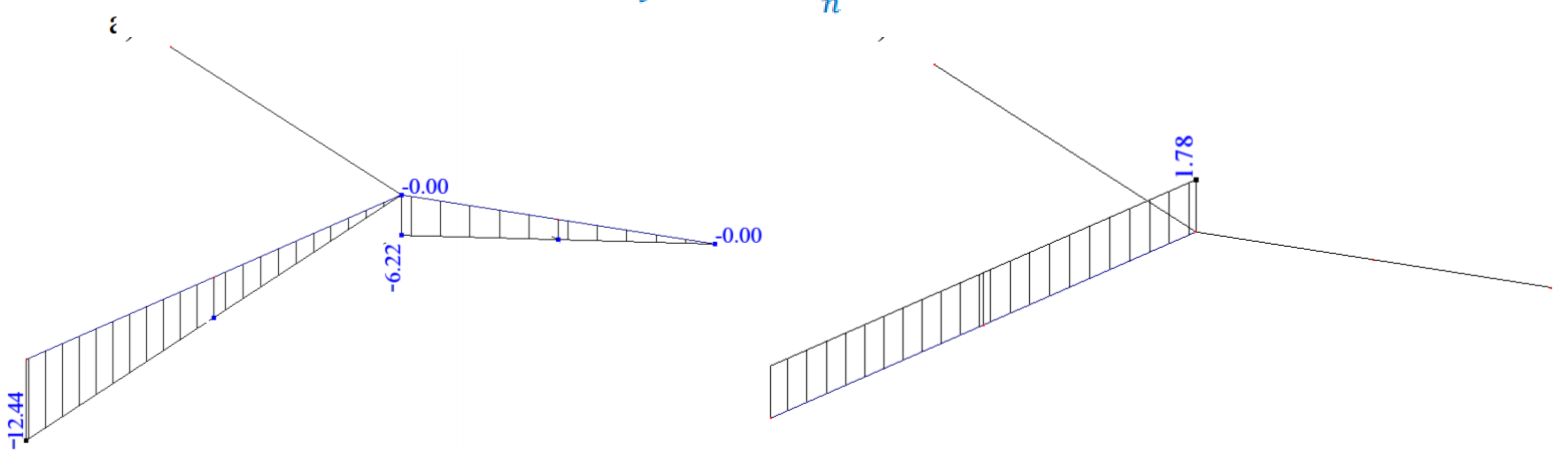



Rys. 11.1.1. Reakcje od α=1




Rys. 11.1.2. Wykresy sił przekrojowych od siły jednostkowej na kierunku szukanego przemieszczenia: a) momenty zginające w m, b) momenty skręcające w m

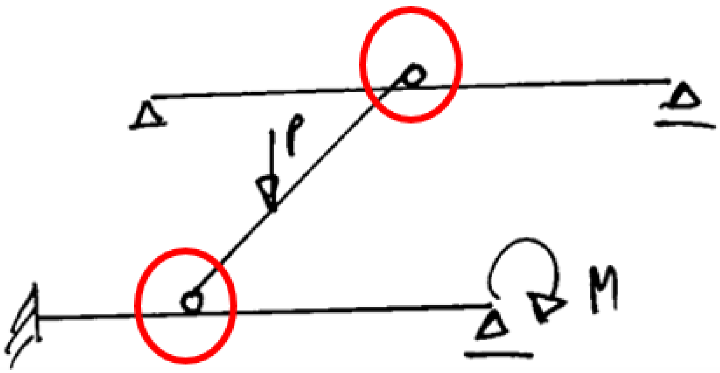
$$\Delta_i^T = \int \frac{\bar{M}_x^i \cdot M_x^T}{GI_x} dx + \int \frac{\bar{M}_y^i \cdot M_y^T}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^T}{k_n} + \frac{\alpha \cdot (T_{z+} - T_{z-})}{h} \cdot \Omega_{\cdot \bar{M}_y^i}$$

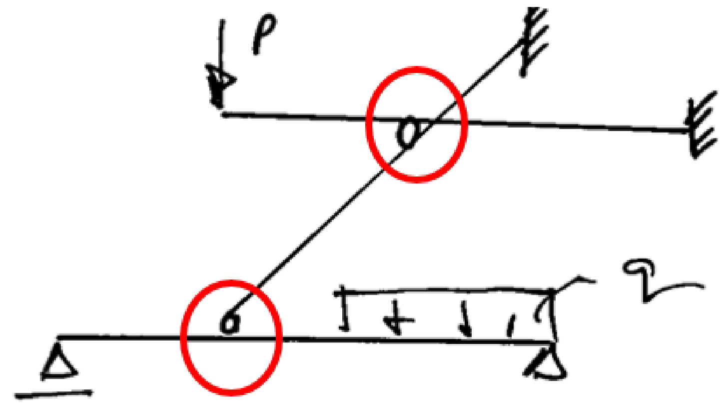



Rys. 10.5.1. wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia temperaturą
a) momenty zginające w kN·m, b) momenty skręcające w kN·m,

# RUSZTY BELKOWE

- *RUSZTY BELKOWE* są układami, w których można przyjąć, że momenty skręcające są równe zero, a występują tylko momenty zginające i siły poprzeczne.






