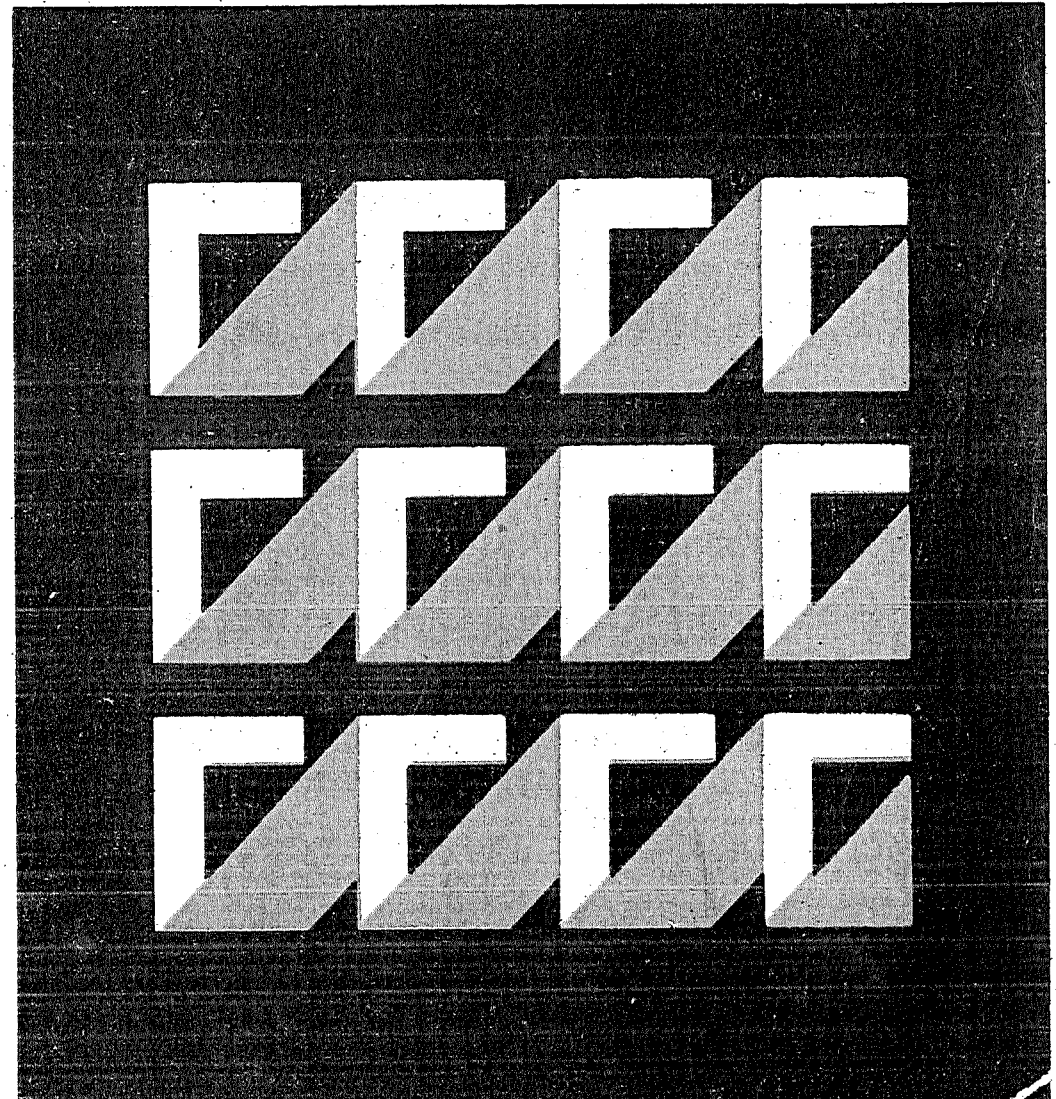


JAN LANGER

Dynamika budowli



Politechnika Wroclawska



Jan Langer

Dynamika budowli

Wroclaw 1980

Instytut Inżynierii Lądowej
Monografia na potrzeby dydaktyki do przedmiotów:
Mechanika budowli, studium podstawowe,
Wydział Budownictwa Lądowego, sem. VI, 2-1-0-1-0 h
Dynamika, studium podstawowe,
Wydział Podstawowych Problemów Techniki, sem. VI, 2-1-0-1-0 h

Opiniodawca
Jerzy SUŁOCKI

Opracowanie redakcyjne
Helena SZUBERT

Korekta
Anna MICKIEWICZ

Projekt okładki
Wojciech KANIOWSKI

Praca wydana za zgodą Rektora

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Nakład 1800 + 75 egz. Ark. wyd 13. Ark. druk 13¹/_a. Papier powielaczowy kl. III, 70 g. 81.
Oddano do drukarni w listopadzie 1979 r. Druk ukończono w styczniu 1980 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 6537/79 - P-12 - Cena zł 40,-

OD AUTORA

Praca niniejsza powstała z konspektu wykładów dynamiki budowli prowadzonych przeze mnie od kilkunastu lat dla studentów Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej, początkowo na specjalności teorii konstrukcji, później dla ogółu słuchaczy. Treścią pracy jest systematyczny przegląd podstawowych zagadnień teorii liniowych drgań ustrojów budowlanych. Rozważane są drgania płaskich ustrojów prętowych oraz dodatkowo drgania bryły na podłożu sprężystym. Za podstawę merytoryczną rozwiązań, przyjmuję konsekwentnie ideę bilansu energetycznego w sensie Lagrange'a. Ruch drgający opisuję w łatwej do interpretacji formie trygonometrycznej, a w analizie układów złożonych stosuję notację macierzową, ułatwiającą operowanie uporządkowanymi zbiorami i przydatną w przypadku korzystania z elektronicznej techniki obliczeniowej.

Wyłożony materiał nawiązuje do wielu znanych monografii i podręczników, wszystkie jednak zagadnienia - nawet zupełnie elementarne - zostały pod względem ujęcia podporządkowane ogólnej koncepcji pracy. Z tego względu ograniczam się do podania na końcu pracy literatury pomocniczej, nie podając w tekście szczegółowych odsyłaczy. W wyłożonym materiale uwzględniłem również szereg oryginalnych ujęć oraz wyników badań własnych i moich współpracowników, jak np.: pojęcie i wykorzystanie majoranty ruchu, rozwiązanie procesu przejściowego, problem serii impulsów, macierzowe rozwiązanie problemu drgań bryły na podłożu sprężystym, wykorzystanie zasad analizy wymiarowej w rozwiązaniach numerycznych, zastosowanie metody aproksymacyjnej w zagadnieniu obciążenia ruchomych, pewne problemy numerycznego całkowania równań ruchu. Niektóre z tych zagadnień udało się przedstawić w nader prostej postaci, co uzasadnia - moim zdaniem - uwzględnienie tej problematyki w podstawowym kursie dynamiki.

Szczególne uwagę poświęcam metodom, które umożliwiają przetwarzanie modeli obiektów rzeczywistych na układy dyskretne w sensie fizycznym lub matematycznym. Uwzględniłem również elementy klasycznej teorii ciągłych ustrojów prętowych, jednakże w ujęciu nawiązującym do teorii układów dyskretnych. Zwracam przy tym uwagę Czytelnika na to, że wszystkie zagadnienia liniowych drgań ustrojów budowlanych przestrzennie ograniczonych można sprowadzić do równania macierzowego

$$\ddot{B}\bar{q} + C\dot{\bar{q}} + K\bar{q} = \bar{F}(t).$$

Specyfika zagadnień i metod przejawia się jedynie w sposobie formułowania i interpretacji występujących w tym równaniu składników. Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie omawiam zagadnień dynamiki przestrzennych ustrojów prętowych i dźwigarów powierzchniowych. Mam jednak nadzieję, że uważne przestudiowanie pracy umożliwi Czytelnikowi takie zrozumienie celów i metod dynamiki budowli, iż samodzielna kontynuacja studiów w omawianej dziedzinie nie sprawi Mu istotnych trudności.

Wrocław, styczeń 1979

1. WSTĘP

1.1. Określenie przedmiotu

Dynamika jest działem mechaniki zajmującym się ruchem układów materialnych z uwzględnieniem przyczyn tego ruchu. W czasie ruchu układów materialnych oprócz sił ciężkości pojawiają się nowe siły masowe i opory ruchu. W bilansie energetycznym poza energią potencjalną i pracą sił zewnętrznych występuje energia kinetyczna i energia rozproszona (zużyta na pokonanie oporów ruchu).

Pierwsze naukowe sformułowanie niektórych praw dynamiki dał Galileo Galilei (1546-1642). Fundamentalne zasady dynamiki sformułował Isaac Newton (1642-1727). Do dalszego rozwoju dynamiki przyczynili się szczególnie Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) oraz Joseph Louis Lagrange (1736-1813) - twórca mechaniki analitycznej.

Dynamika budowli jest nauką o dynamice układów, które mogą być ustrojami budowlanymi, a więc układów geometrycznie niezmiennych o zachowawczej postaci równowagi. Ruch tego rodzaju układów ma zwykle charakter oscylacyjny wokół położenia równowagi statycznej. Stan równowagi statycznej będziemy więc w dynamice uważali za stan odniesienia, zakładając jednocześnie, że przemieszczenia dynamiczne są małe wobec wymiarów konstrukcji. Założymy również, że rozważane ustroje budowlane są zbudowane z materiałów idealnie liniowo sprężystych lub charakteryzujących się cechami reologicznymi opisanymi liniowym związkiem konstytutywnym.

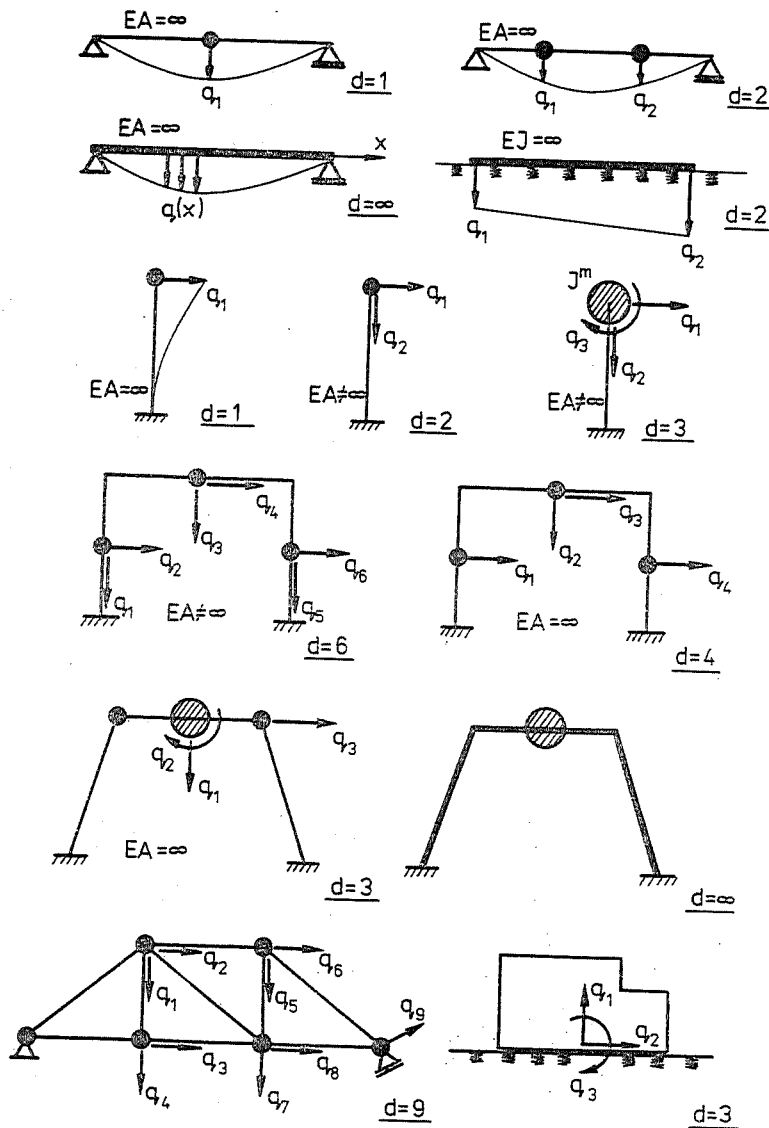
1.2. Schemat dynamiczny

Schematem dynamicznym ustroju budowlanego nazywamy jego schemat statyczny uzupełniony informacjami istotnymi z punktu widzenia dynamiki. Do informacji tych należy opis wielkości i rozkładu mas, opis charakteru i rozkładu oporów ruchu oraz opis zewnętrznych sił czynnych (sił wzbudzących) jako funkcji miejsca i czasu.

Stan przemieszczenia punktów masowych należących do rozpatrywanego ustroju można opisać za pomocą pewnego zbioru wielkości, zwanych współrzędnymi uogólnionymi. Liczba niezależnych współrzędnych uogólnionych niezbędnych do określenia położenia wszystkich punktów masowych w danej chwili względem stanu równowagi statycznej nazywa się liczbą dynamicznych stopni swobody d . Swobodny punkt materialny ma w przestrzeni trzy dynamiczne stopnie swobody, a na płaszczyźnie dwa stopnie. Swobodna tarcza materialna ma na płaszczyźnie trzy dynamiczne stopnie swobody, a swobodna bryła materialna ma w przestrzeni sześć dynamicznych stopni swobody.

Punkty masowe, tarcze i bryły, wchodzące w skład ustroju budowlanego, są powiązane między sobą i z nieruchomym układem odniesienia (ostoją) za pomocą wiązań odkształcalnych i nieodkształcalnych. Wiązanie odkształcalne nie zmniejszają liczby dynamicznych stopni swobody, wiązanie nieodkształcalne natomiast nakładają na układ dodatkowe warunki geometryczne ograniczające dynamiczne stopnie swobody układu. Liczba dynamicznych stopni swobody układu złożonego jest równa sumie lokalnych stopni swobody punktów masowych, tarcz i brył (traktowanych jako obiekty izolowane), zmniejszonej o liczbę warunków nałożonych przez wiązanie nieodkształcalne. W celu określenia liczby dynamicznych stopni swobody ustroju należy zatem myślowo usunąć z niego wiązanie odkształcalne i w tak przekształconym schemacie ustalić liczbę niezależnych i niezbędnych współrzędnych uogólnionych. W ustrojach prętowych wiązaniami nieodkształcalnymi są na ogół wiązanie podporowe, a wiązaniami odkształcalnymi - pręty sprężyste. Często zakładamy, że pręty są nieważkie, nierozciągliwe i charakteryzują się jedynie odkształcalnością giętą. W schemacie przekształconym należy je zastąpić nierozciągliwymi wiązaniami o przegubowych końcach. Przykłady określenia liczby dynamicznych stopni swobody i doboru współrzędnych uogólnionych są przedstawione na rys. 1.1. Przykłady te dotyczą ustrojów płaskich, w których modelem mas są punkty masowe pozbawione bezwładności obrotowej, tarcze masowe o niepomiątelnej bezwładności obrotowej, a także masy rozłożone. Z punktu widzenia liczby dynamicznych stopni swobody wprowadza się podział na:

- 1) układy o jednym stopniu swobody,
 - 2) układy o skończonej liczbie stopni swobody (układy dyskretne),
 - 3) układy o nieskończonej liczbie stopni swobody (układy ciągłe).
- Podział ten jest umowny, wszystkie bowiem obiekty fizyczne są przestrzennymi tworami materialnymi zbudowanymi z tworzyw odkształcalnych, są więc układami ciągłymi o nieskończonej liczbie stopni swobody.

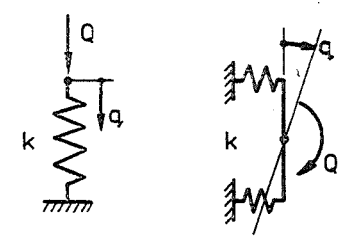


Rys. 1.1

Okazuje się jednak, że w większości przypadków można uzyskać dostatecznie dokładne rozwiązanie w bazie ograniczonej liczby współrzędnych uogólnionych. Najprostszym sposobem dyskretyzacji układu rzeczywistego jest przekształcenie ciągłego pola masowego rozpiętego na strukturze odkształcalnej do postaci dyskretnego pola masowego (dyskretyzacja fizyczna). Sposób ten, zwany krótko granulacją mas, jest omówiony w rozdziale drugim i trzecim. Inny sposób polega na zachowaniu rzeczywistej struktury pola masowego oraz na aproksymacyjnym opisie stanu przemieszczenia w ograniczonej bazie parametrów (dyskretyzacja matematyczna). Sposób ten, zastosowany w analizie dynamicznej układów ciągłych, przedstawiono w rozdziale czwartym. W rozdziale tym omówiono również niektóre zagadnienia dynamiki układów ciągłych sensu stricto, a więc bez stosowania dyskretyzacji fizycznej i matematycznej. Możliwości w tej dziedzinie są ograniczone, omawiane zagadnienia są bowiem opisane cząstkowymi równaniami różniczkowymi w przestrzeni geometryczno-czasowej i uzyskanie rozwiązań zamkniętych jest możliwe jedynie w pewnych szczególnych przypadkach.

1.3. Władze odkształcalne

Sztwywnością k izolowanej więzi liniowo sprężystej nazywamy stosunek uogólnionej siły czynnej Q do odpowiadającego jej uogólnionego przemieszczenia q (rys. 1.2). Stosunek przemieszczenia q do siły Q nazywa się podatnością δ więzi liniowo sprężystej. Zawsze $k\delta = 1$. Zakładamy, że parametry więzi sprężystych nie zależą od czasu (układy skleronomiczne). Wiąz liniowo sprężysta gromadzi energię potencjalną odkształcenia o wartości

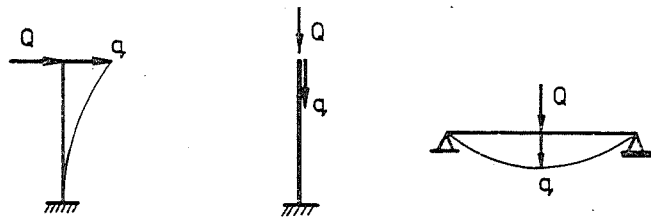


Rys. 1.2

$$E_p = \frac{1}{2} Qq = \frac{1}{2} kq^2 \tag{1.1}$$

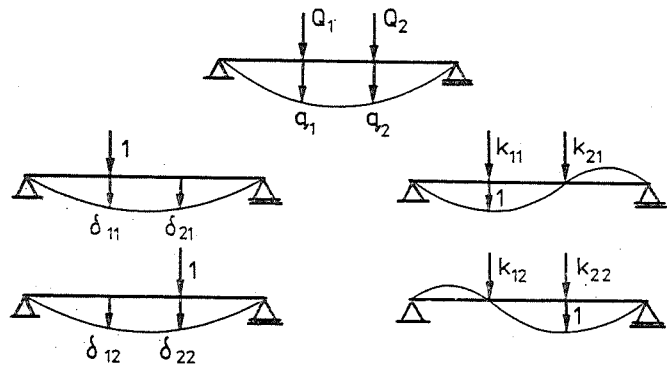
Proste przykłady wyznaczania parametrów więzi sprężystych przedstawiono na rys. 1.3.

