

## METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

### SPIS TREŚCI

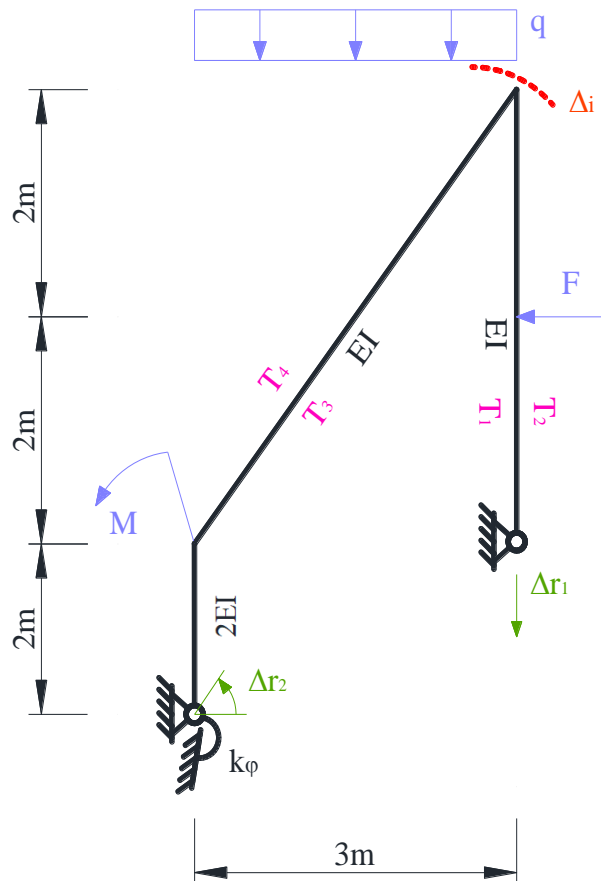
1.	DANE I SZUKANE .....	3
2.	SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI .....	4
3.	PRZYJĘCIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY SIŁ.....	4
4.	RÓWNIANIA KANONICZNE METODY SIŁ.....	5
5.	ROZWIĄZANIE RAMY OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO.....	6
5.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO .....	6
5.2.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN·m .....	8
5.3.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_2=1$ ) kN.....	8
5.4.	OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW I WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ .....	11
5.5.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE .....	11
5.6.	OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW .....	11
5.7.	KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA .....	13
5.7.1.	KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	13
5.7.2.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	14
6.	WSTĘPNE PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW PRĘTÓW.....	15
7.	ROZWIĄZANIE UKŁADU OD TEMPERATURY .....	15
7.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD TEMPERATURY .....	15
7.2.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN·m .....	15
7.3.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN.....	15
7.4.	OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ ...	15
7.5.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE .....	16
7.6.	OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW .....	16
7.7.	KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA .....	18
7.7.1.	KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	18
7.7.2.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	19

8.	ROZWIĄZANIE UKŁADU OD PRZEMIESZCZENIA PODPÓR.....	19
8.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD PRZEMIESZCZENIA PODPÓR .....	19
8.2.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN·m.....	19
8.3.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN.....	20
8.4.	OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ ...	20
8.5.	SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE.....	20
8.6.	OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW.....	20
8.7.	KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA.....	22
8.7.1.	KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	22
8.7.2.	KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA .....	23
9.	OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA .....	23
9.1.	ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA JEDNOSTKOWEGO W MIEJSCU I KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA.....	24
9.2.	PRZEMIESZCZENIE OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI.....	25
9.3.	PRZEMIESZCZENIE OD ZMIAN TEMPERATURY .....	25
9.4.	PRZEMIESZCZENIE OD OSIADANIA PODPÓR .....	26

## 1. DANE I SZUKANE

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym i niemechanicznym jak na rysunku 1.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę sił rozwiązać ramę od zadanego obciążenia siłami.
- Na podstawie obliczonych momentów zginających zaprojektować wstępnie przekroje prętów na zginanie, w obliczeniach przyjąć - średni współczynnik obciążenia  $\gamma_f = 1.5$ , wytrzymałość obliczeniową stali  $f_d = 215$  MPa,  $E=210$  GPa
- Po zaprojektowaniu przekrojów rozwiązać zadany układ od obciążeń niemechanicznych.
- Przeprowadzić kontrolę rozwiązania od obciążenia mechanicznego i od obciążeń niemechanicznych (sprawdzić statyczną i kinematyczną dopuszczalność rozwiązania).
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu oddzielnie od wszystkich obciążeń.