- **Ruszty belkowe <u>to belki usytuowane zazwyczaj ortogonalnie w stosunku do siebie i połączone między sobą przegubami,</u> przez które przekazywana jest tylko siła pionowa i obciążone tylko obciążeniami działającymi prostopadle do płaszczyzny układu.**
- **Belki tworzące konstrukcję rusztu połączone są ze sobą w sposób hierarchiczny za pomocą więzi przegubowych, a obciążenie przekazywane jest z górnych belek na dolne.**

# RUSZTY BELKOWE

## OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI I DOBRANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY SIŁ

W rusztach belkowych tzn. belkach połączonych między sobą przegubami przez które przekazywana jest tylko siła pionowa i obciążonych tylko obciążeniami działającymi prostopadle do płaszczyzny układu, stopień statycznej niewyznaczalności układu obliczamy ze wzoru:

$$n_h = e - 2 \cdot l_b,$$

gdzie $e$ jest liczbą więzi elementarnych łączących belki między sobą i z podłożem, w których reakcje nie są równe zeru z założenia (nie uwzględniamy więzi, w których reakcje są równe zeru z założenia to jest więzi w płaszczyźnie układu i więzi odpowiadających momentom skręcającym - w rusztach belkowych występują tylko momenty zginające i siły tnące), $l_b$ jest liczbą belek "sztywnych".

# RUSZTY BELKOWE

- Stopień statycznej niewyznaczalności (SSN) rusztu belkowego:

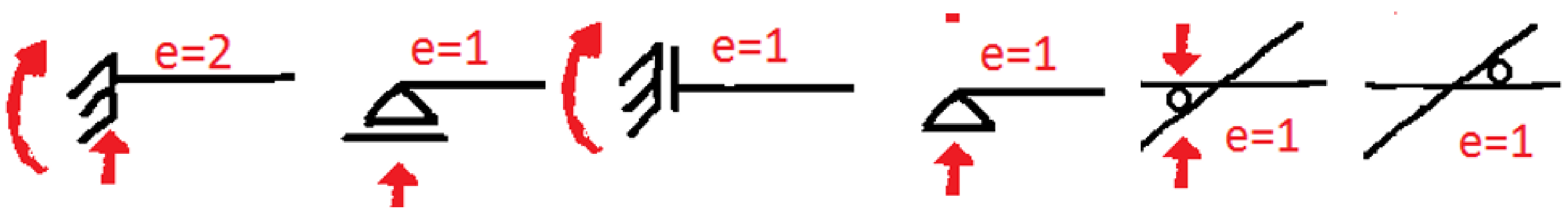
$$\boxed{n_h = e - 2b}$$

gdzie: e - liczb stopni swobody, b - liczba belek.

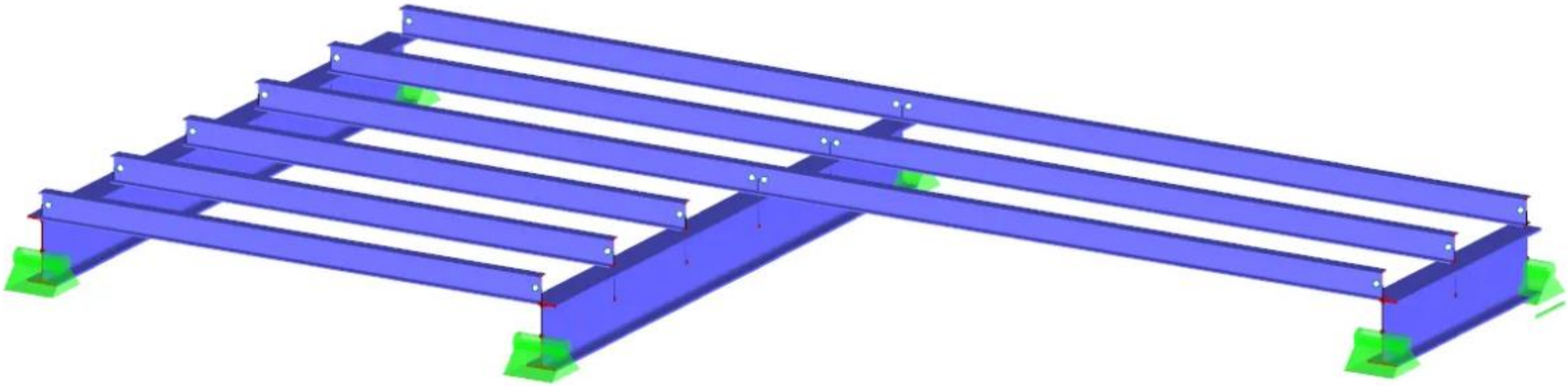
- Gdy mamy:
  - <u>$n_h$=0 to ruszt belkowy jest SW,</u>
  - <u>$n_h$>0 to ruszt belkowy jest SN.</u>