Jeśli operujemy zbiorem współrzędnych uogólnionych, to więzie w tym zbiorze są na ogół sprzężone. Dla przykładu rozpatrzmy belkę, jak na rys. 1.4, opisaną dwuelementowym zbiorem współrzędnych uogólnionych.



$$\begin{aligned}
 q &= Ql^3/3EJ & q &= Ql/EA & q &= Ql^3/48EJ \\
 \delta &= l^3/3EJ & \delta &= l/EA & \delta &= l^3/48EJ \\
 k &= 3EJ/l^3 & k &= EA/l & k &= 48EJ/l^3
 \end{aligned}$$

Rys. 1.3



Rys. 1.4

Otrzymujemy tu zależności

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \delta_{11}Q_1 + \delta_{12}Q_2, \\
 q_2 &= \delta_{21}Q_1 + \delta_{22}Q_2,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

które w zapisie macierzowym mają postać

$$\bar{q} = D\bar{Q}, \tag{1.3}$$

gdzie

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Macierz D jest macierzą podatności w obranym zbiorze współrzędnych uogólnionych. Relacja odwrotna do (1.2) ma postać

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= k_{11}q_1 + k_{12}q_2, \\
 Q_2 &= k_{21}q_1 + k_{22}q_2,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

lub krócej w formie macierzowej

$$\bar{Q} = K\bar{q}, \tag{1.6}$$

gdzie

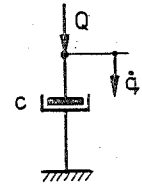
$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

jest macierzą sztywności w obranym zbiorze współrzędnych uogólnionych. Obie macierze są kwadratowe i symetryczne, a ponadto

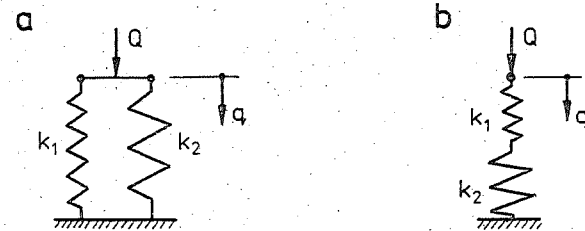
$$KD = DK = I. \tag{1.7}$$

Oprócz więzi sprężystych w układzie mogą występować więzi, których reakcje opisują opory ruchu. Najprostszym przypadkiem takiej więzi jest tłumik wiskotyczny (rys. 1.5). Parametrem c tłumika wiskotycznego nazywamy stosunek siły czynnej Q do odpowiadającej jej prędkości przemieszczenia \dot{q} .

Zarówno więzi sprężyste, jak i tłumiki mogą występować w zestawach. Zasadniczymi typami są zestawy równoległe i szeregowe. Na rys. 1.6 przedstawiono przykłady zestawu równoległego (rys. 1.6a) i szeregowego (rys. 1.6b) więzi sprężystych.



Rys. 1.5



Rys. 1.6

W pierwszym przypadku

$$Q = k_1q + k_2q = (k_1 + k_2)q, \tag{1.8}$$

a więc

$$k = k_1 + k_2, \quad 1/\delta = 1/\delta_1 + 1/\delta_2. \tag{1.9}$$

W drugim przypadku

$$q = Q/k_1 + Q/k_2 = (\delta_1 + \delta_2)Q,$$

a więc

$$\delta = \delta_1 + \delta_2, \quad 1/k = 1/k_1 + 1/k_2. \quad (1.10)$$

W równoległym zestawie więzi sprężystych sumowaniu podlegają sztywności, a w szeregowym - podatności więzi. W przypadku zestawu tłumików rolę sztywności k_i grają parametry tłumików c_i .

1.4. Podstawowe prawa dynamiki

Podstawowe znaczenie w dynamice ma drugie prawo Newtona, które w odniesieniu do punktu materialnego brzmi: prędkość zmiany pędu punktu materialnego jest równa sile działającej na punkt. Przyjmując oznaczenia jak na rys. 1.7 mamy zatem



$$\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{u}}) = \vec{P}, \quad (1.11)$$

a w przypadku masy niezależnej od czasu

$$m \ddot{\mathbf{u}} = \vec{P}. \quad (1.12)$$

Rys. 1.7

Energia kinetyczną punktu materialnego określa wzór

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2), \quad (1.13)$$

gdzie \dot{u}_1, \dot{u}_2 są ortokartezjańskimi współrzędnymi prędkości punktu. Można wykazać, że w ruchu płaskim tarczy materialnej energia kinetyczna

$$E_k = \frac{1}{2} (m \dot{u}_1^2 + m \dot{u}_2^2 + J^M \dot{u}_3^2), \quad (1.14)$$

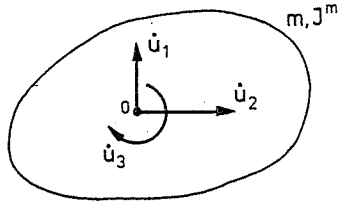
gdzie m - masa tarczy, J^M - centralny biegunowy moment bezwładności masy, \dot{u}_1, \dot{u}_2 - współrzędne prędkości translacyjnej środka masy, \dot{u}_3 - prędkość rotacyjna, jak na rys. 1.8.

Równanie (1.12) można zapisać w postaci $\vec{P} + \vec{E} = \vec{0}$, (1.15)

gdzie $\vec{E} = -m \ddot{\mathbf{u}}$ jest siłą bezwładności działającą na punkt materialny.

Interpretacją równania (1.15) jest zasada d'Alemberta, która w odniesieniu do punktu materialnego brzmi: w każdej chwili siły działające na punkt materialny w czasie

ruchu spełniają wraz z siłą bezwładności warunki równowagi. Zasada ta jest podstawą stosowania metody kinetostatycznej w dynamice, zgodnie z



Rys. 1.8

którą analiza dynamiczna układu może być przeprowadzona metodami statyki pod warunkiem uwzględnienia obciążeń kinetycznych.

Założmy, że przemieszczenie \bar{u} jest jednorodną funkcją zbioru współrzędnych uogólnionych q_i . Równanie (1.11) nie zmieni sensu, jeśli zapiszemy je w postaci

$$\frac{d}{dt}(m \dot{\bar{u}}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} = \vec{P} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i}. \quad (1.16)$$

Z zależności $\bar{u} = \bar{u}(q_i)$ wynika, że

$$\dot{\bar{u}} = \sum_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \frac{\partial \dot{\bar{u}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial \dot{\bar{u}}}{\partial q_i}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m \dot{\bar{u}}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}(m \dot{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i}) - m \dot{\bar{u}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt}(m \dot{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \dot{q}_i}) - m \dot{\bar{u}} \frac{\partial \dot{\bar{u}}}{\partial \dot{q}_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\bar{u}} \dot{\bar{u}} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\bar{u}} \dot{\bar{u}} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Jednocześnie jest

$$\vec{P} d\bar{u} = \vec{P} \sum_i \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} dq_i = \sum_i P_i dq_i, \quad P_i = \vec{P} \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i},$$

gdzie P_i jest uogólnioną siłą zewnętrzną odpowiadającą współrzędnej q_i . Równanie Newtona można zatem zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

znanej pod nazwą równań Lagrange'a.

W przypadku ustrojów odkształcalnych o zachowawczej postaci równowagi

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial E_p}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad (1.18)$$

gdzie L - praca zewnętrznych sił czynnych (w sensie pracy przygotowanej), E_p - energia potencjalna odkształcenia, Φ - funkcja tłumienia (quasi-potencjał o wymiarze mocy).

Funkcję tłumienia w przypadku tłumików wiskotycznych oblicza się analogicznie jak energię kinetyczną, kładąc w miejsce masy m parametr tłumika c . Przykładowo dla tłumika przedstawionego na rys. 1.5 mamy

$$\Phi = \frac{1}{2} c \dot{q}^2. \quad (1.19)$$

Równania Lagrange'a dla ustroju budowlanego mają ostatecznie postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial E_p}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1}, \quad 1 = 1, 2, \dots \quad (1.20)$$

lub zbiorczo w notacji wektorowej

$$\frac{d}{dt} \text{grad } E_k(\dot{\bar{q}}) - \text{grad } E_k(\bar{q}) + \text{grad } \Phi(\dot{\bar{q}}) + \text{grad } E_p(\bar{q}) = \text{grad } L(\bar{q}). \quad (1.21)$$

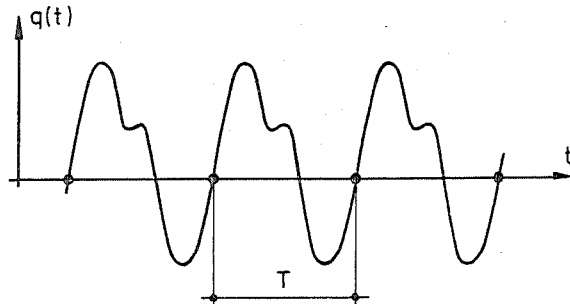
Otrzymałmy w ten sposób układ równań ruchu dowolnego ustroju złożonego, zapisanych w bazie współrzędnych uogólnionych.

W przypadku małych drgań wokół położenia równowagi energia kinetyczna na ogół nie zależy od przemieszczeń uogólnionych q_1 . Wtedy

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0, \quad \text{grad } E_k(\bar{q}) = \vec{0}. \quad (1.22)$$

1.5. Charakterystyka ruchów oscylacyjnych

Ruch punktu jest oscylacyjny względem pewnego położenia obojętnego, jeśli wychylenia punktu od tego położenia są ograniczone i w określonych (niekoniecznie równych) odstępach czasu punkt przechodzi przez



Rys. 1.9

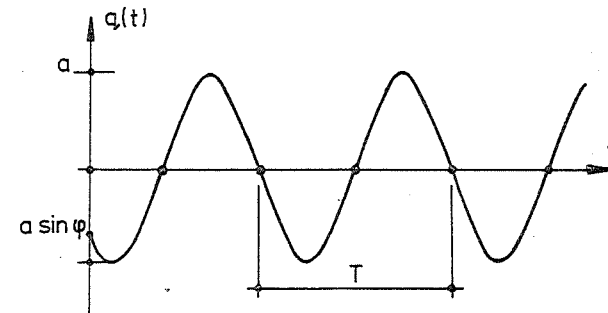
położenie obojętne. Ruch oscylacyjny spełniający warunek

$$q(t) = q(t+nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

nazywamy ruchem okresowym (periodycznym) o okresie T (rys. 1.9). Powtarzający się fragment ruchu zawarty w okresie T nazywamy cyklem (c).

Najprostszym przypadkiem ruchu okresowego jest ruch harmoniczny określony relacją

$$q(t) = a \sin(2\pi \frac{t}{T} + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.24)$$



Rys. 1.10

którego wykres jest przedstawiony na rys. 1.10. W opisie takiego ruchu występują następujące wielkości:

$a = \text{am } q$ - amplituda,

T - okres (a),

$\omega = 2\pi/T$ - częstość kołowa (rad/s),

$\omega t + \varphi$ - faza (rad),

φ - faza początkowa (rad).

Oprócz częstości kołowej w praktyce używa się wielkości:

$f = 1/T$ - częstość fizyczna (c/s = Hz),

$n = 60/T$ - częstość techniczna (c/min).

Współczynniki przeliczeniowe są podane w tabeli 1.1.

Tabela 1.1
współczynniki przeliczeniowe

	ω	f	n
$\omega =$	1	6,283	0,1047
$f =$	0,1592	1	0,0167
$n =$	9,549	60	1

Forma wzoru (1.24) nosi nazwę zapisu zwiniętego. Ruch harmoniczny można również zapisać w formie rozwiniętej

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t, \quad (1.25)$$

gdzie

$$q_s = a \cos \varphi, \quad q_c = a \sin \varphi. \quad (1.26)$$

Relacja odwrotna ma postać

$$a = \sqrt{q_s^2 + q_c^2}, \quad \varphi = \arctg(q_c/q_s). \quad (1.27)$$

Przez różniczkowanie funkcji (1.24) lub (1.25) podług czasu otrzymuje się pochodne kinematyczne - prędkość i przyspieszenie,

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= a \omega \cos(\omega t + \varphi) = q_s \omega \cos \omega t - q_c \omega \sin \omega t, \\ \ddot{q}(t) &= -a \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -q_s \omega^2 \sin \omega t - q_c \omega^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Warto zauważyć, że w ruchu harmonicznym $\ddot{q} = -\omega^2 q$. W obliczeniach dynamicznych wygodniej jest na ogół stosować rozwinięty zapis ruchu harmonicznego, umożliwia to bowiem niezależne przekształcanie składnika sinusowego i cosinusowego. Ponadto zamiast niewspółmiernymi parametrami ruchu a, φ , operuje się współmiernymi wielkościami q_s, q_c .

Ruch opisany wzorem

$$q(t) = a(t) \sin(\omega t + \varphi) = q_s(t) \sin \omega t + q_c(t) \cos \omega t, \quad (1.29)$$

gdzie $a(t) > 0$, nazywamy ruchem quasi-harmonicznym z modulacją amplitudy.

Rozważmy ruch punktu opisany funkcją $q(t)$, która jest kombinacją współk liniowych ruchów harmonicznymi

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j). \quad (1.30)$$

W przypadku, gdy ruchy składowe są synchroniczne, mamy $\omega_j = \omega = \text{const}$, $\varphi_j = \varphi = \text{const}$. Wtedy

$$q(t) = \left(\sum_j a_j \right) \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.31)$$

Ruch wypadkowy jest harmoniczny i synchroniczny z ruchami składowymi. Amplituda ruchu wypadkowego jest równa sumie amplitud składowych

$$a = \sum_j a_j. \quad (1.32)$$

W przypadku, gdy ruchy składowe cechuje jednakowa częstość $\omega_j = \omega = \text{const}$, ale nie są one zgodne w fazie, zapiszemy

$$q_j(t) = a_j \sin(\omega t + \varphi_j) = a_j \cos \varphi_j \sin \omega t + a_j \sin \varphi_j \cos \omega t,$$

a zatem

$$q(t) = \left(\sum_j a_j \cos \varphi_j \right) \sin \omega t + \left(\sum_j a_j \sin \varphi_j \right) \cos \omega t. \quad (1.33)$$

Wprowadźmy wektory

$$\begin{aligned} \bar{a} &= [a_1, a_2, a_3, \dots]^T, \\ \bar{c} &= [\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3, \dots]^T, \\ \bar{s} &= [\sin \varphi_1, \sin \varphi_2, \sin \varphi_3, \dots]^T. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Formuła (1.33) przybierze postać

$$q(t) = \bar{a}^T \bar{c} \sin \omega t + \bar{a}^T \bar{s} \cos \omega t = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.35)$$

gdzie

$$\varphi = \arctg(\bar{a}^T \bar{s} / \bar{a}^T \bar{c}). \quad (1.36)$$

Natomiast

$$a^2 = \bar{a}^T \bar{c} \bar{c}^T \bar{a} + \bar{a}^T \bar{s} \bar{s}^T \bar{a} = \bar{a}^T (\bar{c} \bar{c}^T + \bar{s} \bar{s}^T) \bar{a} = \bar{a}^T R \bar{a},$$

przy czym elementy macierzy R wynoszą

$$\begin{aligned} (R)_{ij} &= \cos \varphi_i \cos \varphi_j + \sin \varphi_i \sin \varphi_j = \cos |\varphi_i - \varphi_j|, \\ (R)_{j1} &= (R)_{1j}, \quad (R)_{11} = 1. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Wynik (1.35) wskazuje na to, że ruch wypadkowy jest ruchem harmonicznym z częstością kołową ω . Amplituda tego ruchu

$$a = \sqrt{\bar{a}^T R \bar{a}} \geq 0 \quad (1.38)$$

wyraża się przez pierwiastek z formy kwadratowej amplitud składowych. Jądem formy kwadratowej jest tu symetryczna macierz R , której elementami są cosinusy przesunięć fazowych między wszystkimi możliwymi parami ruchów składowych. W szczególnym przypadku dwóch ruchów

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \cos |\varphi_2 - \varphi_1| \\ \cos |\varphi_1 - \varphi_2| & 1 \end{bmatrix},$$

a więc

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos |\varphi_1 - \varphi_2|}. \quad (1.39)$$

I tak np.

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2, & \text{jeśli } \varphi_1 - \varphi_2 &= 0, \\ a &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, & \text{jeśli } |\varphi_1 - \varphi_2| &= \pi/2, \\ a &= |a_1 - a_2|, & \text{jeśli } |\varphi_1 - \varphi_2| &= \pi. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Rozważmy w końcu przypadek sumowania ruchów asynchronicznych, to znaczy ruchów o różnych częstościach ω_j . Ruch wypadkowy nie jest tu już ruchem harmonicznym, choć jest ruchem okresowym, jeśli stosunki częstości składowych są wymierne. W tym przypadku częstości składowe tworzą ciąg proporcji

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \dots = n_1 : n_2 : n_3 : \dots, \quad (1.41)$$

gdzie n_j są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi (tj. nie mającymi w swoim zbiorze wspólnego dzielnika). Mamy wtedy $\omega_j/n_j = \text{const}$, a zatem również

$$n_j T_j = T = \text{const}. \quad (1.42)$$

Okres T ruchu wypadkowego jest najmniejszą wspólną wielokrotnością okresów składowych. Jeśli n_j są liczbami małymi, okres T jest porównywalny z okresami ruchów składowych. W przeciwnym przypadku okres T może być wielokrotnie większy od okresów ruchów składowych i osiąga nieskończoność, jeśli w zbiorze częstości składowych pojawiają się elementy o proporcjach niewymiernych (np. $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}$). Przebieg czasowy ruchu wypadkowego może mieć różnorodne kształty, niemniej podczas interferencji ruchów asynchronicznych absolutnie największe wychylenie nie może przekroczyć sumy amplitud składowych

$$\max \max |q(t)| \leq \sum_j a_j. \quad (1.43)$$

Dokładniejszą ocenę rozkładu wychyleń uzyskamy przeprowadzając następujące rozumowanie. Wprowadźmy na chwilę do definicji ruchów składowych parametr ε taki, że

$$\begin{aligned} q_j(t) &= a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j + \varepsilon) = \\ &= a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \sin \varepsilon + a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \cos \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.44)$$

i utwórzmy wektory funkcyjne

$$\begin{aligned} \vec{c}(t) &= [\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \dots]^T, \\ \vec{s}(t) &= [\sin(\omega_1 t + \varphi_1), \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \dots]^T. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Wtedy ruch wypadkowy zapiszemy w postaci

$$q(t) = \vec{a}^T \vec{c}(t) \sin \varepsilon + \vec{a}^T \vec{s}(t) \cos \varepsilon. \quad (1.46)$$

Prowadząc dalej rachunek podobnie jak w (1.35) i (1.36), otrzymamy

$$q(t) = \hat{q}(t) \cdot \sin[\varepsilon + \varphi(t)], \quad (1.47)$$

gdzie

$$\varphi(t) = \arctg[\vec{a}^T \vec{s}(t) / \vec{a}^T \vec{c}(t)]. \quad (1.48)$$

Po dokonaniu przejścia granicznego $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymamy

$$q(t) = \hat{q}(t) \sin \varphi(t), \quad (1.49)$$

przy czym zgodnie z (1.35), (1.36)

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\vec{a}^T R(t) \vec{a}} \geq 0, \quad (1.50)$$

gdzie

$$[R(t)]_{ij} = \cos |\omega_i t - \omega_j t + \varphi_i - \varphi_j| = \cos |\omega_{ij} t + \varphi_{ij}|, \quad (1.51)$$

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j, \quad \varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j.$$

Jądro $R(t)$ formy kwadratowej występującej w (1.50) jest symetryczną macierzą o elementach funkcyjnych zależnych od czasu, z wyjątkiem elementów diagonalnych zawsze równych jedności. Funkcja $\hat{q}(t)$ określona wzorem (1.50) jest obwiednią (inaczej - majorantą) ruchu wypadkowego $q(t)$, uwzględniając bowiem to, że $|\sin \varphi(t)| \leq 1$, istotnie z (1.49) otrzymamy

$$|q(t)| \leq \hat{q}(t). \quad (1.52)$$

Znak nierówności w powyższym wzorze jest słuszny dla prawie wszystkich t , równość natomiast jest prawdziwa w przeliczalnym zbiorze punktów styczności majoranty do przebiegu ruchu, przy czym zbiór ten może być pusty. Jeśli ruch wypadkowy jest ruchem okresowym, to również majoranta jest funkcją okresową, jednak oba te okresy nie muszą być sobie równe. Zauważmy, że część zmienna kwadratu majoranty jest kombinacją liniową funkcji (1.51); jeśli zatem dla $i \neq j$ wszystkie możliwe $|\omega_{ij}|$ układają się w proporcji względnie pierwszych liczb naturalnych n_{ij} , to zgodnie z (1.42) okres majoranty

$$\hat{T} = n_{ij} T_{ij} = 2\pi n_{ij} / |\omega_{ij}|. \quad (1.53)$$

W trywialnym przypadku jednego ruchu

$$\hat{q}(t) = a_1 = \text{am } q_1 = \text{const}, \quad (1.54)$$

a więc majoranta jest linią prostą równoległą do osi czasu.

W szczególnym przypadku superpozycji dwóch ruchów asynchronicznych otrzymuje się

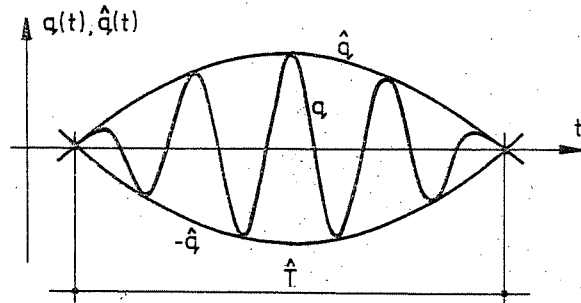
$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos |\omega_{12} t + \varphi_{12}|}, \\ T &= 2\pi n_1 / \omega_1 = 2\pi n_2 / \omega_2, \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\hat{T} = 2\pi / |\omega_1 - \omega_2| = T / |n_1 - n_2|.$$

Majoranta pulsuje wtedy w przedziale

$$|a_1 - a_2| \leq \hat{q}(t) \leq (a_1 + a_2). \quad (1.56)$$

Pulsacja ta ujawnia się szczególnie wyraźnie, gdy $a_1 \approx a_2$. Jednocześnie pojawia się efekt akustyczny, zwany dudnieniem, zwłaszcza w przypadku $\omega_1 \approx \omega_2$, wtedy bowiem $\bar{T} \gg T_1 \approx T_2$ i cykl majoranty jest gęsto wypełniony lokalnymi oscylacjami ruchu wypadkowego (rys. 1.11).



Rys. 1.11

Wykres ruchu złożonego jest na ogół funkcją szybkozmienną o skomplikowanym przebiegu, składającym się niekiedy z wielu różnych oscylacji lokalnych w jednym cyklu ruchu. Sporządzanie wykresu ruchu i jego analiza mogą być zatem kłopotliwe. Majoranta ruchu złożonego natomiast jest zawsze funkcją nieujemną o stosunkowo łagodnym przebiegu, dlatego też sporządzanie wykresu majoranty jest mniej pracochłonne.

Rozważmy dla przykładu ruch opisany formułą

$$\begin{aligned} q(t) &= q_1 + q_2 = 2\sin 2\pi t + \cos 6\pi t = \\ &= 2\sin 2\pi t + \sin(6\pi t + \pi/2). \end{aligned}$$

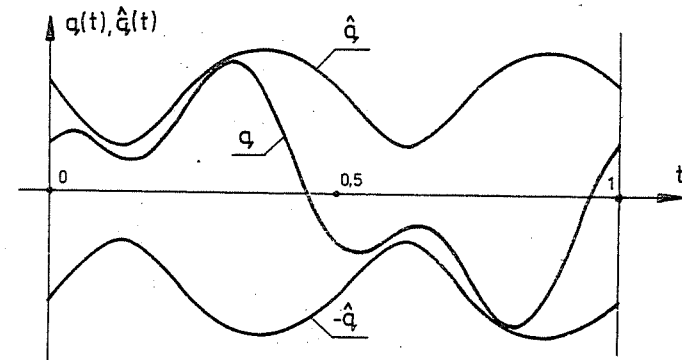
Charakterystyki ruchów składowych są następujące:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\pi \text{ rad/s}, & \omega_2 &= 6\pi \text{ rad/s}, \\ n_1 &= 1, & n_2 &= 3, \\ T_1 &= 1 \text{ s}, & T_2 &= 1/3 \text{ s}. \end{aligned}$$

Dla ruchu złożonego otrzymujemy:

- okres ruchu $T = 2\pi \cdot 1/2\pi = 2\pi \cdot 3/6\pi = 1 \text{ s}$,
- okres majoranty $\bar{T} = 1/|1-3| = 1/2 \text{ s}$,
- formułę majoranty $\hat{q}(t) = \sqrt{5 - 4\sin 4\pi t}$.

Wykres ruchu i majoranty ruchu przedstawiono na rys. 1.12.

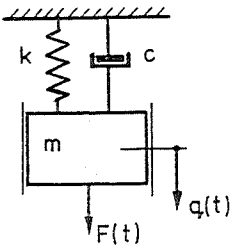


Rys. 1.12

2. UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

2.1. Równanie ruchu

Najprostszy ideowy model układu o jednym stopniu swobody przedstawiono na rys. 2.1. Masa m jest połączona z nieruchomą ośnią za pomocą więzi sprężystej o sztywności k oraz tłumika wiskotycznego o parametrze c . Układ jest obciążony siłą wzbudzącą $F(t)$, a wychylenie masy z położenia równowagi statycznej opisuje współrzędna uogólniona $q(t)$. Bilans energetyczny układu daje rezultaty



Rys. 2.1

Po podstawieniu obliczonych wielkości do równań Lagrange'a (1.20) otrzymujemy równanie ruchu

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t). \quad (2.2)$$

Równanie to, zgodnie z zasadą d'Alemberta, wyraża warunek dynamicznej równowagi sił działających na rozważaną masę. Siłami tymi są: zewnętrzna siła czynna F , siła bezwładności $-m\ddot{q}$, reakcja tłumika (opór ruchu) $-c\dot{q}$ oraz reakcja sprężysta $-kq$.

2.2. Zagadnienie własne

Rozwiązaniem zagadnienia własnego nazywamy w dynamice budowli ustalenie okoliczności, w których równanie ruchu pozbawione składników reprezentujących opory ruchu i siłę wzbudzącą może mieć niezerowe rozwiązanie. Poszukiwana jest więc całka równania

$$m\ddot{q} + kq = 0. \quad (2.3)$$

Kładąc $q = e^{\lambda t}$ otrzymamy równanie charakterystyczne $m\lambda^2 + k = 0$, którego pierwiastkami są $\lambda_1 = i\omega$ oraz $\lambda_2 = -i\omega$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$. Charakter pierwiastków wskazuje na to, że całka ogólna równania (2.3) ma postać

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t, \quad (2.4)$$

przy czym q_s, q_c są stałymi dowolnymi. Stacjonarny, harmoniczny proces opisany funkcją (2.4) nazywamy drganiami własnymi. Wielkość

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (2.5)$$

jest częstotliwością kołową drgań własnych. Jest ona indywidualną cechą rozważanego obiektu i nie zależy od czynników zewnętrznych. Drgania własne nie są procesem fizycznym, opisują one jedynie pewną dyspozycję ustroju.

2.3. Drgania swobodne

Drganiami swobodnymi nazywamy proces fizyczny spowodowany wyłącznie początkowym zaburzeniem stanu równowagi, a więc nałożeniem warunków początkowych $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Jeżeli tłumienie jest pomijalnie małe, rozwiązanie może być przyjęte w postaci (2.4), a zatem

$$\begin{aligned} q(0) = q_0 = q_c &\rightarrow q_c = q_0, \\ \dot{q}(0) = \omega q_s = \dot{q}_0 &\rightarrow q_s = \dot{q}_0 / \omega. \end{aligned}$$

Ostatecznie rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega t + \dot{q}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega}, \\ \dot{q}(t) &= -q_0 \omega \sin \omega t + \dot{q}_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Drgania swobodne tłumione są opisane równaniem różniczkowym

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0. \quad (2.7)$$

Kładąc $q = e^{\lambda t}$ otrzymamy równanie charakterystyczne $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$, którego pierwiastkami są $\lambda_1 = -\alpha\omega + i\omega'$, $\lambda_2 = -\alpha\omega - i\omega'$, przy czym

$$\alpha = c/2\sqrt{km}, \quad (2.8)$$

$$\omega' = \omega\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad (2.9)$$

Charakter pierwiastków wskazuje na to, że całka ogólna równania (2.7) ma postać

$$q(t) = e^{-\alpha\omega t} (q_s \sin \omega' t + q_c \cos \omega' t). \quad (2.10)$$

Wykorzystując jak poprzednio warunki początkowe, otrzymamy

$$q(0) = q_c = q_0 \rightarrow q_c = q_0,$$

$$\dot{q}(0) = \omega' q_s - \alpha \omega q_0 = \dot{q}_0 \rightarrow q_s = \frac{1}{\omega'} \dot{q}_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} q_0.$$

Wprowadzimy pomocniczy fazowy parametr tłumienia β taki, że

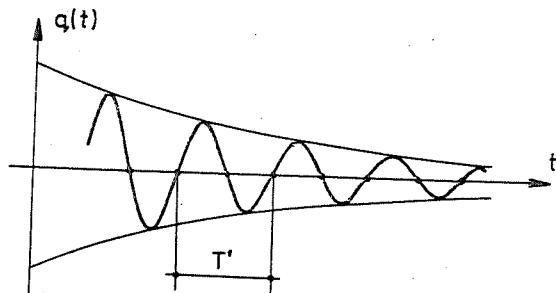
$$\alpha = \sin \beta, \quad \sqrt{1-\alpha^2} = \cos \beta. \quad (2.11)$$

Ostateczny wynik przybierze postać

$$q(t) = q_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t - \beta)}{\cos \beta} + \dot{q}_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\sin \omega' t}{\omega \cos \beta},$$

$$\dot{q}(t) = -q_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\omega \sin \omega' t}{\cos \beta} + \dot{q}_0 e^{-\alpha \omega t} \frac{\cos(\omega' t + \beta)}{\cos \beta}. \quad (2.12)$$

Ruch opisany funkcjami (2.12) jest quasi-harmonicznym ruchem zanikającym, modulowanym funkcją wykładniczą $e^{-\alpha \omega t}$. Wykres ruchu jest



Rys. 2.2

poglądowo przedstawiony na rys. 2.2. Quasi-częstość kołowa oraz quasi-okres drgań tłumionych określają wzory

$$\omega' = \omega \sqrt{1-\alpha^2} = \omega \cos \beta < \omega,$$

$$T' = 2\pi/\omega' = T/\sqrt{1-\alpha^2} = T/\cos \beta > T. \quad (2.13)$$

Opisane powyżej rozwiązanie o charakterze oscylacyjnym jest słuszne, gdy określony wzorem (2.8) bezwymiarowy parametr α , zwany liczbą tłumienia, zawiera się w przedziale $0 < \alpha < 1$. W przypadku $\alpha > 1$ ruch zanika w sposób nieoscylacyjny (aperiodyczny), a tłumienie okreś-

lone liczbą $\alpha = 1$ nazywamy tłumieniem krytycznym. W konstrukcjach budowlanych liczba tłumienia jest na ogół ułamkiem znacznie mniejszym od jedności, nie będziemy zatem dokładniej analizować przypadku tłumienia nadkrytycznego. Niekiedy liczbę tłumienia określa się procentowo w stosunku do tłumienia krytycznego na podstawie wzoru

$$\alpha_p = 100\alpha\% = 50 c/\sqrt{km} \%. \quad (2.14)$$

Liczbę tłumienia można wyznaczać doświadczalnie, badając stosunek wychylenia $q(t)$ do wychylenia $q(t+T')$ = $e^{-\alpha \omega T'}$ $q(t)$. Wielkość bezwymiarową

$$\vartheta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T')} = \alpha \omega T' = 2\pi \alpha \sqrt{1-\alpha^2} = 2\pi \alpha \beta, \quad (2.15)$$

nazywamy logarytmicznym dekrementem tłumienia. Dekrement tłumienia ma sens jedynie w przypadku tłumienia podkrytycznego, jeśli zanikanie amplitud ma charakter eksponencjalny. W przypadku bardzo małego tłumienia wygodnie jest korzystać z wzoru

$$\vartheta = \frac{1}{n} \ln \frac{q(t)}{q(t+nT')}, \quad (2.16)$$

gdzie n jest liczbą naturalną większą od jedności. Z wzoru (2.15) wynika, że

$$\alpha = \vartheta / \sqrt{4\pi^2 + \vartheta^2} \approx \vartheta / 2\pi, \quad (2.17)$$

przy czym relacja przybliżona jest słuszna, gdy $\vartheta \ll 2\pi$.

Do opisu tłumienia używa się również bezwymiarowego współczynnika tłumienia

$$\gamma = 2\alpha = c/\sqrt{km}, \quad (2.18)$$

który w przypadku tłumienia podkrytycznego zawiera się w przedziale $0 \leq \gamma < 2$. Dla konstrukcji budowlanych współczynnik γ zawiera się przeciętnie w granicach określonych w tab. 2.1.

Wszystkie omówione parametry tłumienia, a więc α , α_p , β , ϑ , γ , są indywidualnymi cechami obiektu, wzajemnie uzależnionymi.

W procesie drgań następuje cykliczna przemiana energii kinetycznej w potencjalną i odwrotnie, przy czym w danej chwili łączna energia drgań

$$E(t) = E_p + E_k = \frac{1}{2} k q^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 = \frac{1}{2} k (q^2 + \dot{q}^2/\omega^2). \quad (2.19)$$

Tabela 2.1

Współczynniki tłumienia	
Konstrukcje	γ
stalowe	0,010-0,025
drewniane	0,030-0,050
murowe	0,040-0,080
żelbetowe	0,050-0,100

Zakładamy $q_0 = a$ oraz $\dot{q}_0 = 0$. Wtedy zgodnie z (2.12)

$$q(t) = ae^{-\alpha\omega t} \cos(\omega't - \beta) / \cos \beta,$$

$$\dot{q}(t) = -a\omega e^{-\alpha\omega t} \sin \omega't / \cos \beta,$$

a zatem

$$E(t) = \frac{1}{2} k a^2 e^{-2\alpha\omega t} [\cos^2(\omega't - \beta) + \sin^2 \omega't] / \cos^2 \beta.$$

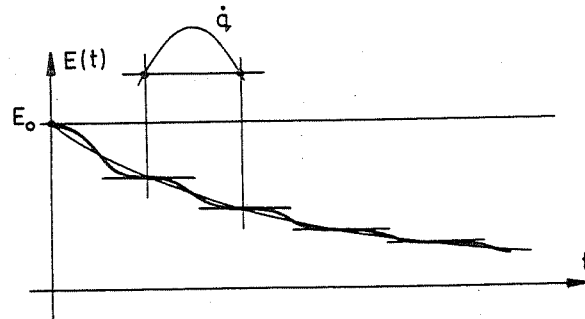
Wykorzystując tożsamość trygonometryczną

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1 + \sin(x+y) \sin(x-y)$$

i oznaczając $ka^2/2 = E_0$, ostatecznie otrzymamy

$$E(t) = E_0 \frac{e^{-2\alpha\omega t}}{1 - \alpha^2} [1 + \alpha \sin(2\omega't - \beta)]. \quad (2.20)$$

Wykres funkcji $E(t)$ jest poglądowo przedstawiony na rys. 2.3.



Rys. 2.3

Energia drgań tłumionych zmniejsza się generalnie według funkcji wykładniczej, jednakże z cyklicznymi zaburzeniami. Strata energii następuje kosztem energii kinetycznej. Zauważmy, że

$$\dot{E}(t) = kq\dot{q} + m\dot{q}\ddot{q} = (kq + m\ddot{q})\dot{q} = -c\dot{q}^2 \leq 0.$$

Oznacza to, że funkcja $E(t)$ jest stale malejąca z wyjątkiem chwil, w których $\dot{q} = 0$. W chwilach tych funkcja $E(t)$ ma punkty przegięcia i gradient straty energii jest równy zero. Logarytmiczny dekrement energii, czyli logarytm naturalny stosunku poziomów energetycznych w odstępie jednego cyklu, jest opisany wzorem

$$\ln \frac{E(t)}{E(t+T')} = 2\alpha\omega T' = 2\theta. \quad (2.21)$$

W przypadku drgań nietłumionych $E(t) = E_0 = \text{const.}$

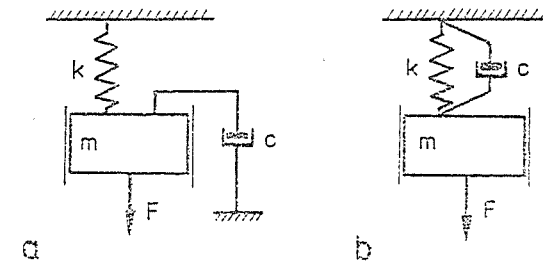
2.4. Warianty modelu tłumienia. Wyteżenie konstrukcji

Stan przemieszczenia konstrukcji odkształcalnej stanowi podstawę do określenia stanu wyteżenia konstrukcji, jeśli znane są związki fizyczne między tymi stanami. Reakcja więzi odkształcalnej, wynikająca z fizyko mechanicznych cech materiału konstrukcji, zgodnie z zasadą d'Alemberta powinna być równa obciążeniu kinetycznemu złożonemu z siły wzbudzającej, siły bezwładności i innych sił o charakterze zewnętrznym w stosunku do tej więzi. Innymi słowy, siły występujące w równaniu (2.2) powinny być podzielone na dwie wzajemnie równoważące się grupy, z których jedna reprezentuje obciążenie, a druga reakcją konstrukcji na to obciążenie. Definicja obciążenia kinetycznego nie jest oczywista, konstrukcje budowlane bowiem wykazują własności tłumiące, nie zawierając na ogół w sposób jawny tłumików służących wyłącznie do rozpraszania energii. W tej sytuacji możliwe są różne warianty modelu tłumienia i definicji wyteżenia, odpowiadające ogólnie przyjętemu założeniu o viskozycznym charakterze oporów ruchu.