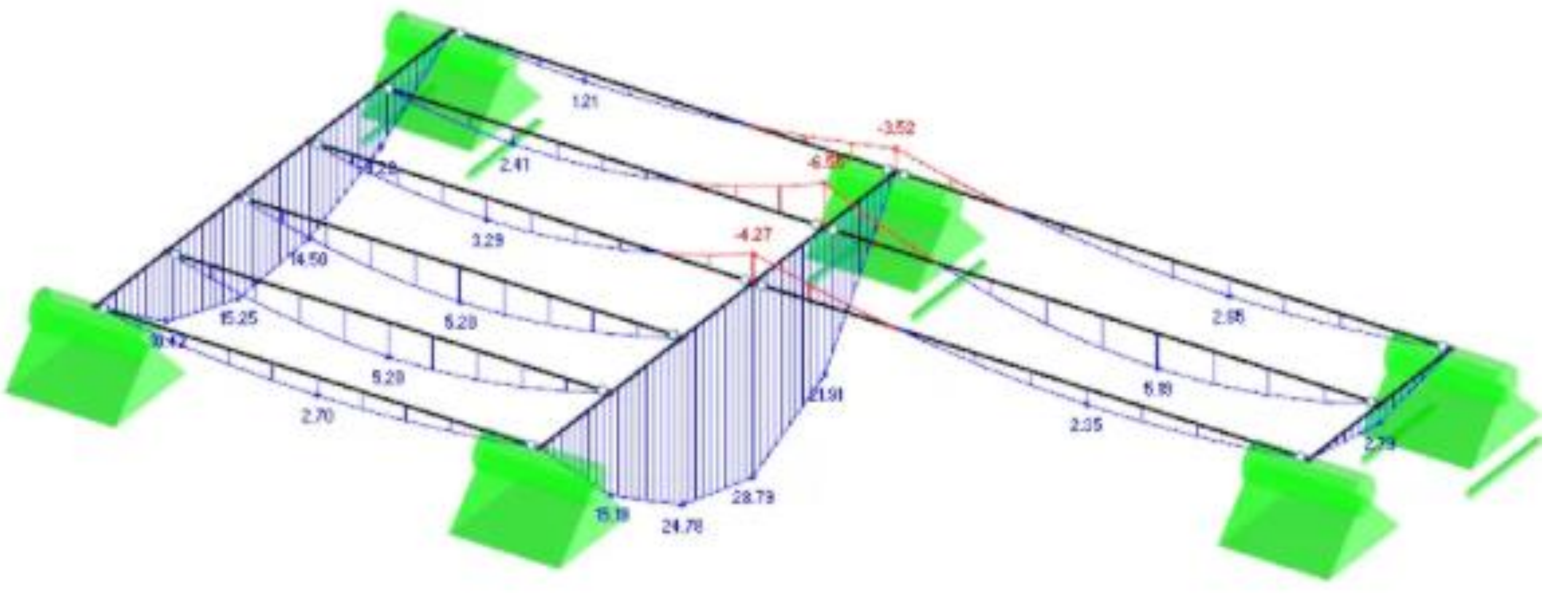
W rusztach belkowych do liczby *e* zalicza się tylko więzi translacyjne prostopadłe do płaszczyzny dźwigara i więzi rotacyjne, których reakcje powodują zginanie belek w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny dźwigara.