Zakładamy, że konstrukcja jest zbudowana z materiału idealnie sprężystego. W tym przypadku obciążenie kinetyczne wyrazimy formułą

$$Q(t) = kq = F - m\ddot{q} - c\dot{q}, \quad (2.22)$$

w której opory ruchu zostały zakwalifikowane do grupy sił zewnętrznych i skojarzone z siłami bezwładności (rys. 2.4a).



Rys. 2.4

W przyjętym modelu tłumik viskozyczny reprezentuje tłumienie ze strony środowiska (np. opór powietrza), a także w przybliżeniu tzw. tłumienie konstrukcyjne związane z materialnym ukształtowaniem konstrukcji. Można przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do pędu masy, a więc że

$$c = \mu m, \quad (2.23)$$

gdzie μ jest wymiarowym parametrem tłumienia, mierzonym w s^{-1} . Zgodnie z tym założeniem otrzymamy bezwymiarowy współczynnik tłumienia

$$\gamma = c/\sqrt{km} = \mu m/\sqrt{km} = \mu/\omega. \quad (2.24)$$

Założmy z kolei, że opory ruchu mają charakter wyłącznie wewnętrzny (materiałowy). W tym przypadku obciążenie kinetyczne zdefiniujemy wzorem

$$Q(t) = kq + c\dot{q} = F - m\ddot{q}. \quad (2.25)$$

Można tu przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do prędkości reakcji sprężystej, a więc że

$$c = \kappa k, \quad (2.26)$$

gdzie κ jest wymiarowym parametrem tłumienia materiałowego, mierzonym w sekundach (czas retardacji), co odpowiada reologicznemu modelowi ciała Voigta-Kelvina, jak na rys. 2.4b. W tym przypadku bezwymiarowy współczynnik tłumienia

$$\gamma = c/\sqrt{km} = \kappa k/\sqrt{km} = \kappa\omega. \quad (2.27)$$

Możliwy jest również wariant kombinowany, w którym

$$Q(t) = k(q + \mu\dot{q}) = F - m(\ddot{q} + \mu\dot{q}),$$

$$c = \kappa k + \mu m, \quad (2.28)$$

$$\gamma = \kappa\omega + \mu/\omega.$$

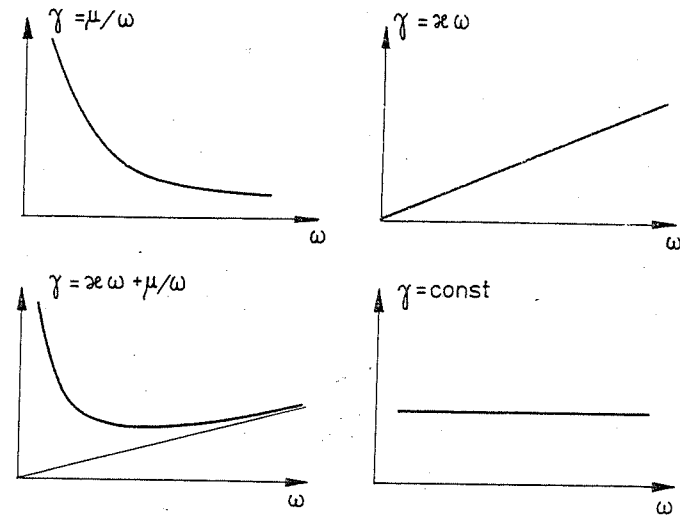
Uwzględnione są tu zarówno wewnętrzne, jak i zewnętrzne opory ruchu.

Rzeczywista natura oporów ruchu w konstrukcjach budowlanych nie jest dostatecznie dobrze poznana. Zasadnicze znaczenie przypisuje się często oporom wewnętrznym, o których istnieniu świadczy histereza wykresów σ - ϵ . Badania doświadczalne nie potwierdzają jednak jednoznacznej zależności współczynnika γ od częstości ω , jaką otrzymaliśmy dla modelu Voigta-Kelvina i wskazują na to, że cechą własności tłumiących określonego rodzaju konstrukcji jest bezwymiarowy współczynnik tłumienia na ogół skądś zależny lub nawet niezależny od częstości. Od częstości natomiast należy raczej uzależnić parametr κ , przy czym zgodnie z wzorem (2.27)

$$\kappa = \gamma/\omega. \quad (2.29)$$

W dalszych rozważaniach będziemy w zasadzie korzystali z relacji (2.25) z uwzględnieniem (2.26) i (2.29). Nie sprawi to trudności w analizie układów o jednym stopniu swobody. Omawiając układy dyskretnie i ciągle rozpatrzmy problem tłumienia ponownie.

Wykresy zależności współczynnika γ od częstości drgań własnych, odpowiadające omówionym wariantom modelu tłumienia wiskotycznego, są poglądowo przedstawione na rys. 2.5.



Rys. 2.5

2.5. Drgania wymuszone harmoniczne

Założmy, że siła wzbudzająca w równaniu (2.2) jest harmoniczną funkcją czasu. Równanie ruchu przybierze postać

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F_s \sin pt + F_c \cos pt, \quad (2.30)$$

gdzie p jest częstością kołową wzbudzenia. Oznaczając $k/m = \omega^2$, $c/\sqrt{km} = \gamma$, równanie to sprowadzimy do postaci

$$\ddot{q} + \gamma\omega\dot{q} + \omega^2 q = (F_s \sin pt + F_c \cos pt) \omega^2/k. \quad (2.31)$$

W przypadku układów rzeczywistych całka ogólna równania jednorodnego jest funkcją zanikającą, skupimy zatem uwagę na całce szczególnej równania niejednorodnego, której będziemy poszukiwać w postaci funkcji harmonicznnej

$$q(t) = q_s \sin pt + q_c \cos pt. \quad (2.32)$$

Równanie (2.31) po podstawieniu (2.32) powinno być spełnione tożsamościowo (w każdej chwili). Wynikają stąd dwa równania algebraiczne

$$(\omega^2 - p^2)q_s - \gamma\omega p q_c = F_s \omega^2/k,$$

$$\gamma\omega p q_s + (\omega^2 - p^2)q_c = F_c \omega^2/k.$$

Oznaczając $p/\omega = \eta$, równania te doprowadzimy do postaci

$$\begin{aligned} (1 - \eta^2)q_s - \gamma\eta q_c &= F_s/k, \\ \gamma\eta q_s + (1 - \eta^2)q_c &= F_c/k \end{aligned} \quad (2.33)$$

i obliczymy pierwiastki

$$q_s = h F_s + h' F_c, \quad q_c = -h' F_s + h F_c, \quad (2.34)$$

przy czym

$$h = \frac{1}{k} \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}, \quad h' = \frac{1}{k} \frac{\gamma \eta}{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}. \quad (2.35)$$

Rrgania ustalone można więc opisać wzorami

$$q(t) = F_s(h \sin pt - h' \cos pt) + \quad (2.36)$$

$$+ F_c(h' \sin pt + h \cos pt) = \frac{v}{k} F_s \sin(pt - \psi) + \frac{v}{k} F_c \cos(pt - \psi),$$

$$\text{am } q = \frac{v}{k} \sqrt{k_s^2 + k_c^2} = \frac{v}{k} \text{am } r,$$

gdzie

$$v = 1/\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \gamma^2 \eta^2}, \quad \psi = \text{arctg} [\gamma\eta/(1 - \eta^2)]. \quad (2.37)$$

Przebieg czasowy przemieszczenia jest odwzorowaniem przebiegu siły wzбудzającej z opóźnieniem fazowym ψ . wielkość bezwymiarową v nazywamy współczynnikiem dynamicznym. W przypadku pomijalnie małego tłumienia

$$v = 1/|1 - \eta^2|. \quad (2.38)$$

Przypadek $\eta = 1$, odpowiadający równości $p = \omega$, nazywamy stanem rezonansowym lub krótko rezonansem. Rezonansowe opóźnienie fazowe $\psi = \pi/2$, niezależnie od mocy tłumienia, natomiast rezonansowy współczynnik dynamiczny

$$v_r = 1/\gamma. \quad (2.39)$$

Dokładne maksimum współczynnika dynamicznego znajduje się w punkcie $\eta = \sqrt{1 - \gamma^2/2} < 1$ i wynosi

$$v_{\max} = 1/(\gamma\sqrt{1 - \gamma^2/4}) > v_r. \quad (2.40)$$

pod warunkiem, że $\gamma < \sqrt{2}$. W przypadku dostatecznie małego tłumienia różnica między wartościami v_r oraz v_{\max} jest znikoma i w praktyce można stosować wzór (2.39). Gdy $\gamma < 0,28$, błąd względny jest mniejszy niż 1%, a przy $\gamma = 0,09$ błąd względny jest rzędu 1%. Rezonansowa wartość współczynnika dynamicznego waha się na to, jak istotne znaczenie może mieć wybór modelu tłumienia (por. rys. 2.5) oraz do jakiego generatora tłumienia.

Obciążeniem kinetycznym układu (przy założeniu modelu Voigta-Kelvina z parametrem $\kappa = \gamma/\omega$) jest siła

$$\begin{aligned} Q(t) &= k(q + \frac{\gamma}{\omega} \dot{q}) = \\ &= v(F_s - \gamma\eta F_c) \sin(pt - \psi) + v(F_c + \gamma\eta F_s) \cos(pt - \psi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

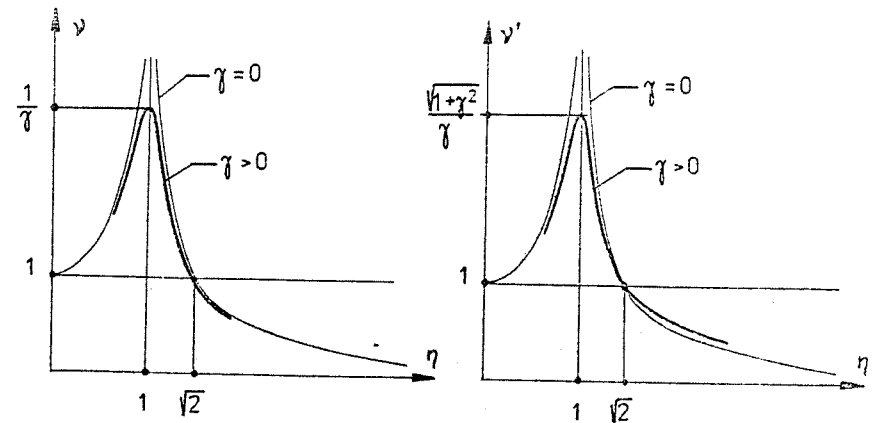
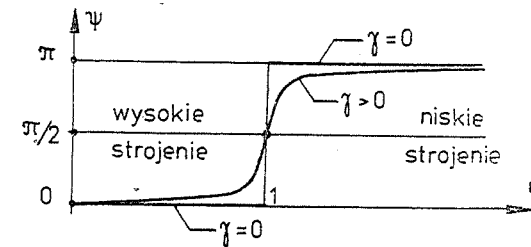
o amplitudzie

$$\text{am } Q = \sqrt{Q_s^2 + Q_c^2} = v\sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2} \cdot \text{am } F = v' \cdot \text{am } F, \quad (2.42)$$

gdzie

$$v' = v\sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2}. \quad (2.43)$$

Poglądowe wykresy funkcji ψ , v , v' są przedstawione na rys. 2.6.



rys. 2.6

2.6. Wymuszenie bezwładnościowe

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 2.7, w którym masa m_0 , będąca częścią masy m , wykonuje ruch obrotowy na mimosrodzie e z prędkością kątową p . Podczas takiego ruchu powstaje siła odśrodkowa

$$\vec{F}_0 = m_0 e p^2 = \mathcal{M}_0 p^2, \quad (2.44)$$

przy czym $\mathcal{M}_0 = m_0 e$ jest masowym momentem niewyważenia obrotowego. Rzut wirującej siły odśrodkowej na kierunek drgań określa wzór

$$\vec{F}(t) = F_0 \cos pt, \quad (2.45)$$

a więc

$$\text{am } q = \frac{v}{k} F_0, \quad \text{am } Q = v' F_0. \quad (2.46)$$

Opisany układ może być modelem ustroju, w którym źródłem wzbudzenia jest maszyna wirnikowa. Wzbudzenie tego typu nazywamy wymuszeniem bezwładnościowym. Stosując wzory (2.46) należy pamiętać o tym, że wartość siły F_0 zależy od częstości kołowej wzbudzenia, współczynniki dynamiczne v oraz v' nie opisują przeto w pełni zjawiska przy częstościach wzbudzenia przyjmujących różne wartości. Pełną odpowiedź otrzymamy uwzględniając (2.44), a zatem

$$\text{am } q = \frac{v}{k} \mathcal{M}_0 p^2 = \frac{v}{k} \mathcal{M}_0 \eta^2 \omega^2 = v \eta^2 \mathcal{M}_0 / m, \quad (2.47)$$

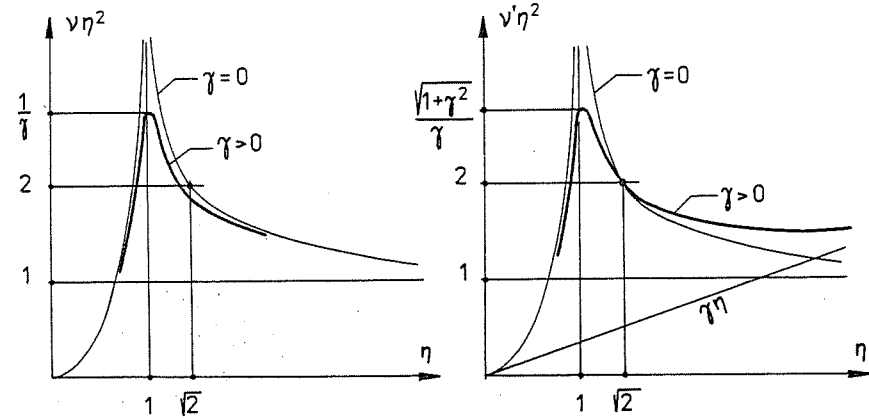
$$\text{am } Q = v' \mathcal{M}_0 p^2 = v' \mathcal{M}_0 \eta^2 \omega^2 = v' \eta^2 \mathcal{M}_0 \omega^2.$$

Jak widać, amplitudy przemieszczenia i obciążenia kinetycznego przy różnych częstościach wzbudzenia są regulowane nowymi funkcjami $v \eta^2$ oraz $v' \eta^2$. Poglądowe wykresy tych funkcji są przedstawione na rys. 2.8.

Cechą funkcji $v \eta^2$ jest to, że w strefie niskiego strojenia ($\eta > 1$) zmierza ona asymptotycznie do jedności, niezależnie od mocy tłumienia. Jeśli więc jest $p \gg \omega$, to $\text{am } q \approx \mathcal{M}_0 / m$, a stąd

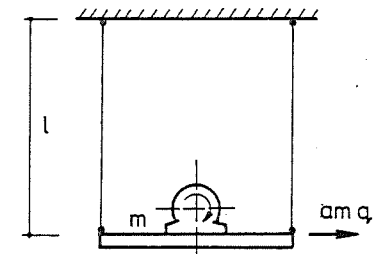
$$\mathcal{M}_0 \approx m \cdot \text{am } q. \quad (2.48)$$

Zależność ta może być podstawą doświadczalnego określania masowego momentu niewyważenia maszyny wirnikowej. Dogodnym układem pomiarowym jest np. wahadko fizyczne w formie wiszącego pomostu, na którym



Rys. 2.8

spoczywa badane urządzenie (rys. 2.9). Częstość poziomych drgań własnych wahadła wynosi w przybliżeniu $\omega = \sqrt{g/l}$ i można bez trudu dobrać tak długość wahadła l , aby było $\omega \ll p$. Wprowadzwszy masę m_0 w ruch obrotowy należy zmierzyć amplitudę poziomych drgań wymuszonych i skorzystać z wzoru (2.48). Wielkość m jest tu łączną masą badanego urządzenia i pomostu.



Rys. 2.9

2.7. Proces przejściowy

Drgania ustalone spowodowane stacjonarnym wymuszeniem harmonicznym są procesem realizującym się asymptotycznie przy założeniu, że czas obserwacji procesu jest dostatecznie odległy od chwili początkowej, w której wzbudzenie zostało zainicjowane. Przebieg zjawiska w początkowym przedziale czasu lub w przedziale końcowym, w którym wzbudzenie wygasa, nazywamy procesem przejściowym.

Założmy wstępnie, że podczas rozbiegu masy m_0 częstość wzbudzenia jest proporcjonalna do czasu (ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony), a więc

$$p(t) = \eta \omega = \dot{p} t, \quad (2.49)$$

gdzie $\dot{p} = \text{const}$ jest ustalonym przyspieszeniem kątowym masy m_0 w ruchu obrotowym (rys. 2.7), inaczej - przyspieszeniem fazy wzbudzenia. Oś η może być w tym przypadku traktowana jako przeskalowana oś czasu (istotnie, $\eta = \dot{p}t/\omega$), a funkcje (2.47), ilustrowane wykresami na rys. 2.8, można interpretować jako obwiednie chwilowych amplitud podczas rozbiegu masy m_0 przy zerowych warunkach początkowych. Jest to ilustracja procesu przejściowego, a w tym także zjawiska rezonansu przejściowego, w pewnej bowiem chwili $p(t) = \omega$ i amplitudy chwilowe osiągną kulminacje rezonansowe. Rozumowanie jest słuszne, jeśli rozbieg jest dostatecznie powolny ($\dot{p} \ll \omega^2$). Przy znaczących wartościach \dot{p}/ω^2 zagadnienie procesu przejściowego, a zwłaszcza rezonansu przejściowego komplikuje się, nie można bowiem pominąć wpływu przyspieszenia fazy wzbudzenia w procedurze poszukiwania całki równania ruchu.

Rozważmy równanie (2.2) z warunkami

$$q(t) = 0, \quad \dot{q}(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \leq 0 \quad (2.50)$$

i załóżmy, że siła wzbudzająca jest określona pewną funkcją oscylacyjną o formule

$$F(t) = F_S(t)\sin\varphi(t) + F_C(t)\cos\varphi(t). \quad (2.51)$$

Funkcje $F_S(t)$ i $F_C(t)$ dla $t > 0$ są znanymi funkcjami czasu, znane są również rozkład prędkości fazy wzbudzenia (częstości kołowej) oraz przyspieszenie fazy

$$p(t) = \dot{\varphi}(t), \quad \dot{p}(t) = \ddot{\varphi}(t), \quad (2.52)$$

natomiast funkcja

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t p(t)dt, \quad (2.53)$$

zgodnie z fizyczną rzeczywistością, nie jest znana, może być bowiem wyznaczona jedynie z dokładnością do wartości stałej. W tej sytuacji funkcja (2.51) nie jest jednoznacznie określona, znana jest natomiast jej majoranta

$$\hat{r}(t) = \sqrt{F_S^2(t) + F_C^2(t)}. \quad (2.54)$$

Równanie ruchu (2.2) zapiszemy w postaci

$$\ddot{q} + \gamma\omega\dot{q} + \omega^2q = \frac{1}{m}F(t). \quad (2.55)$$

Całki tego równania będziemy poszukiwali w postaci analogicznej do (2.51) funkcji oscylacyjnej

$$q(t) = q_S(t)\sin\varphi(t) + q_C(t)\cos\varphi(t). \quad (2.56)$$

Pochodne kinematyczne mają postać

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_S - p\dot{q}_C)\sin\varphi + (\dot{q}_C + p\dot{q}_S)\cos\varphi, \quad (2.57)$$

$$\ddot{q}(t) = (\ddot{q}_S - p^2\dot{q}_S - 2p\dot{q}_C - \dot{p}q_C)\sin\varphi + (\ddot{q}_C - p^2\dot{q}_C + 2p\dot{q}_S + \dot{p}q_S)\cos\varphi.$$

Wyrażenia (2.56) i (2.57) należy podstawić do równania (2.55). Funkcja (2.56) będzie całką tego równania, jeśli spełniony będzie układ sprzężonych równań różniczkowych o zmiennych w czasie współczynnikach

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_S \\ \ddot{q}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma\omega & -2p \\ 2p & \gamma\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_S \\ \dot{q}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 - p^2 & -\gamma\omega p - \dot{p} \\ \gamma\omega p + \dot{p} & \omega^2 - p^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_S \\ q_C \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_S \\ F_C \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

przy czym nieznanne funkcje $q_S(t)$ oraz $q_C(t)$ ze względu na (2.50) powinny spełniać zerowe warunki początkowe. Równania te mogą być rozwiązane jedynie metodami numerycznymi. Formuła ruchu (2.56) nie może być jednoznacznie określona ze względu na brak pełnej informacji o funkcji $\varphi(t)$, niemniej rozwiązanie równań (2.58) umożliwia wyznaczenie majoranty ruchu

$$\hat{q}(t) = \sqrt{q_S^2(t) + q_C^2(t)}. \quad (2.59)$$

Obciążenie kinetyczne zgodnie z (2.41) wyrazimy formułą

$$Q(t) = k\left(q + \frac{Y}{\omega} \dot{q}\right) = k\left(q_S + \frac{Y}{\omega}\dot{q}_S - \frac{Yp}{\omega}\dot{q}_C\right)\sin\varphi + k\left(q_C + \frac{Y}{\omega}\dot{q}_C + \frac{Yp}{\omega}\dot{q}_S\right)\cos\varphi, \quad (2.60)$$

a więc

$$Q_S(t) = k\left(q_S + \frac{Y}{\omega}\dot{q}_S - \frac{Yp}{\omega}\dot{q}_C\right), \quad Q_C(t) = k\left(q_C + \frac{Y}{\omega}\dot{q}_C + \frac{Yp}{\omega}\dot{q}_S\right)$$

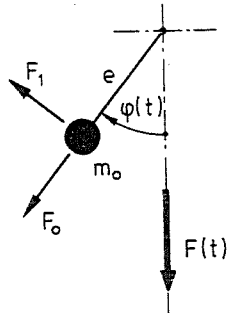
oraz

$$\hat{Q}(t) = \sqrt{Q_S^2(t) + Q_C^2(t)}. \quad (2.61)$$

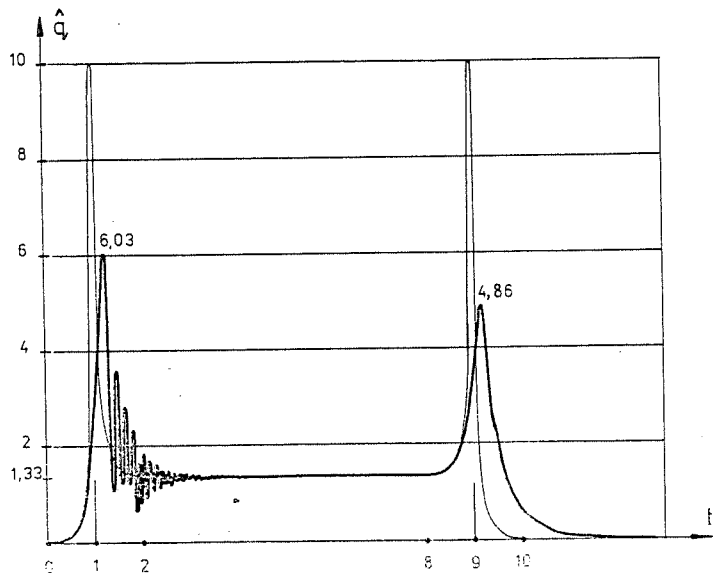
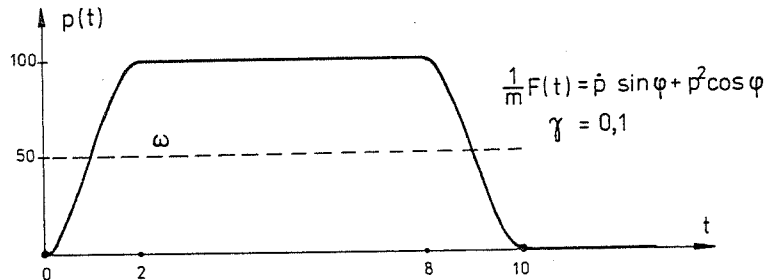
W ten sposób majorancie wzbudzenia (2.54) zostały przyporządkowane majoranty rozwiązań (2.59) i (2.61).

Zauważmy, że w przedziale stacjonarnego wzbudzenia jest $p = \text{const}$, $\dot{p} = 0$, $F_S = \text{const}$, $F_C = \text{const}$. Równania (2.58) przekształcają się na układ o stałych współczynnikach z ustaloną prawą stroną. Rozwiązanie takiego układu asymptotycznie zmierza do rozwiązania znanego układu równań algebraicznych (2.33), jak być powinno.

W przypadku wymuszenia bezwładnościowego ze zmienną częstością wzbudzenia, oprócz siły odśrodkowej $r_0 = m_0\omega p^2 = \mathcal{N}_0 p^2$, pojawia się



Rys. 2.10



Rys. 2.11

również styczna siła bezwładności $F_1 = -m_0 \dot{e} \dot{p} = -\mathcal{N}_0 \dot{p}$ (rys. 2.10). Rzutując te siły na kierunek drgań, otrzymamy

$$F(t) = \mathcal{N}_0 \dot{p} \sin(t) + \mathcal{N}_0 p^2 \cos(t), \quad (2.62)$$

$$\hat{F}(t) = \mathcal{N}_0 \sqrt{p^4 + \dot{p}^2}.$$

Poglądowy przykład rozwiązania procesu przejściowego jest przedstawiony na rys. 2.11. Linia cienką oznaczono tło odpowiadające elementarnemu rozwiązaniu na podstawie równań (2.33). Charakterystyczną cechą zjawiska rezonansu przejściowego jest opóźnienie kulminacji

efektu dynamicznego oraz zmniejszenie wartości rezonansowej w stosunku do wyniku określonego wzorem (2.47).

2.8. Wymuszenie kinematyczne

Rozważmy układ, jak na rys. 2.12. Ruch jest tu wymuszony określonymi drganiami $z(t)$ wykonywanymi przez ostoję. Masa m wykonuje ruch złożony ze składowej kinematycznej $z(t)$ oraz składowej względnej $q(t)$. Równanie ruchu ma postać

$$m(\ddot{z} + \ddot{q}) + c\dot{q} + kq = 0. \quad (2.63)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie ruchu względnego

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = -m\ddot{z} = F(t). \quad (2.64)$$

Siła wzbudzająca jest tu równa sile bezwładności wynikającej ze składowej kinematycznej. W przypadku wzbudzenia harmonicznego $z(t) = A \sin pt$ otrzymamy siłę wzbudzającą $F(t) = mAp^2 \sin pt$, a więc zgodnie z (2.36) i (2.42)

$$q(t) = am q \cdot \sin(pt - \psi),$$

$$am q = \frac{v}{k} mAp^2 = v\eta^2 A, \quad (2.65)$$

$$am Q = v' mAp^2 = v'\eta^2 kA.$$

Całkowite przemieszczenie masy wyraża wzór

$$(z + q) = A \sin pt + v\eta^2 A \sin(pt - \psi), \quad (2.66)$$

a zatem zgodnie z (1.39)

$$am(z+q) = A \sqrt{1 + v^2 \eta^4 + 2 v \eta^2 \cos \psi}. \quad (2.67)$$

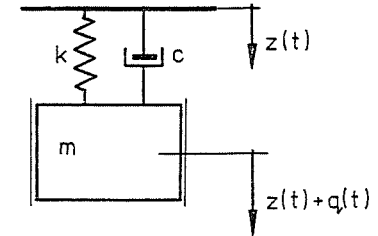
Uwzględniając to, że

$$\cos \psi = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 \psi} = (1 - \eta^2) v, \quad (2.68)$$

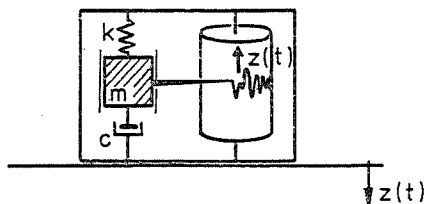
otrzymamy ostatecznie

$$am(z+q) = v \sqrt{1 + \gamma^2 \eta^2} A = v' A. \quad (2.69)$$

Zauważmy, że przy $p \gg \omega$ jest $v\eta^2 = 1$, $\psi = \pi$, $v' = 0$; wtedy $q(t) = -A \sin pt = -z(t)$ oraz $(z+q) = 0$. Masa pozostaje w spoczynku, a jej ruch względny jest odwzorowaniem przebiegu wymuszenia kinematycznego. Zjawisko to jest wykorzystywane przy budowie bezwładnościowych



Rys. 2.12



Rys. 2.13

mierników drgań (rys. 2.13). Masa zawieszona na sprężynie w obudowie miernika odtwarza za pomocą ryłka na obracającym się walcu pionowe drgania obiektu, na którym miernik został umieszczony. Mierzone mogą być drgania o częstościach dostatecznie dużych w stosunku do częstości drgań własnych zawieszanej masy.

2.9. Drgania wymuszone aperiodycznie

Rozważmy przypadek siły wzbudzającej o stałej wartości P , nagle przyłożonej w chwili $t = 0$. Równanie ruchu układu nietłumionego ma dla $t > 0$ postać

$$m\ddot{q} + kq = P, \quad (2.70)$$

a jego całka

$$q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t + P/k. \quad (2.71)$$

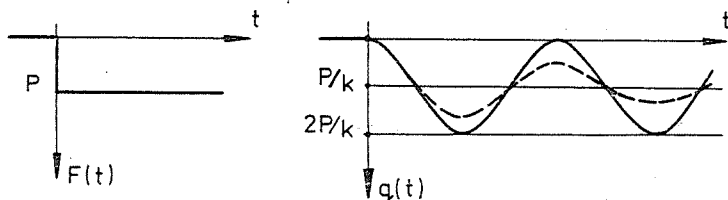
Zakładając zerowe warunki początkowe, otrzymamy $q_s = 0$ oraz $q_c = -P/k$, a zatem ostatecznie

$$q(t) = \frac{P}{k} (1 - \cos \omega t). \quad (2.72)$$

Obciążenie kinetyczne

$$Q(t) = kq = P(1 - \cos \omega t), \quad \max Q = 2P. \quad (2.73)$$

Efekt nagłego przyłożenia siły jest w początkowej fazie procesu równorzędny podwojenemu statycznemu działaniu tej siły. W przypadku układu tłumionego początkowe efekty dynamiczne są nieco mniejsze, a rozwiązanie zmierza do wartości stałej. Przyjmując $\ddot{q} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$, otrzymamy $q \rightarrow P/k$, jak w zadaniu statycznym. Przebieg czasowy siły



Rys. 2.14

wzbudzającej i przemieszczenia jest przedstawiony na rys. 2.14. Linia przerywana zaznaczona charakter odpowiedzi w układzie tłumionym.

Drugim ważnym przypadkiem wymuszenia aperiodycznego jest działanie siły narastającej liniowo od zera z wydatkiem P_1 na jednostkę czasu. Równanie ruchu układu nietłumionego ma postać

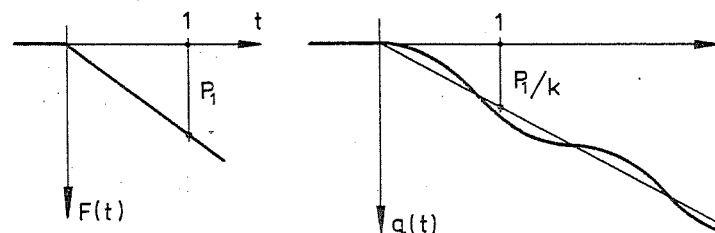
$$m\ddot{q} + kq = F(t) = P_1 t, \quad (2.74)$$

a jego rozwiązaniem po uwzględnieniu zerowych warunków początkowych jest funkcja

$$q(t) = (P_1/k) (t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t). \quad (2.75)$$

Przebieg czasowy siły wzbudzającej i przemieszczenia przedstawiono na rys. 2.15. Obciążenie kinetyczne

$$Q(t) = kq = P_1 t - (P_1/\omega) \sin \omega t = F - (P_1 T/2\pi) \sin \omega t. \quad (2.76)$$



Rys. 2.15

W omawianym zadaniu interesująca jest amplituda dynamicznego przyrostu obciążenia

$$\text{am}(Q-F) = P_1 T/2\pi. \quad (2.77)$$

Wielkość ta jest proporcjonalna do przyrostu obciążenia w okresie drgań swobodnych obiektu. Wynika stąd wniosek, że chcąc uniknąć znacznych przeciążeń dynamicznych należy układać obciążać tym wolniej, im większy jest okres jego drgań swobodnych.

Rozważmy z kolei przypadek obciążenia w formie impulsu działającego w przedziale Δt , niewspółmiernie małego wobec okresu drgań własnych obiektu. Wartość siły nie jest tu znana, wiadomo jednak, że $F\Delta t = \Pi$. Impuls Π jest popędem siły, który zostaje przetworzony na nagły przyrost pędu masy. Przy zerowych warunkach początkowych mamy po ościs realizacji impulsu $q(0+) = 0$, $\dot{q}(0+) = \Pi/m$. Równanie ruchu układu nietłumionego ma postać

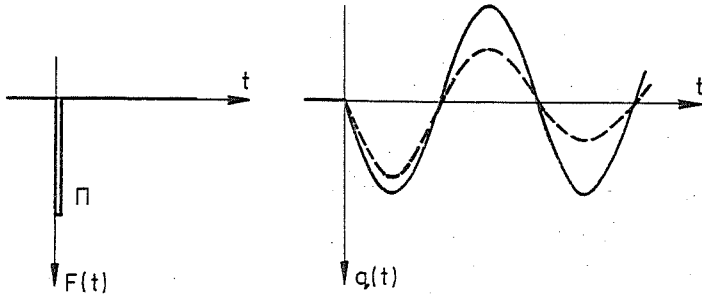
$$m\ddot{q} + kq = 0, \quad (2.78)$$

a jego całka ogólna $q(t) = q_s \sin \omega t + q_c \cos \omega t$. Z warunków granicznych otrzymujemy $q_s = \Pi/m\omega$, $q_c = 0$, a więc

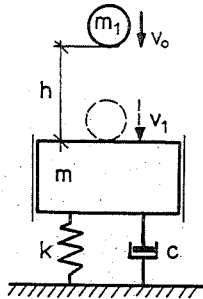
$$q(t) = \frac{\Pi}{m\omega} \sin \omega t = \frac{\Pi\omega}{k} \sin \omega t, \quad (2.79)$$

$$Q(t) = kq = \Pi\omega \sin \omega t, \quad \text{am } Q = \Pi\omega.$$

Efektym wymuszenia impulsowego są drgania swobodne. Wykres siły wzbudzającej i przemieszczenia jest przedstawiony na rys. 2.16. Linia przerywana zaznaczono charakter odpowiedzi w układzie tłumionym. Zauważmy, że efekt działania określonego impulsu zwiększa się ze wzrostem częstości drgań własnych obiektu.