**<u>Liczba stopni swobody dla poszczególnych podparć:</u>**



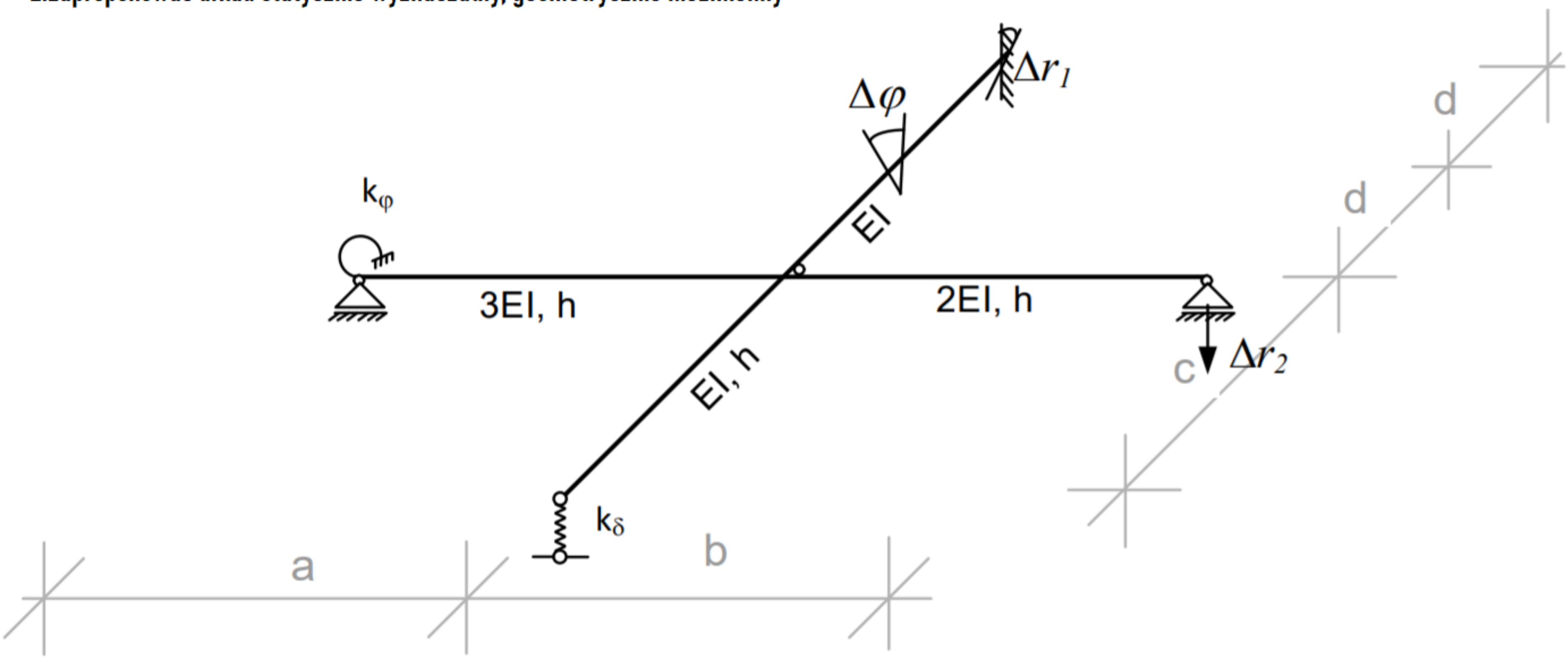
# RUSZTY BELKOWE



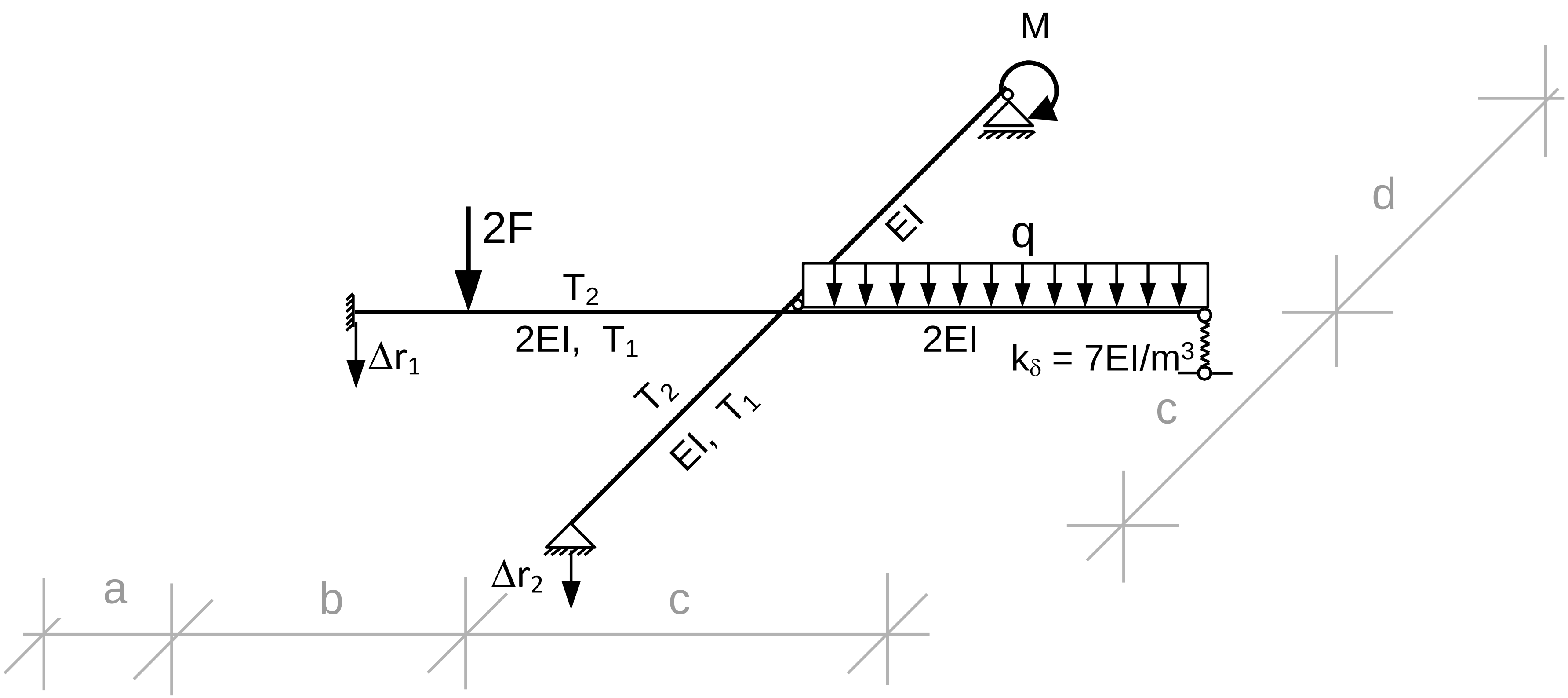


# RUSZTY BELKOWE - ZADANIE

1.Obliczyć stopień statycznej niewyznaczalności układu
2.Zaproponować układ statycznie wyznaczalny, geometrycznie niezmienny

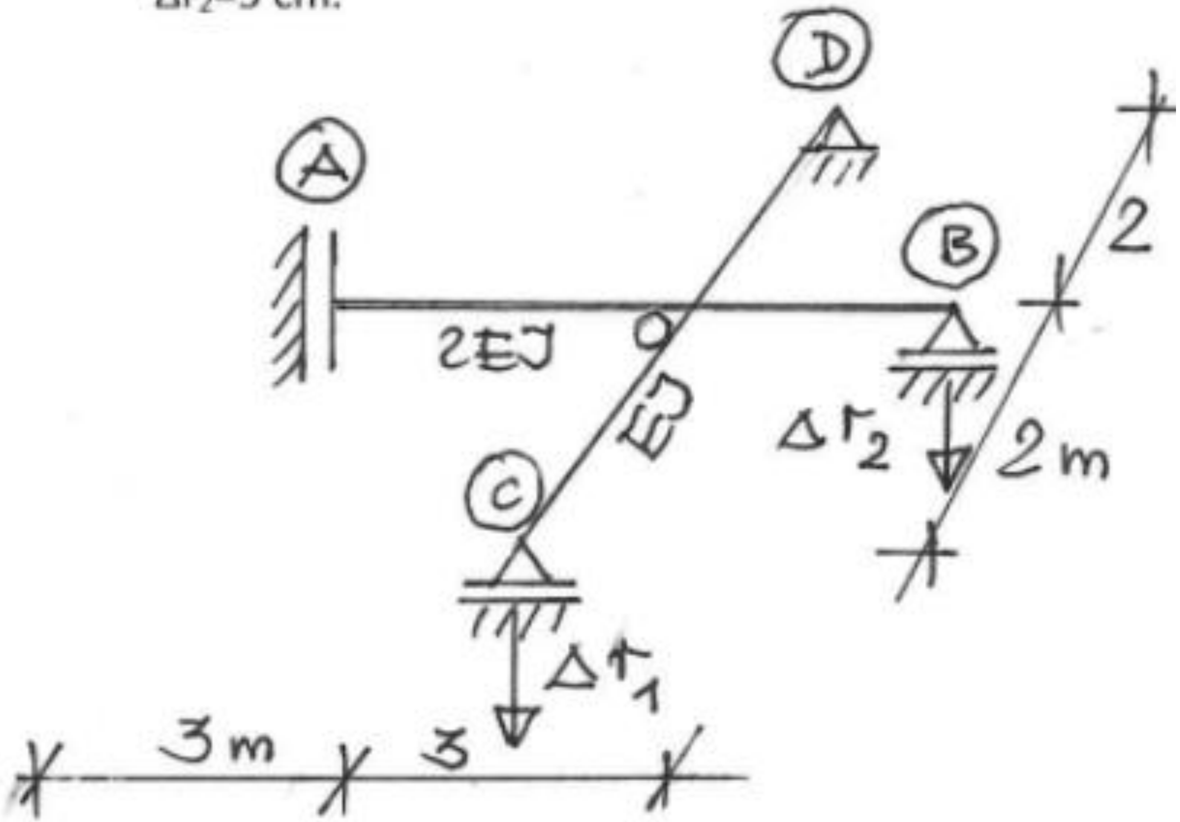


# RUSZTY BELKOWE - ZADANIE

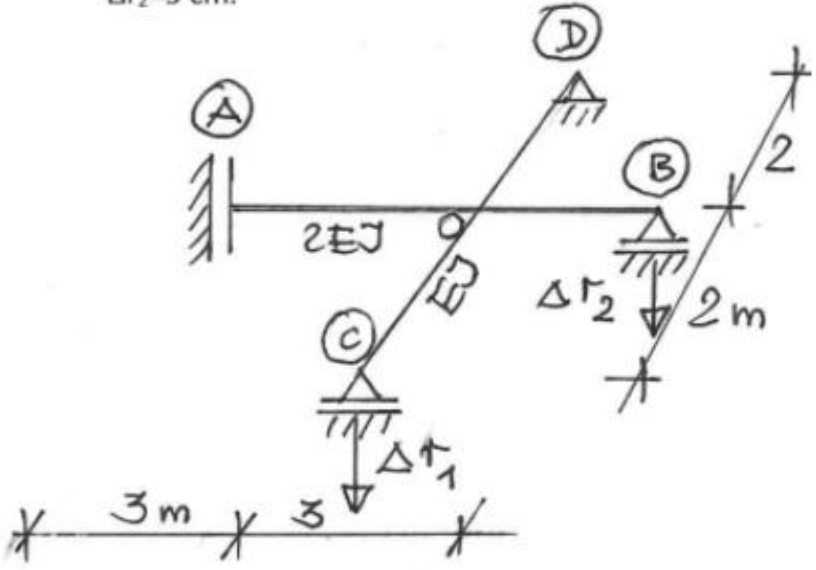


# RUSZTY BELKOWE - ZADANIE

**Zad.1.** Proszę sporządzić wykres momentów w ruszcie belkowym jak na rys., obciążonym osiadaniem podpory. EI – dane. $\Delta r_1=16$ cm, . $\Delta r_2=5$ cm.

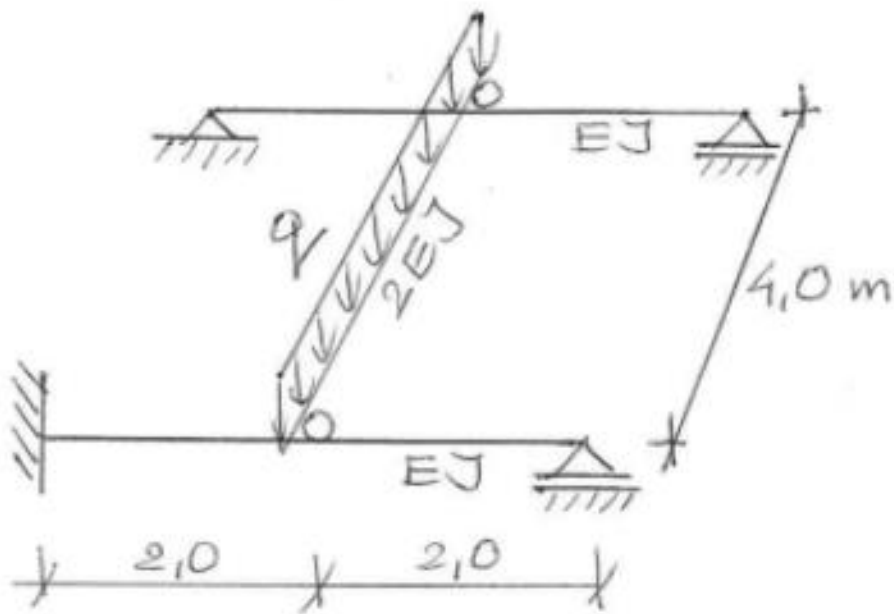


**Zad.1.** Proszę sporządzić wykres momentów w ruszcie belkowym jak na rys., obciążonym osiadaniem podpory. EI – dane. $\Delta r_1$=16 cm, . $\Delta r_2$=5 cm.