Rys. 2.16



Rys. 2.17

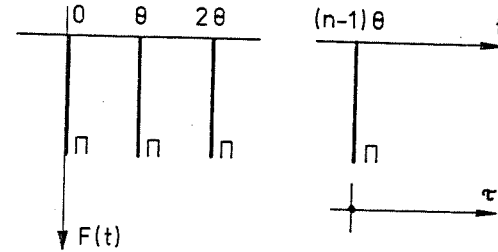
Fizyczny przypadek działania impulsu występuje podczas sprężystego uderzenia (z odskokiem) masy m przez masę m_1 z prędkością końcową v_1 (rys. 2.17). W tym przypadku impuls

$$\Pi = (1+k_u)v_1 m m_1 / (m+m_1), \quad (2.80)$$

przy czym k_u jest współczynnikiem sprężystości uderzenia, zależnym od cech materiałowych obu mas i zawartym w przedziale $(0; 1)$. W przypadku swobodnego spadania masy m_1 z wysokości h jest $v_1 = \sqrt{2gh}$, jeśli zaś masa m_1 spada z prędkością początkową v_0 , to $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

Jednym z ważnych zagadnień jest problem działania serii n impulsów Π w odstępach czasu θ (rys. 2.18). Obierając nową zmienną czasową $\tau = t - (n-1)\theta$, rozwiązanie układu tłumionego wynikające z działania ostatniego (pojedynczego) impulsu można dla $\tau > 0$ zapisać w postaci

$$q(\tau) = a e^{-\alpha\omega\tau} \sin \omega'\tau = a \cdot \text{Im } e^{(-\alpha\omega + i\omega')\tau}. \quad (2.81)$$



Rys. 2.18

Uwzględniając wpływ poprzednich impulsów, otrzymamy

$$q_n(\tau) = a \cdot \text{Im} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(-\alpha\omega + i\omega')(\tau + j\theta)}. \quad (2.82)$$

Wyrażenie pod znakiem sumy jest postępowem geometrycznym; wykonanie sumowania daje rezultat

$$q_n(\tau) = a \cdot \text{Im} \left(\frac{1 - e^{(-\alpha\omega + i\omega')n\theta}}{1 - e^{(-\alpha\omega + i\omega')\theta}} \cdot e^{(-\alpha\omega + i\omega')\tau} \right). \quad (2.83)$$

Wykorzystując zależności

$$1 - e^{x+iy} = 1 - e^x \cos y - i e^x \sin y = \sqrt{1 - 2e^x \cos y + e^{2x}} \cdot e^{-i\phi},$$

$$\phi = \arctg [e^x \sin y / (1 - e^x \cos y)],$$

rozwiązanie (2.82) można ostatecznie doprowadzić do postaci

$$q_n(\tau) = v_n a e^{-\alpha\omega\tau} \sin(\omega'\tau - \phi_n + \phi_1), \quad (2.84)$$

gdzie ϕ_n, ϕ_1 dotyczą odpowiednio licznika i mianownika we wzorze (2.83), natomiast

$$v_n = \sqrt{\frac{1 - 2e^{-\alpha\omega n\theta} \cos \omega'n\theta + e^{-2\alpha\omega n\theta}}{1 - 2e^{-\alpha\omega\theta} \cos \omega'\theta + e^{-2\alpha\omega\theta}}}. \quad (2.85)$$

Wynik (2.84) ponownie opisuje pewne drgania swobodne układu, które w stosunku do (2.81) charakteryzują się pewnym przesunięciem fazowym, a przede wszystkim współczynnikiem krotności v_n wyrażonym przez wzór (2.85). W przypadku nieskończonej licznej serii mamy dla $n \rightarrow \infty$

$$v_\infty = (1 - 2e^{-\alpha\omega\theta} \cos \omega'\theta + e^{-2\alpha\omega\theta})^{-1/2} = (1 - 2e^{-\theta\lambda} \cos 2\pi\lambda + e^{-2\theta\lambda})^{-1/2}, \quad (2.86)$$

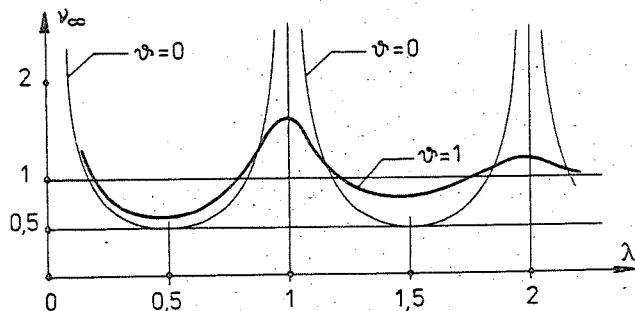
gdzie

$$\vartheta = \alpha \omega T', \quad \lambda = \theta/T'. \quad (2.87)$$

Z wzoru (2.85) wynika, że w przypadku serii ograniczonej

$$v_n = v_{\infty}(\lambda)/v_{\infty}(n\lambda). \quad (2.88)$$

Należy tu zwrócić uwagę na to, że działanie ograniczonej serii impulsów może w pewnych przypadkach dawać wyniki bardziej niekorzystne niż działanie serii nieskończenie licznej. Poglądowe wykresy funkcji $v_{\infty}(\lambda)$ są przedstawione na rys. 2.19. Linia cienką zaznaczono rozwiązanie z pominięciem tłumienia.



Rys. 2.19

Szpecially prosty wynik otrzymuje się wtedy, gdy θ jest całkowitą wielokrotnością okresu drgań swobodnych (rezonans udarowy). W tym przypadku $\cos \alpha \omega \theta = \cos 2\pi\lambda = 1$, a zatem

$$v_{\infty} = 1/(1 - e^{-\alpha \omega \theta}) = 1/(1 - e^{-\vartheta \lambda}), \quad (2.89)$$

przy czym najbardziej niekorzystne rezultaty daje tu zawsze seria nieskończenie liczna.

Jako kolejny przypadek wymuszania aperiodycznego rozpatrzmy uderzenie plastyczne (bez odskoku), przy którym siła wzbudząca składa się z impulsu początkowego Π i trwale przyłożonej siły P . Sumując wyniki (2.72) i (2.79), otrzymamy

$$q(t) = \frac{1}{k}(P + \Pi \sin \omega t - P \cos \omega t), \quad (2.90)$$

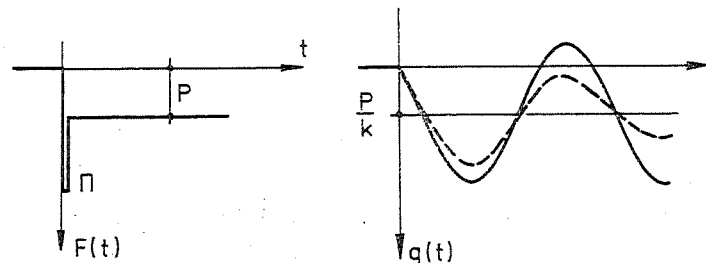
$$Q(t) = kq = P + \Pi \sin \omega t - P \cos \omega t,$$

$$\max Q = P + \sqrt{(\Pi \omega)^2 + P^2}.$$

Wykres siły wzbudzącej i przemieszczenia jest pokazany na rys. 2.20. Linia przerywaną zaznaczono charakter odpowiedzi w układzie tłu-

mionym. W przypadku uderzenia plastycznego masy m przez pionowo spadającą masę m_1 należy przyjąć $P = m_1 g$, $\Pi = m_1 v_1$, $\omega^2 = k/(m+m_1)$. Jeśli $v_1 = \sqrt{2gh}$, to

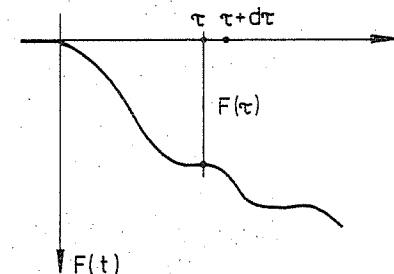
$$\max Q = m_1 g (1 + \sqrt{1 + 2\omega^2 h/g}). \quad (2.91)$$



Rys. 2.20

Rozważmy w końcu ogólny przypadek siły wzbudzącej w formie dowolnej całkownej funkcji czasu, jak na rys. 2.21. Siłę taką możemy myślowo podzielić na różniczkowe impulsy $d\Pi = F(\tau)d\tau$, a stąd zgodnie z (2.79)

$$\begin{aligned} dq &= \frac{d\Pi}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) = \\ &= \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.92)$$



Rys. 2.21

Przyjmując zerowe warunki początkowe, ostatecznie otrzymamy rozwiązanie w postaci całki Duhamela

$$q(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad (2.93)$$

$$Q(t) = kq = \omega \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau.$$

W przypadku układu tłumionego

$$q(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) e^{-\alpha\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau. \quad (2.94)$$

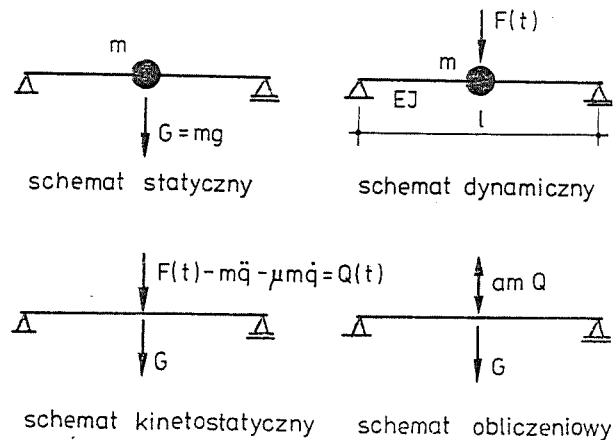
Może się zdarzyć, że funkcja $F(t)$ jest określona przez pomiar i nie ma formuły analitycznej. Rozwiązania typu (2.93) lub (2.94) moż-

na wówczas uzyskać obliczając numerycznie występujące tam całki. Na ogół wygodniej jest jednak bezpośrednio całkować numerycznie równanie ruchu (2.2).

2.10. Zasady projektowania. Zmęczenie

Prawidłowo zaprojektowana konstrukcja budowlana powinna się charakteryzować tym, że jej przemieszczenia są zawarte w granicach uznanych za dopuszczalne. Ograniczeniom mogą podlegać bądź tylko przemieszczenia statyczne, bądź łączne przemieszczenia statyczno-dynamiczne lub wyłącznie przemieszczenia czysto dynamiczne (np. w blokowych fundamentach pod maszyny). Stan przemieszczenia konstrukcji spowodowany obciążeniami dynamicznymi wynika wprost z rozwiązania równań ruchu.

Drugim kryterium poprawności konstrukcji jest określony poziom stanu wytężenia. Na pełny stan wytężenia konstrukcji składa się wytężenie statyczne wynikające z działania ciężaru własnego i statycznych obciążeń użytkowych oraz wytężenie dynamiczne. Stan dynamicznego wytężenia konstrukcji określa się metodami statyki budowli, przy czym zgodnie z zasadą d'Alemberta do obciążeń zalicza się siły wzbudzające, siły bezwładności i ewentualne opory ruchu, jeśli nadaje się im sens sił zewnętrznych. Siły te łącznie tworzą obciążenie kinetyczne $Q(t)$,



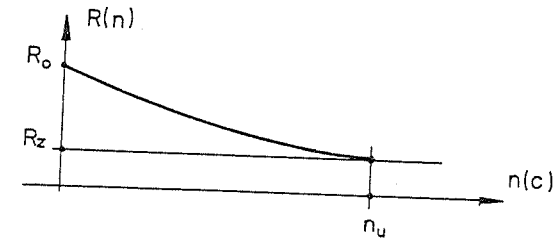
Rys. 2.22

przy czym z punktu widzenia projektowania istotne są ekstremalne wartości obciążenia kinetycznego. Idea przetworzenia statycznego a dynamicznego schematu konstrukcji na schemat obliczeniowy, przydatny do określenia stanu wytężenia, jest przedstawiona na rys. 2.22.

Przy kontroli naprężeń należy uwzględnić pewną właściwość materiałów, zwaną zmęczeniem. Liczne badania (zapooczątkowane przez Wöhlera w XIX w.) wykazały, że w przypadku cyklicznie zmiennego stanu wytężenia podstawowa (statyczna) wytrzymałość materiału R_0 zmniejsza się w miarę wzrostu liczby cykli i przy pewnej umownej dużej ich liczbie osiąga wartość R_z , zwaną wytrzymałością zmęczeniową. Współczynnik

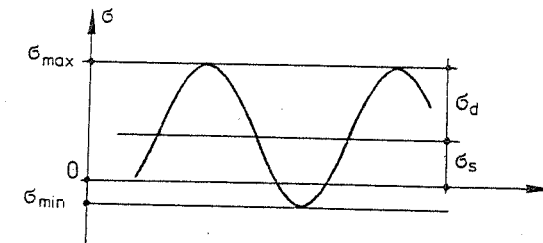
$$\zeta = R_0/R_z \quad (2.95)$$

nazywamy podstawowym współczynnikiem zmęczeniowym dla cyklu symetrycznego (rys. 2.23).



Rys. 2.23

W praktyce występują zwykle złożone stany naprężenia, statyczno-dynamiczne, charakteryzujące się asymetrią cyklu, jak na rys. 2.24.



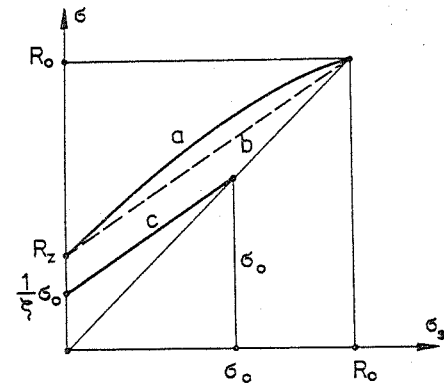
Rys. 2.24

W regularnym cyklu asymetrycznym możemy wyróżnić statyczny składnik naprężenia σ_s oraz amplitudę symetrycznego składnika dynamicznego σ_d

$$\sigma_s = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} + \sigma_{\min}|; \quad \sigma_d = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| \quad (2.96)$$

Zmianę wytrzymałości zmęczeniowej w zależności od udziału naprężeń statycznych w materiale o jednorodnych właściwościach ilustruje linia "a" na rys. 2.25. Zależność tę będziemy aproksymowali na korzyść

bezpieczeństwa odcinkiem prostym "b". Zmianę naprężenia dopuszczalnego ilustruje odcinek "c". Punkt szczytowy naprężenia dopuszczalnego jest na wysokości statycznego naprężenia dopuszczalnego σ_0 , w tym bowiem przypadku nie ma już miejsca



Rys. 2.25

na naprężenia dynamiczne, jako że $\sigma_s = \sigma_0$. Punkt początkowy linii "c" jest oparty na rzędnej $\sigma_0 R_z / R_0 = \sigma_0 / \zeta$ wynikającej z postulatu ustalonego współczynnika bezpieczeństwa; w tym przypadku $\sigma_s = 0$, co odpowiada cyklowi symetrycznemu. Odcinek "c" jest fragmentem linii prostej o równaniu

$$\sigma = \frac{1}{\zeta} \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \sigma_s, \quad (2.97)$$

a zatem warunek wytrzymałościowy ma postać

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_s + \sigma_d \leq \frac{1}{\zeta} \sigma_0 + \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \sigma_s. \quad (2.98)$$

Po przekształceniu tej nierówności otrzymuje się praktycznie przydatną relację

$$\sigma_s + \zeta \sigma_d \leq \sigma_0, \quad (2.99)$$

gdzie σ_0 jest naprężeniem dopuszczalnym w warunkach statycznych, bez uwzględnienia zmęczenia. W myśl relacji (2.99) uwzględnienie zmęczenia polega na wprowadzeniu do elementarnego warunku wytrzymałościowego pozornie zwiększonych naprężeń dynamicznych.

Mnożąc relację (2.99) przez $|\sigma|_{\max} = \sigma_s + \sigma_d$ oraz dzieląc ją jednocześnie przez $\sigma_s + \zeta \sigma_d$, dochodzimy do nieco innego, ale ekwiwalentnego warunku wytrzymałościowego

$$|\sigma|_{\max} \leq \sigma_0 / \zeta_r, \quad (2.100)$$

gdzie

$$\zeta_r = \frac{\sigma_s + \zeta \sigma_d}{\sigma_s + \sigma_d}, \quad 1 \leq \zeta_r \leq \zeta, \quad (2.101)$$

jest zredukowanym współczynnikiem zmęczeniowym, uwzględniającym asymetrię cyklu. Relację (2.100) można dobrze zinterpretować fizycznie, występująca tam bowiem po prawej stronie wielkość σ_0 / ζ_r jest aktualnym w danych warunkach naprężeniem dopuszczalnym z uwzględnieniem zmęczenia przy określonej asymetrii cyklu.

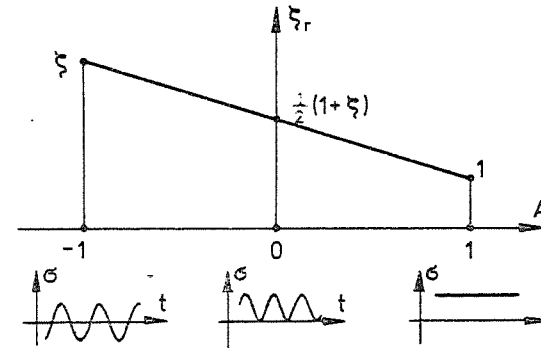
W praktyce operuje się często współczynnikiem asymetrii cyklu

$$\Delta = (\sigma_s - \sigma_d) / (\sigma_s + \sigma_d), \quad -1 \leq \Delta \leq 1. \quad (2.102)$$

Wtedy

$$\zeta_r = \frac{1}{2}(\zeta + 1) - \frac{1}{2}(\zeta - 1)\Delta. \quad (2.103)$$

Zależność zredukowanego współczynnika zmęczeniowego od współczynnika asymetrii cyklu jest przedstawiona na rys. 2.26.



Rys. 2.26

Podstawowy współczynnik zmęczeniowy można przedstawić w postaci iloczynu

$$\zeta = \zeta_m \zeta_k, \quad (2.104)$$

gdzie ζ_m zależy od cech samego materiału, natomiast $\zeta_k > 1$ jest współczynnikiem karbu, uwzględniającym kształt elementu, rodzaj obróbki, rodzaj połączenia itp.

Przedstawiony zarys teorii wytrzymałości zmęczeniowej jest jedynie uproszczonym opisem problemu, będącego jednym z bardziej złożonych i trudnych do rozstrzygnięcia zagadnień wytrzymałości dynamicznej. Szczegółowe sposoby wyznaczania współczynników zmęczeniowych są określone przez stosowne przepisy normowe.

2.11. Drgania wymuszone siłami losowymi

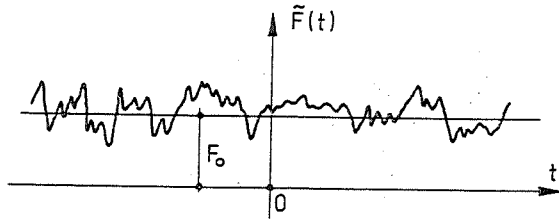
Analizując drgania wymuszone mieliśmy na myśli układy o zdeterminowanych parametrach własnych, poddane działaniu sił wzbudzących określonych zdeterminowanymi funkcjami czasu. Wyniki uzyskane na podstawie tych założeń są oczywiście także zdeterminowane. Jeśli analizu-

Jemy konkretny obiekt, to jego parametry mogą być na ogół zidentyfikowane, siła wzbudzająca natomiast w niektórych przypadkach nie może być określona w formie zdeterminowanej funkcji czasu i należy ją traktować jako funkcję losową (proces stochastyczny). W szczególnym przypadku siła ta zgodnie z wzorem (2.54) może reprezentować losowe wymuszenie kinematyczne.

Rozważmy równanie ruchu

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = \tilde{F}(t), \quad (2.105)$$

w którym siła wzbudzająca $\tilde{F}(t)$ jest procesem stochastycznym - stacjonarnym i ergodycznym (rys. 2.27). Oznacza to, że charakterystyki probabilistyczne procesu nie zależą od położenia punktu zerowego na osi czasu oraz że znajomość pewnej pojedynczej realizacji procesu w dostatecznie dużym przedziale czasu pozwala wyznaczyć charakterystyki repre-



Rys. 2.27

zentatywne dla danego procesu. Funkcje $\tilde{F}(t)$ i $\tilde{q}(t)$ możemy przedstawić w postaci

$$\tilde{F}(t) = F_0 + F(t), \quad \tilde{q}(t) = q_0 + q(t), \quad (2.106)$$

gdzie

$$F_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{F}(t) dt \quad (2.107)$$

jest wartością przeciętną procesu \tilde{F} , natomiast $F(t) = \tilde{F}(t) - F_0$ jest procesem stochastycznym o zerowej wartości przeciętnej. Odpowiedzią układu na ustalone w nieograniczonym czasie wymuszenie F_0 jest

$$q_0 = F_0/k, \quad (2.108)$$

jak w przypadku obciążenia statycznego. Odpowiednie obciążenie kinetyczne $Q_0 = kq_0 = F_0$. W dalszym ciągu możemy analizować równanie

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F(t) \quad (2.109)$$

z wymuszeniem o zerowej wartości przeciętnej.