# RUSZTY BELKOWE - ZADANIE

**Zad.1.** Proszę zapisać układ równań (lub równanie) metody sił w wersji szczegółowej dla rusztu belkowego.




EJ – dane

$q = 4$ kN/m

Politechnika Wrocławska

# METODA PRZEMIESZCZEŃ

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

# ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Istotę metody przemieszczeń, najwygodniej jest przedstawić przez porównanie jej do metody sił, którą wcześniej już poznaliśmy i przy użyciu której jesteśmy w stanie policzyć przemieszczenia i rozkład sił wewnętrznych układów statycznie niewyznaczalnych.

Tok obliczeń matematycznych jest podobny, jednak sens fizyczny wielkości występujących w równaniach jest odmienny.

Podstawowe różnice pomiędzy tymi metodami zestawiono w poniższej tabeli.

*Porównanie metody sił z metodą przemieszczeń*

| | *Metoda sił* | *Metoda przemieszczeń* |
|---|---|---|
| Niewiadomymi są: | nadliczbowe siły | przemieszczenia węzłów |
| Równania kanoniczne wyrażają: | przemieszczenia w miejscu odrzuconych więzów | reakcje w miejscu dołożonych więzów |
| O liczbie niewiadomych decyduje: | stopień statycznej niewyznaczalności (*SSN*). Jest to liczba więzów przesztywniających układ, które trzeba odrzucić. | stopień kinematycznej niewyznaczalności (*SKN*). Jest to liczba więzów, które trzeba wprowadzić aby układ usztywnić. |

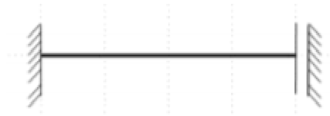
# ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

## Podstawowa klasa prętów

sztywno -sztywny

(sz-sz)

sztywno- łyżwa



(sz-łyż)

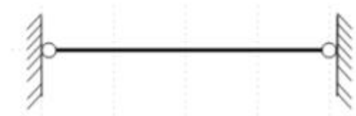
sztywno-przegubowy

(sz-przeg)

sztywno- wspornik

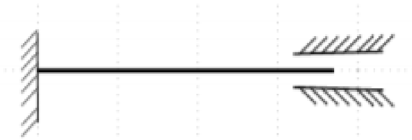
(sz-wsp)

przegubowo-przegubowy



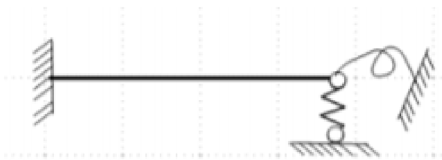
(przeg-przeg)

# ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

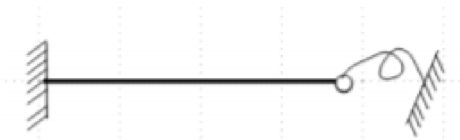


(sz-sz)

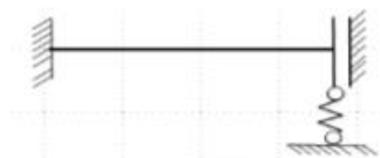
(sz-sz)



(sz-sz)



(sz-łyż)



(sz-sz)

(sz-sz)

(sz-przeg)

(sz-przeg)

# ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

**Stopień geometrycznej** niewyznaczalności jest sumą niezależnych składowych przemieszczeń: obrotów węzłów $n_\varphi$ i składowych przesunięć węzłów $n_\delta$, które w pełni określają warunki brzegowe prętów na które został podzielony układ.

$$\boxed{n_g = n_\varphi + n_\delta}$$

$n_\varphi$- liczba niezależnych współrzędnych rotacyjnych (liczba niezależnych obrotów węzłów)

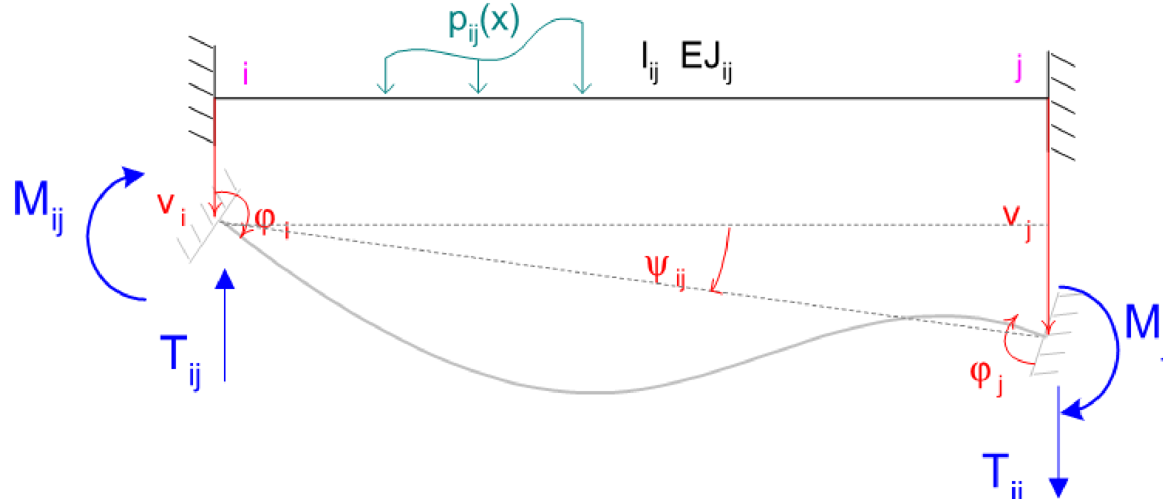
$n_\delta$- liczba niezależnych współrzędnych translacyjnych liczba niezależnych składowych przesuwów węzłów)

# ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

**Wzorami transformacyjnymi** nazywa się zależności między momentami i siłami brzegowymi a obrotami i przemieszczeniami brzegowymi pręta.

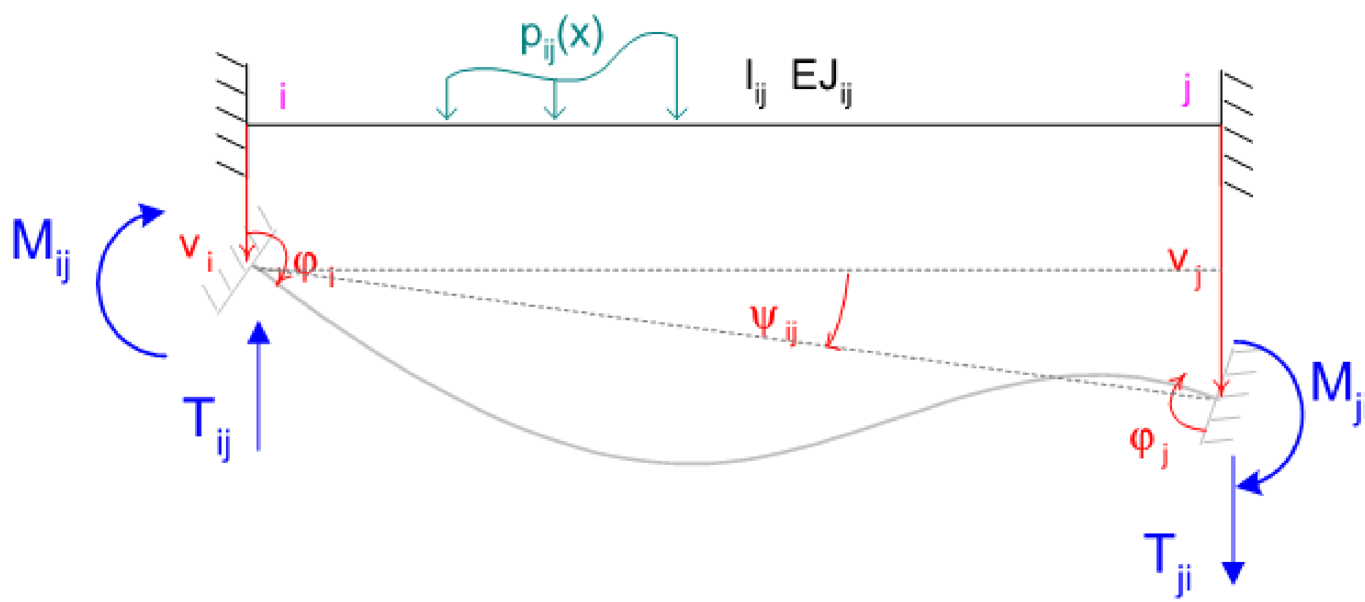
Każdy stan odkształcenia pręta wywołany obciążeniem może być rozłożony na:

- wydłużenie lub skrócenie pręta,
- odkształcenie wynikające ze zmiany odległości końców pręta w kierunku prostopadłym do jego osi,
- obroty węzłów.