Najważniejszą charakterystyką probabilistyczną procesu stochastycznego $F(t)$ jest odpowiadająca mu funkcja korelacyjna

$$K_F(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t) F(t+\tau) dt. \quad (2.110)$$

Jest to funkcja parzysta, bezwzględnie nie większa od wartości w zerze, a więc

$$K(\tau) = K(-\tau), \quad |K(\tau)| \leq K(0). \quad (2.111)$$

W punkcie $\tau = 0$ funkcja korelacyjna przyjmuje wartość wariancji procesu $F(t)$

$$K_F(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F^2(t) dt = \sigma^2(F). \quad (2.112)$$

Transformatę całkową Fouriera funkcji korelacyjnej $K_F(\tau)$

$$S_F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_F(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_F(\tau) \cos \lambda\tau d\tau \quad (2.113)$$

nazywamy gęstością widmową (spektralną) procesu $F(t)$. Jest to nieujemna funkcja parzysta o ograniczonej całce, a więc

$$S(\lambda) \geq 0, \quad S(\lambda) = S(-\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (2.114)$$

Parametr λ ma wymiar częstotliwości kołowej.

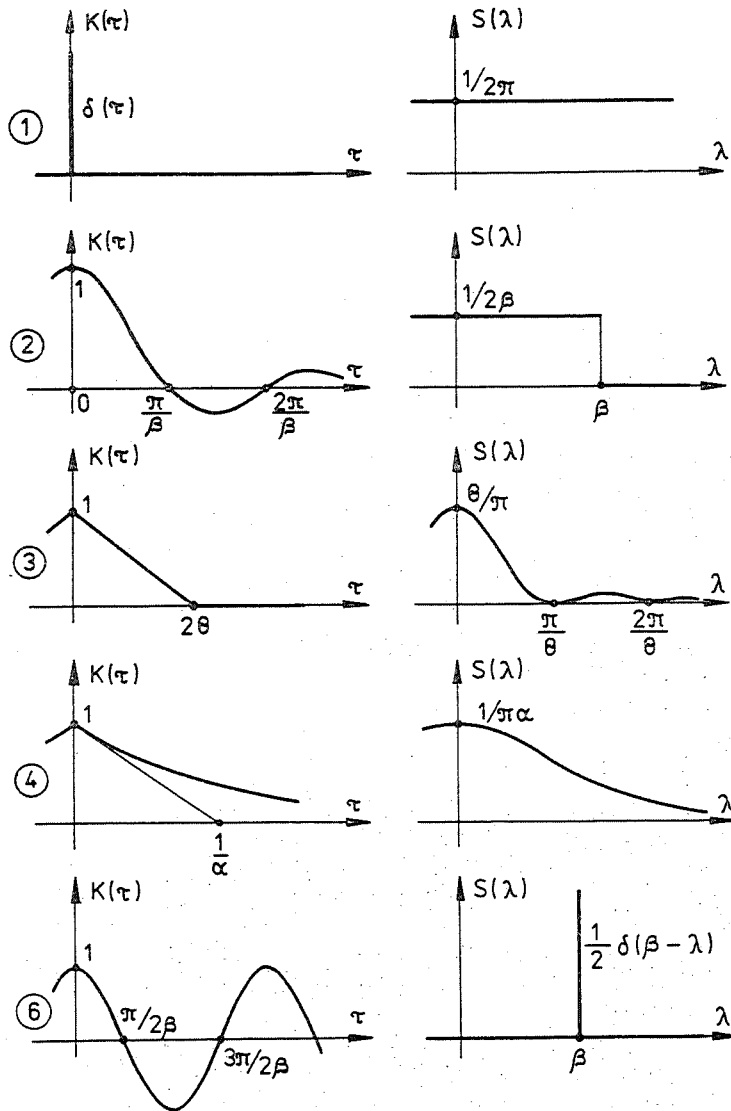
Transformacja odwrotna do (2.113) ma postać

$$K_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda = 2 \int_0^{\infty} S_F(\lambda) \cos \lambda\tau d\lambda. \quad (2.115)$$

Z (2.115) wynika, że wariancja procesu $F(t)$ może być również wyrażona wzorem

$$\sigma^2(F) = K_F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\lambda) d\lambda = 2 \int_0^{\infty} S_F(\lambda) d\lambda. \quad (2.116)$$

Funkcje korelacyjne procesów rzeczywistych aproksymuje się zwykle pewnymi typowymi formułami analitycznymi. Przykłady formuł funkcji korelacyjnych i odpowiadających im gęstości widmowych podano w tab.2.2, a niektóre wykresy - na rys. 2.28. Parametry α, β, θ są tu dowolnymi liczbami dodatnimi. Symbol $\delta(\tau)$ oznacza dystrybucję Diraca. Przypadek 1 odpowiada procesowi całkowicie nieskorelowanemu (tzw. białemu szumowi praktycznie możliwemu tylko w sensie asymptotycznym). Przypa-



Rys. 2.28

dek 2 jest opisem białego szumu z odcięciem widma dla $|\lambda| > \beta$. Przypadek 6 odpowiada procesowi harmonicznemu o zdeterminowanej częstotliwości kołowej β .

Tabela 2.2

Funkcje korelacji i gęstości widmowe

Nr	$K(\tau)$	$S(\lambda)$
1	$\delta(\tau)$	$1/2\pi$
2	$\frac{1}{\beta\tau} \sin \beta\tau$	$1/2\beta$ dla $ \lambda \leq \beta$ 0 dla $ \lambda > \beta$
3	$1 - \tau /2\theta$ dla $ \tau \leq 2\theta$ 0 dla $ \tau > 2\theta$	$\frac{\theta}{\pi} \left(\frac{\sin \theta\lambda}{\theta\lambda}\right)^2$
4	$e^{-\alpha \tau }$	$\frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$
5	$e^{-\alpha \tau } \cos \beta\tau$	$\frac{\pi\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 - \lambda^2)^2 + 4\alpha^2\lambda^2}$
6	$\cos \beta\tau$	$\frac{1}{2} \delta(\beta - \lambda)$

Zgodnie z wzorem (2.94), przy założeniu nieograniczonej rozległości procesu w czasie, można napisać

$$q(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau) r(t-\tau) d\tau,$$

$$r(t-\tau) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau),$$

lub po podstawieniu $t - \tau = x$

$$q(t) = \int_0^{\infty} K(t-x) r(x) dx. \quad (2.117)$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} K_q(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T q(t) q(t+\tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(t-x_1) K(t-x_2+\tau) r(x_1) r(x_2) dx_1 dx_2 dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_F(\tau+x_1-x_2) r(x_1) r(x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Z kolei na podstawie (2.115)

$$K_q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda, \quad (2.119)$$

$$K_F(\tau+x_1-x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\lambda) e^{i\lambda(\tau+x_1-x_2)} d\lambda.$$

Relacje (2.119) należy podstawić do (2.118). Równość będzie spełniona, jeśli równe sobie będą funkcje podcałkowe względem λ . Po wykonaniu obustronnego mnożenia przez $e^{-i\lambda\tau}$, otrzymamy

$$\begin{aligned} S_q(\lambda) &= S_F(\lambda) \cdot \int_0^{\infty} r(x_1) e^{i\lambda x_1} dx_1 \cdot \int_0^{\infty} r(x_2) e^{-i\lambda x_2} dx_2 = \\ &= S_F(\lambda) R(i\lambda) R(-i\lambda), \end{aligned} \quad (2.120)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R(i\lambda) &= \int_0^{\infty} r(x) e^{i\lambda x} dx = \frac{1}{m\omega} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha\omega - i\lambda)x} \sin \omega' x dx = \\ &= \frac{1}{m(\omega^2 - \lambda^2 - i\gamma\omega\lambda)} = \frac{-\omega^2}{k(\omega^2 - \lambda^2 - i\gamma\omega\lambda)}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$R(i\lambda) \cdot R(-i\lambda) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\gamma\omega\lambda)^2}.$$

Wobec tego gęstość widmowa procesu $q(t)$

$$S_q(\lambda) = k^{-2} V_q(\lambda) S_F(\lambda), \quad (2.122)$$

gdzie

$$V_q(\lambda) = \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\gamma\omega\lambda)^2} \quad (2.123)$$

natomiast wariancja tego procesu

$$\sigma^2(q) = 2k^{-2} \int_0^{\infty} V_q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda. \quad (2.124)$$

W teorii procesów stochastycznych dowodzi się, że jeżeli pewna funkcja losowa $Z(t)$ jest liniowym przekształceniem różniczkowym funkcji $q(t)$,

$$Z(t) = L(d/dt) \cdot q(t), \quad (2.125)$$

gdzie L jest wielomianem operatora d/dt o stałych współczynnikach, to gęstość widmowa procesu $Z(t)$

$$S_Z(\lambda) = |L(i\lambda)|^2 S_q(\lambda). \quad (2.126)$$

Jeżeli interesującą nas funkcją jest np. obciążenie kinetyczne zdefiniowane wzorem

$$Q(t) = kq + c\dot{q} = (k + c \frac{d}{dt})q, \quad (2.127)$$

to $L(i\lambda) = k + i\lambda c$, a zatem

$$\begin{aligned} S_Q(\lambda) &= (k^2 + c^2\lambda^2) S_q(\lambda) = \\ &= (1 + \gamma^2\lambda^2/\omega^2) V_q(\lambda) S_F(\lambda) = V_Q(\lambda) S_F(\lambda), \end{aligned} \quad (2.128)$$

gdzie

$$V_Q(\lambda) = \frac{\omega^4 + (\gamma\omega\lambda)^2}{(\omega^2 - \lambda^2)^2 + (\gamma\omega\lambda)^2} \quad (2.129)$$

Wariancja procesu $Q(t)$

$$\sigma^2(Q) = 2 \int_0^{\infty} V_Q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda. \quad (2.130)$$

Konfrontując wzór (2.116) z wzorami (2.124) i (2.130) widzimy, że w tych ostatnich pod znakiem całki pojawiają się bezwymiarowe funkcje wagi V_q oraz V_Q . Wprowadzając podstawienie $\lambda/\omega = \eta$, otrzymuje się $V_q = (v)^2$ oraz $V_Q = (v')^2$, co pozwala wyobrazić sobie kształty funkcji wagi na podstawie rys. 2.6. Jak widać, funkcje wagi spełniają rolę filtrów przy przekształcaniu widma procesu wejściowego na wariancje wielkości wyjściowych. Wzmocnieniu podlegają komponenty wymuszenia $F(t)$, których reprezentacją jest obszar widma w przedziale $0 < \lambda < \sqrt{2}\omega$ ze szczególnym uwzględnieniem punktu rezonansu $\lambda = \omega$. wartości liczbowe całek typu (2.124) i (2.130) można obliczać numerycznie w dostatecznie dużym przedziale skończonym ze względu na szybkie zanikanie funkcji wagi dla $\lambda > \sqrt{2}\omega$. W badaniu skutków wymuszenia o charakterze białego szumu mogą być przydatne wyniki

$$2 \int_0^{\infty} V_q(\lambda) d\lambda = \pi\omega/\gamma, \quad 2 \int_0^{\infty} V_Q(\lambda) d\lambda = \pi\omega(1+\gamma^2)/\gamma. \quad (2.131)$$

Znając wariancje rozwiązań, można już łatwo obliczyć prawdopodobieństwo utrzymania się rozwiązań w określonych granicach. Jeśli rozważane procesy są normalne (gaussowskie), to prawdopodobieństwo tego, że bezwzględne wychylenie nie przekroczy wartości $\xi \cdot \sigma(q)$, wynosi

$$P\{|q| \leq \xi \cdot \sigma(q)\} = \Phi(\xi), \quad (2.132)$$

gdzie

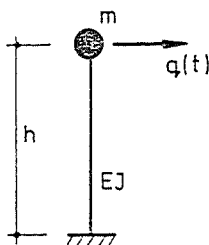
$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2/2} dx \quad (2.133)$$

jest całką prawdopodobieństwa. Wielkość σ , równą pierwiastkowi wariancji, nazywamy odchyleniem standardowym. Wzór analogiczny do (2.132) dotyczy również wielkości Q .

2.12. Przykłady liczbowe

PRZYKŁAD 2.12.1

Wyznaczyć charakterystyki giętych drgań własnych słupa o schemacie jak na rys. 2.29. Dane jest $m = 850 \text{ kg}$, $EJ = (12E6)^{\text{m}^3} \text{ Nm}^2$, $h = 4 \text{ m}$.



Rys. 2.29

R o z w i ą z a n i e

Sztywność układu w kierunku współrzędnej uogólnionej

$$k = 3 EJ/h^3 = 3 \cdot (12E6) : 4^3 = 562500 \text{ N/m}.$$

Częstość kołowa drgań własnych

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{562500 : 850} = 25,725 \text{ rad/s}.$$

Częstość fizyczna

$$f = 0,159 \cdot 25,725 = 4,09 \text{ Hz}.$$

Częstość techniczna

$$n = 9,55 \cdot 25,725 = 245,67 \text{ c/min}.$$

Okres drgań własnych

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi : 25,725 = 0,244 \text{ s}.$$

PRZYKŁAD 2.12.2

Z pomiarów wynikało, że po dwudziestu cyklach amplituda drgań swobodnych zmniejszyła się dziesięciokrotnie w stosunku do amplitudy początkowej. Wyznaczyć parametry tłumienia oraz obliczyć, po ilu cyklach amplituda zmniejszy się tysiąckrotnie (co praktycznie oznacza całkowity zanik drgań).

R o z w i ą z a n i e

Na podstawie wzoru (2.16) obliczymy logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\delta = \frac{1}{20} \ln(10/1) = 0,115,$$

a zatem liczba tłumienia

$$\alpha \approx 0,115 : (2\pi) = 0,0183,$$

$$^{\text{m})} (12E6) = 12 \cdot 10^6 = 12\,000\,000.$$

bezwymiarowy współczynnik tłumienia

$$\gamma = 2 \cdot 0,0183 = 0,0366,$$

fazowy parametr tłumienia

$$\beta = \arcsin(0,0183) = 0,0183 \text{ rad}.$$

Odpowiedź na drugie pytanie otrzymamy również na podstawie wzoru (2.16), pisząc

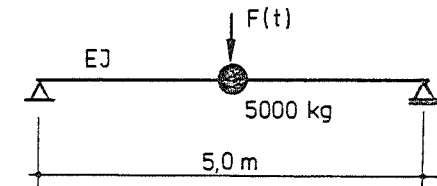
$$0,0115 = \frac{1}{n} \ln(1000/1) = 6,908 : n.$$

Stąd liczba cykli, przy której amplituda drgań zmniejszy się tysiąckrotnie, wynosi

$$n = 6,908 : 0,0115 \approx 60 \text{ c}.$$

PRZYKŁAD 2.12.3

Urządzenie o masie 5000 kg, charakteryzujące się momentem nieważenia 2 kgm i pracujące z częstością techniczną 220 c/min, należy ustawić na stalowej konstrukcji wsporczej w formie swobodnie podpartej belki o rozpiętości 5 m, złożonej z dwóch stalowych dźwigarów dwuteowych (rys.2.30). Naprężenie dopuszczalne dla stali wynosi 150 MPa, współczynnik zmęczenia $\zeta = 3$, współczynnik tłumienia $\gamma = 0,02$, moduł sprężystości - 206 000 MPa. Masę własną konstrukcji wsporczej pominąć.



Rys. 2.30

R o z w i ą z a n i e

Moment gnący w warunkach statycznych

$$M_g = 0,25 \cdot 5000 \cdot 9,81 \cdot 5 = 61312 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Potrzebny wskaźnik wytrzymałości

$$W = 61312 : (150E6) = (409E-6) \text{ m}^3 = 409 \text{ cm}^3.$$

Przyjmujemy wstępnie dźwigary 2 I 200, $W = 428 \text{ cm}^3$, $J = 4280 \text{ cm}^4$.

$$EJ = (206000E6) \cdot (4280E-8) = 8816800 \text{ N}\cdot\text{m}^2.$$

$$k = 48 \cdot 8816800 : 5^3 = 3385651 \text{ N/m},$$

$$\omega = \sqrt{3385651 : 5000} = 26,02 \text{ rad/s},$$

$$p = 0,1047 \cdot 220 = 23,03 \text{ rad/s},$$

$$\eta = 23,03 : 26,02 = 0,885 < 1 \text{ (wysokie strojenie)},$$

$$v' = \sqrt{1+0,02^2 \cdot 0,885^2} : \sqrt{(1-0,885^2)^2 + 0,02^2 \cdot 0,885^2} = 4,598 ,$$

$$F_0 = 2 \cdot 23,03^2 = 1061 \text{ N} ,$$

$$\text{am } Q = 4,598 \cdot 1061 = 4878 \text{ N} ,$$

$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 4878 \cdot 5 = 79604 \text{ N} \cdot \text{m} ,$$

$$\sigma = 79604 : (428E-6) = (186E6) \text{ Pa} = 186 \text{ MPa} > 150 \text{ MPa} .$$

Przyjmujemy w drugim przybliżeniu dźwigary 2 I 220, $W = 556 \text{ cm}^3$,

$$J = 6120 \text{ cm}^4 .$$

$$EJ = (206000E6) \cdot (6120E-8) = 12607200 \text{ Nm}^2 ,$$

$$k = 48 \cdot 12607200 : 5^3 = 4841165 \text{ N/m} ,$$

$$\omega = \sqrt{4841165 : 5000} = 31,12 \text{ rad/s} ,$$

$$\eta = 23,03 : 31,12 = 0,740 < 1 \quad (\text{wysokie strojenie}) ,$$

$$v' = \sqrt{1+0,02^2 \cdot 0,74^2} : \sqrt{(1-0,74^2)^2 + 0,02^2 \cdot 0,74^2} = 2,209 ,$$

$$\text{am } Q = 2,209 \cdot 1061 = 2344 \text{ N} ,$$

$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 2344 \cdot 5 = 70102 \text{ N} \cdot \text{m} ,$$

$$\sigma = 70102 : (556E-6) = (126E6) \text{ Pa} = 126 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa} .$$

Przekrój dźwigarów 2 I 220 jest wystarczający.

PRZYKŁAD 2.12.4.

Poprzednie zadanie rozwiązać przy częstotliwości wzbudzenia 320 c/min.