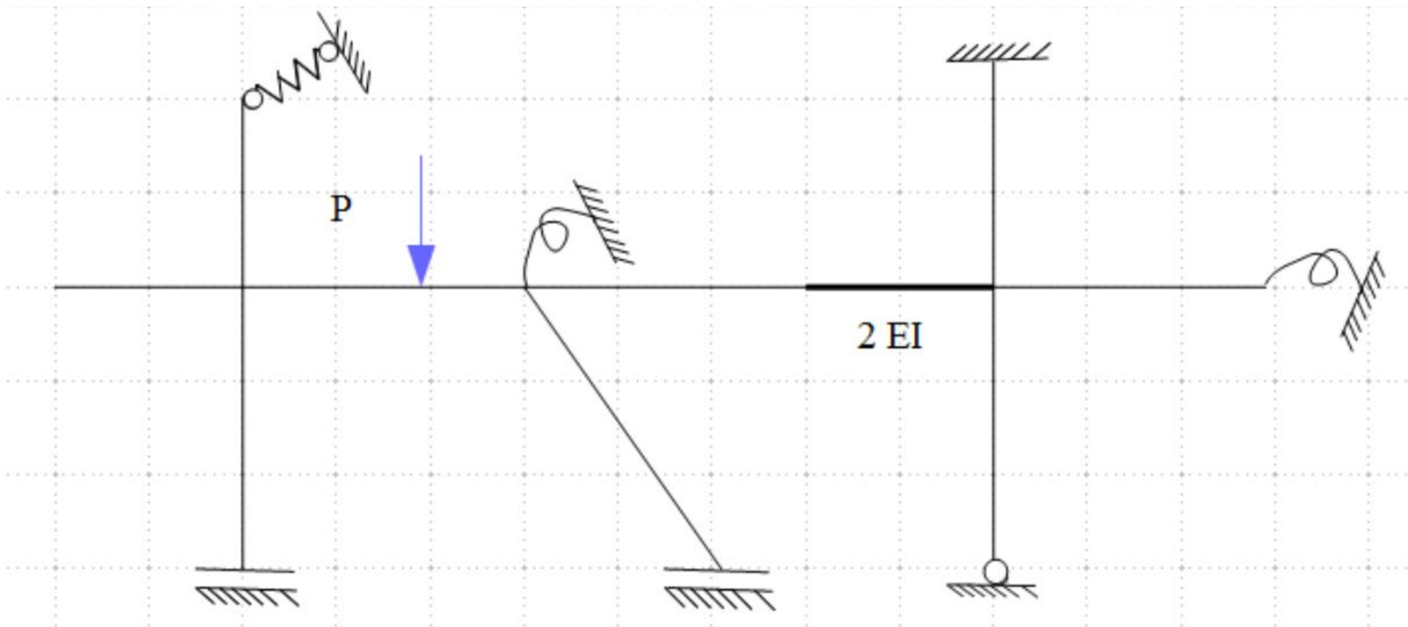



# USTROJE GEOMETRYCZNIE NIEWYZNACZALNE. METODA PRZEMIESZCZEŃ WZORY TRANSFORMACYJNE

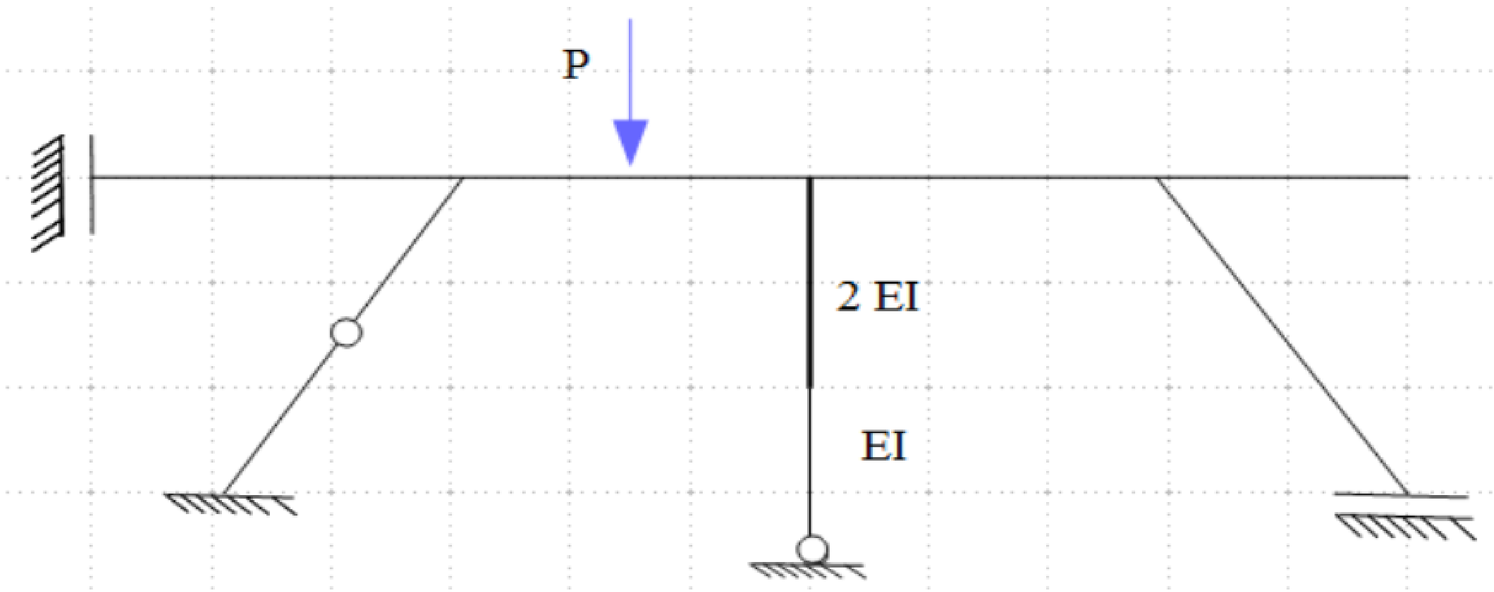
Momenty zginające i siły tnące wywołane są obrotami końców pręta $\varphi_i$, $\varphi_j$ oraz przesunięciami prostopadłymi do osi pręta $v_i$ oraz $v_j$. Ponieważ przemieszczenia wzdłuż osi pręta nie wywołują momentów zginających i sił tnących (tylko siły osiowe), stąd na rysunku przedstawiono pręt, którego końce doznają tylko obrotów i przesunięć prostopadłych do osi pręta.



# MP – DOBÓR UKŁADU PODSTAWOWEGO



# MP – DOBÓR UKŁADU PODSTAWOWEGO



# MP – DOBÓR UKŁADU PODSTAWOWEGO