R o z w i ą z a n i e

Przyjmujemy wstępnie dźwigary 2 I 220, $W = 556 \text{ cm}^3$, $\omega = 31,12 \text{ rad/s}$, $p = 0,1047 \cdot 320 = 33,5 \text{ rad/s} > \omega$ (niskie strojenie). Sprawdzamy wyężenie w rezonansie przejściowym z pominięciem wpływu przyspieszenia fazy.

$$v' = \sqrt{1+0,02^2} : 0,02 = 50 ,$$

$$F_0 = 2 \cdot 31,12^2 = 1937 \text{ N} ,$$

$$\text{am } Q = 50 \cdot 1937 = 96850 \text{ N} ,$$

$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 96850 \cdot 5 = 424500 \text{ N} \cdot \text{m} ,$$

$$\sigma = 424500 : (556E-6) = (763E6) \text{ Pa} = 763 \text{ MPa} \gg 150 \text{ MPa} .$$

Przyjmujemy w następnym przybliżeniu 2 I 260, $W = 884 \text{ cm}^3$,

$$J = 11480 \text{ cm}^4 ,$$

$$EJ = (206000E6) \cdot (11480E-8) = 23648800 \text{ Nm}^2 ,$$

$$k = 48 \cdot 23648800 : 5^3 = 9081139 \text{ N/m} ,$$

$$\omega = \sqrt{9081139 : 5000} = 42,62 \text{ rad/s} ,$$

$$\eta = 33,5 : 42,62 = 0,786 < 1 \quad (\text{wysokie strojenie}) ,$$

$$v' = \sqrt{1+0,02^2 \cdot 0,786^2} : \sqrt{(1-0,786^2)^2 + 0,02^2 \cdot 0,786^2} = 2,615 ,$$

$$F_0 = 2 \cdot 33,5^2 = 2244 \text{ N} ,$$

$$\text{am } Q = 2,615 \cdot 2244 = 5868 \text{ N} ,$$

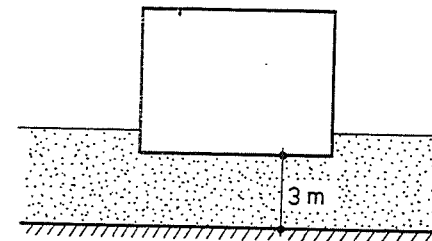
$$(M_s + \zeta M_d) = 61312 + 3 \cdot 0,25 \cdot 5868 \cdot 5 = 83317 \text{ N} \cdot \text{m} ,$$

$$\sigma = 83317 : (884E-6) = (94,3E6) \text{ Pa} = 94,3 \text{ MPa} < 150 \text{ MPa} .$$

Przekrój dźwigarów 2 I 260 jest wystarczający.

PRZYKŁAD 2.12.5

Budynek jest posadowiony na warstwie piasku o grubości 3 m i module ścisłości 120 MPa. Pod piaskiem jest lita skała (rys. 2.31).



Rys. 2.31

Napężenie statyczne na grunt wynosi 0,2 MPa. Podczas propagacji powierzchniowej fali sejsmicznej podłoże osiąga amplitudy pionowe $A = 100 \mu\text{m}$ przy częstotliwości 6 Hz. Wyznaczyć przemieszczenia pionowe budynku i napężenia na grunt z uwzględnieniem wpływów dynamicznych, przyjmując $\gamma = 0,10$.

R o z w i ą z a n i e

Zadanie rozwiążemy rozpatrując stan na jednostkę powierzchni fundamentu.

$$k = (120E6) : 3 = (4E7) \text{ N/m}^3 ,$$

$$m = (0,2E6) : 9,81 = 20387 \text{ kg/m}^2 ,$$

$$\omega = \sqrt{(4E7) : 20387} = 44,29 \text{ rad/s} ,$$

$$p = 6,283 \cdot 6 = 37,70 \text{ rad/s} ,$$

$$\eta = 37,70 : 44,29 = 0,851 < 1 \quad (\text{wysokie strojenie}) ,$$

$$v' = \sqrt{1+0,1^2 \cdot 0,851^2} : \sqrt{(1-0,851^2)^2 + 0,1^2 \cdot 0,851^2} = 3,477 .$$

Bezwzględne przemieszczenie budynku według (2.69)

$$\text{am}(z + q) = 3,477 \cdot 100 = 348 \mu\text{m} .$$

Obciążenie kinetyczne według (2.65)

$$\text{am } Q = 3,477 \cdot 0,851^2 \cdot (4E7) \cdot (100E-6) = 10072 \text{ N/m}^2 = 0,01 \text{ MPa} .$$

Łączne największe napężenie na grunt

$$\sigma = 0,2 + 0,01 = 0,21 \text{ MPa} .$$

PRZYKŁAD 2.12.6

Układ o masie 1000 kg jest poddany działaniu długiej serii sprężystych uderzeń masą 100 kg wolno spadającą z wysokości 2 m. Współczynnik sprężystości uderzenia wynosi 0,6, współczynnik tłumienia $\gamma = 0,04$, sztywność układu - 2 MN/m. Odstęp czasowy impulsów wynosi około 0,5 s. Wyznaczyć impuls uderzenia oraz obciążenie kinetyczne w najniekorzystniejszym przypadku.

R o z w i ą z a n i e

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 6,246 \text{ m/s,}$$

$$\Pi = (1+0,6) \cdot 6,246 \cdot 1000 \cdot 100 : (1000+100) = 911 \text{ Ns,}$$

$$\omega = \sqrt{(2E6) : 1000} = 44,72 \text{ rad/s,}$$

$$\text{am } Q_1 = 911 \cdot 44,72 = 40740 \text{ N,}$$

$$\alpha = 0,5 \cdot 0,04 = 0,02,$$

$$\alpha \omega \theta = 0,02 \cdot 44,72 \cdot 0,5 = 0,4472.$$

W najbardziej niekorzystnym przypadku według (2.89)

$$\text{am } Q_\infty = 40740 : (1 - e^{-0,4472}) = 112983 \text{ N.}$$

PRZYKŁAD 2.12.7

Na obiekt o masie 4000 kg i sztywności 650000 N/m spada masa 1500 kg (bez odskoku) z wysokości 1,2 m. Wyznaczyć obciążenie obiektu przed uderzeniem, podczas uderzenia i po uderzeniu.

R o z w i ą z a n i e

$$\omega^2 = 650000 : (4000+1500) = 118 \text{ (rad/s)}^2.$$

Obciążenie kinetyczne podczas uderzenia według (2.91)

$$\max Q = 1500 \cdot 9,81 \cdot (1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 118 \cdot 1,2 : 9,81}) = 95136 \text{ N.}$$

Obciążenie obiektu przed uderzeniem

$$Q_0 = 4000 \cdot 9,81 = 39240 \text{ N.}$$

Obciążenie obiektu podczas uderzenia

$$Q_1 = 39240 + 95136 = 134376 \text{ N.}$$

Obciążenie obiektu po uderzeniu

$$Q_2 = 39240 + 1500 \cdot 9,81 = 53955 \text{ N.}$$

PRZYKŁAD 2.12.8

Układ o masie 4000 kg i sztywności 1 MN/m jest obciążony siłą losowo zmienną o zerowej wartości przeciętnej i o wariancji $\sigma^2(F) = 900 \text{ N}^2$. Gęstość widmowa wzbudzenia jest białym szumem z ograniczeniem $|\lambda| \leq 30 \text{ rad/s}$. Współczynnik tłumienia $\gamma = 0,04$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przemieszczenie układu nie przekroczy normy 200 μm , a obciążenie kinetyczne - normy 300 N.

R o z w i ą z a n i e

$$\omega = \sqrt{(1E6) : 4000} = 15,81 \text{ rad/s,}$$

$$\sqrt{2}\omega = \sqrt{2} \cdot 15,81 = 23,36 \text{ rad/s} < 30 \text{ rad/s.}$$

Gęstość widmowa wzbudzenia według tab. 2.2, poz. 2

$$S_F(\lambda) = \begin{cases} 900 : (2 \cdot 30) = 15 \text{ N}^2\text{s} & \text{dla } |\lambda| \leq 30 \text{ rad/s,} \\ = 0 & \text{dla } |\lambda| > 30 \text{ rad/s.} \end{cases}$$

Wariancja przemieszczenia

$$\begin{aligned} \sigma^2(q) &= 2 k^{-2} \int_0^\infty V_q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda \approx k^{-2} S_F(0) \cdot 2 \int_0^\infty V_q(\lambda) d\lambda = \\ &= k^{-2} S_F(0) \cdot \pi \omega / \gamma = (1E6)^{-2} \cdot 15 \cdot \pi \cdot 15,81 : 0,04 = (1,86E-8) \text{ m}^2; \end{aligned}$$

odchylenie standardowe przemieszczenia

$$\sigma(q) = \sqrt{(1,86E-8)} = (1,365E-4) \text{ m} = 136 \mu\text{m.}$$

Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia normy przemieszczeń

$$\Phi\{|q| \leq 200\} = \Phi(200 : 136) = 0,8584.$$

Wariancja obciążenia kinetycznego

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q) &= 2 \int_0^\infty V_Q(\lambda) S_F(\lambda) d\lambda \approx S_F(0) \cdot 2 \int_0^\infty V_Q(\lambda) d\lambda = S_F(0) \cdot \pi \omega (1 + \gamma^2) / \gamma = \\ &= 15 \cdot \pi \cdot 15,81 \cdot (1 + 0,04^2) : 0,04 = 18656 \text{ N}^2. \end{aligned}$$

Odchylenie standardowe obciążenia kinetycznego

$$\sigma(Q) = \sqrt{18656} = 137 \text{ N.}$$

Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia normy obciążenia

$$\Phi\{|Q| \leq 300\} = \Phi(300 : 137) = 0,9714.$$

6.5. Podstawowe oznaczenia

A - macierz transformacji współrzędnych; pole przekroju;
 B - macierz bezwładności;
 c - charakterystyka tłumika; cykl;
 C - macierz tłumienia;
 d - liczba dynamicznych stopni swobody;
 D - macierz podatności;
 E - moduł Younga; energia;
 F - siła uogólniona; funkcja specjalna;
 g - przyspieszenie ziemskie;
 G - moduł Kirchhoffa; funkcja specjalna;
 H - siła brzegowa; macierz transformacji;
 J - geometryczny moment bezwładności;
 J^m - masowy moment bezwładności;
 k - sztywność więzi sprężystej;
 K - macierz sztywności; funkcja korelacyjna;
 l - długość pręta; długość elementu;
 L - praca;
 m - masa skupiona; masa rozłożona;
 M - moment gnący; moment brzegowy; masa ruchoma;
 \mathcal{M} - macierz wpływu momentów gnących;
 \mathcal{M}_0 - masowy moment niewyważenia;
 N - siła osiowa; funkcja kształtu;
 \mathcal{N} - macierz wpływu sił osiowych;
 p - częstość kołowa wymuszenia; obciążenie rozłożone;
 P - siła skupiona; moment skupiony;
 q - przemieszczenie uogólnione; współrzędne Lagrange'a,
 Q - siła uogólniona; obciążenie kinetyczne;
 r - przemieszczenie;
 s - smukłość pręta; smukłość elementu;
 S - gęstość widmowa; funkcja Kryłowa;
 t - czas;
 T - okres drgań; siła tnąca;

u - współrzędna lokalna; przemieszczenie podłużne;
 U - lokalne obciążenie kinetyczne;
 V - siła brzegowa; macierz płaskiego obrotu;
 w - przemieszczenia poprzeczne;
 \bar{w} - wektor własny;
 W - macierz własna; przemieszczenie śledzące;
 z - przemieszczenie;
 α - liczba tłumienia;
 β - fazowy parametr tłumienia; parametr drgań osiowych; parametr prędkości obciążenia ruchomego;
 γ - bezwymiarowy współczynnik tłumienia;
 δ - podatność więzi sprężystej;
 ζ - współczynnik zmęczenia;
 η - względna częstość wzbudzenia;
 θ - logarytmiczny dekrement tłumienia;
 κ - wymiarowy parametr tłumienia wewnętrzznego;
 λ - parametr; parametr drgań giętych;
 μ - wymiarowy parametr tłumienia zewnętrznego;
 ν - współczynnik dynamiczny; współczynnik Poissona;
 Π - impuls;
 σ - naprężenie, wariancja;
 φ - faza; faza początkowa; kąt brzegowy;
 \mathfrak{F} - funkcja tłumienia, funkcja prawdopodobieństwa;
 ψ - opóźnienie fazowe;
 ω - częstość kołowa drgań własnych;
 ω' - częstość kołowa drgań swobodnych tłumionych.

LITERATURA

- BATHE K., WILSON E., Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, New Jersey 1976, (4,5)^{*)}.
- BIGGS J., Introduction to structural dynamics, McGraw-Hill, New York 1964, (1,2,3,4,5).
- BISHOP R., GLADWELL G., MICHAELSON S., Macierzowa analiza drgań, WNT, Warszawa 1972, (2,3,4,5).
- BŁASZKOWIAK S., KĄCZKOWSKI Z., Metoda Crossa, PWN, Warszawa 1959, (4,6).
- BOLOTIN V., Dinamičeskaja ustojčivost' uprugich sistem, Fizmatgiz, Moskva 1956, (4).
- CHROBOK R., LANGER J., Analiza problemu rezonansów przejściowych w układach dyskretnych, Arch.Inż.Ląd. 22, 1, 1976, (2,3).
- DYLĄG Z., KRZEMIŃSKA-NIEMIEC E., FILIP F., Mechanika budowli, t. 2, PWN, Warszawa 1974, (2,3,4).
- FILIPPOV A., Kolebanija deformirujemych sistem, Mašinostroenie, Moskva 1970, (2,3,4).
- GOLIŃSKI J., Wibroizolacja maszyn wirnikowych, Arkady, Warszawa 1964, (2,3).
- HURTY W., RUBINSTEIN M., Dynamics of structures, Prentice-Hall, New Jersey 1964, (1,2,3,4,5).
- KALISKI S., DŻYGADŁO Z., SOLARZ L., WŁODARCZYK E., Drgania i fale w ciałach stałych, PWN, Warszawa 1966, (1,2,3,4).
- KĄCZKOWSKI Z., Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych, Arch. Inż.Ląd. 22, 3, 1976, (4).
- KĄCZKOWSKI Z., LANGER J., Synteza metody czasoprzestrzennych elementów skończonych, Arch.Inż.Ląd. 26, 1, 1980, (4).
- KISIEL I., Dynamika fundamentów pod maszyny, PWN, Warszawa 1957, (2, 3,4,6).
- KISIELEV V., Stroitel'naja mechanika - specjalnyj kurs, Moskva 1969, (2,3,4).

^{*)} W nawiasach podano numery rozdziałów, które wiążą się tematycznie z wymienioną pozycją literatury.

- KLASZTORNY M., LANGER J., MIRONOWICZ W., Analiza dynamiczna fundamentów blokowych pod maszyny nieudarowe, Prace Nauk.Inst.Inż.Ląd. 23, Monografie 6, Wyd. Polit. Wrocław, Wrocław 1978, (3).
- KOLGUŠEK V., Dynamics in engineering structures, Academia, Prague 1973, (4,6).
- KRUSZEWSKI J., GAWROŃSKI W., WITTBRODT E., NAJBAR F., GRABOWSKI S., Metoda sztywnych elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1975, (4).
- LANGER J., O dynamicznych efektach serii impulsów, Arch.Inż.Ląd. 16, 2, 1970, (2).
- LANGER J., Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem, Arch.Inż.Ląd. 19, 2, 1973, (4).
- LANGER J., KLASZTORNY M., Drgania belki na podporach podatnych wywołane ruchomym obciążeniem, Arch.Inż.Ląd. 20, 2, 1974, (4).
- LANGER J., W sprawie numerycznego całkowania równań ruchu kolokacyjną metodą stałego przybliżenia, Arch.Inż.Ląd. 25, 1, 1979, (5).
- LANGER J., Trumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równań ruchu, Arch.Inż.Ląd. 25, 3, 1979, (5).
- LEGRAS J., Praktyczne metody analizy numerycznej, WNT, Warszawa 1974, (5).
- LIPIŃSKI J., Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny, Arkady, Warszawa 1969, (2,3).
- NOWACKI W., Dynamika budowli, Arkady, Warszawa 1961, (1,4,6).
- NOWACKI W., Mechanika budowli, t. 2, PWN, Warszawa 1960, (4,6).
- OSIŃSKI Z., Teoria drgań, PWN, Warszawa 1978, (1,2,3,4).
- PN/B-03040, Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny, PKN, Warszawa 1967, (2,3).
- SKALMIERSKI B., Mechanika, PWN, Warszawa 1977, (1,2,3,4).
- SOBCZYK K., Metody dynamiki statystycznej, PWN, Warszawa 1973, (2).
- SOLECKI R., SZYMKIEWICZ J., Układy prętowe i powierzchniowe - obliczenia dynamiczne, Arkady, Warszawa 1964, (1,2,3,4,6).
- SUŁOCKI J., Dynamika budowli - metody obliczeń i przykłady, Wyd.Polit. Łódzkiej, Łódź 1976, (2,3,4,6).
- SWIESZNIKOW A., Podstawowe metody funkcji losowych, PWN, Warszawa 1965, (2).
- TIMOSHENKO S., Vibration problems in engineering, New York 1955, (1, 2,3,4).
- WHITTAKER E., Dynamika analityczna, PWN, Warszawa 1959, (1,2,3).
- ZIENKIEWICZ O., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972, (4).
- ZIEMBA S., Analiza drgań, PWN, Warszawa 1957-59, (1,2,3,4).

Spis rzeczy

OD AUTORA	3
1. WSTĘP	4
1.1. Określenie przedmiotu	4
1.2. Schemat dynamiczny	4
1.3. Więzcie odkształcalne	7
1.4. Podstawowe prawa dynamiki	10
1.5. Charakterystyka ruchów oscylacyjnych	12
2. UKŁADY O JEDNYM STOPNIU SWOBODY	20
2.1. Równanie ruchu	20
2.2. Zagadnienie własne	20
2.3. Drgania swobodne	21
2.4. Warianty modelu tłumienia. Wyteżenie konstrukcji	25
2.5. Drgania wymuszone harmonicznie	27
2.6. Wymuszenie bezwładnościowe	30
2.7. Proces przejściowy	31
2.8. Wymuszenie kinematyczne	35
2.9. Drgania wymuszone aperiodycznie	36
2.10. Zasady projektowania. Zmęczenie	42
2.11. Drgania wymuszone siłami losowymi	45
2.12. Przykłady liczbowe	52
3. UKŁADY DYSKRETNE	58
3.1. Równanie ruchu	58
3.2. Zagadnienie własne	62
3.3. Drgania swobodne	65
3.4. Drgania wymuszone harmonicznie	67
3.5. Warianty modelu tłumienia. Wyteżenie konstrukcji	69
3.6. Proces przejściowy	71
3.7. Wymuszenie kinematyczne	73
3.8. Drgania wymuszone aperiodycznie	74
3.9. Belki i ramy płaskie	75
3.10. Kratownice	82
3.11. Bryła na podłożu sprężystym	84