Rys. 1.1. Schemat statyczny

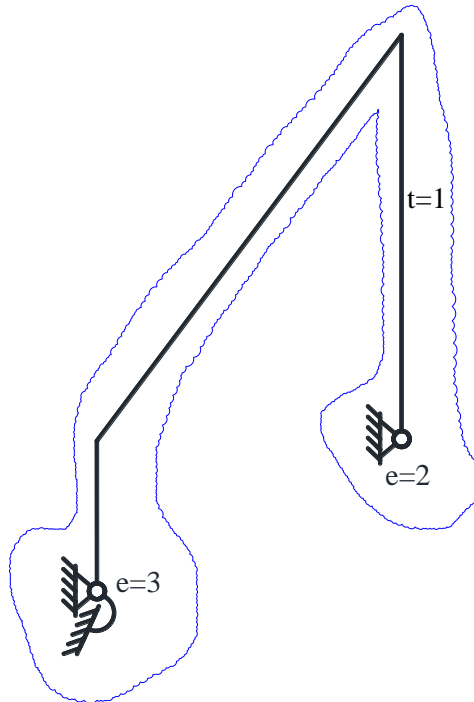
Dane do obliczeń:  $F = 10$  kN;  $q = 4$  kN/m;  $M = 20$  kN m;  $k_\varphi = 10$  EI/m;  $T_1 = 10$  °C;  $T_2 = -20$  °C;  $T_3 = -15$  °C;  $T_4 = 25$  °C;  $\Delta r_1 = 4$  cm;  $\Delta r_2 = 0,06$  rad.

## 2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności

$$t = 1, \quad e = 3 + 2 = 5,$$

$$n_h = e - 3 * t = 5 - 3 = 2$$

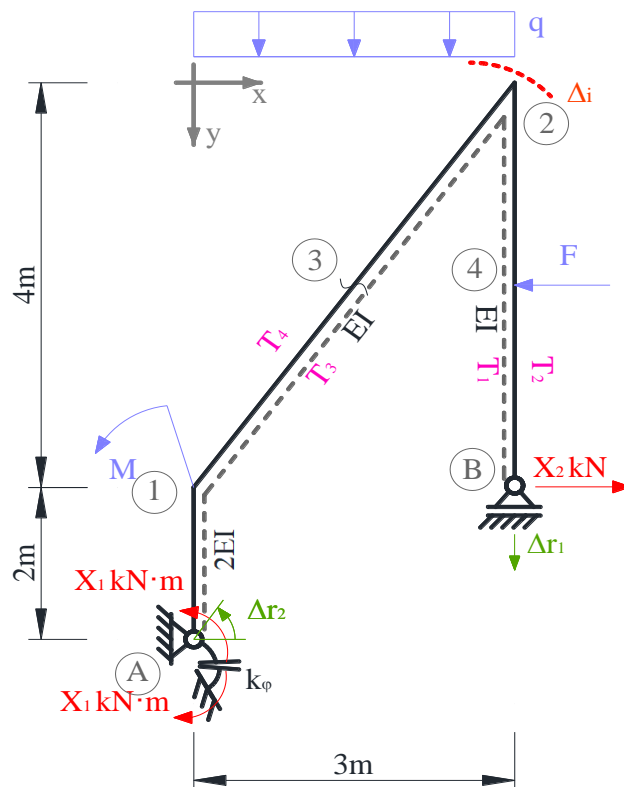


Rys. 2.1. Tarcze i więzi

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją pięcioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

## 3. PRZYJĘCIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY SIŁ

Układ podstawowy metody sił otrzymuje się z układu zadanego po przecięciu lub pozbawieniu  $n_h$  więziami i zastąpieniu ich niewiadomymi siłami hiperstatycznymi. Układ równań metody sił jest statycznie wyznaczalny oraz geometrycznie niezmienny.



Rys. 3.1. Układ podstawowy metody sił

#### 4. RÓWNANIA KANONICZNE METODY SIŁ

Równania kanoniczne metody sił są równaniami przemieszczeniowymi. Ogólna postać układu równań metody sił ma postać

Od obciążenia mechanicznego:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1^F + \delta_{12}X_2^F + \delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1^F + \delta_{22}X_2^F + \delta_{2F} &= 0\end{aligned}$$

Od zmian temperatury:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1^T + \delta_{12}X_2^T + \delta_{1T} &= 0 \\ \delta_{21}X_1^T + \delta_{22}X_2^T + \delta_{2T} &= 0\end{aligned}$$

Od osiadania podpory:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1^\Delta + \delta_{12}X_2^\Delta + \delta_{1\Delta} &= 0 \\ \delta_{21}X_1^\Delta + \delta_{22}X_2^\Delta + \delta_{2\Delta} &= 0\end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^j}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n} \right\} / P_i$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej odjednostkowej j-tej niewiadomej w układzie podstawowym,

$$\delta_{iF} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n} \right\} / P_i$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od obciążenia mechanicznego w układzie podstawowym,

$$\delta_{iT} = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i},$$

przesunięcie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu temperatury w układzie podstawowym,

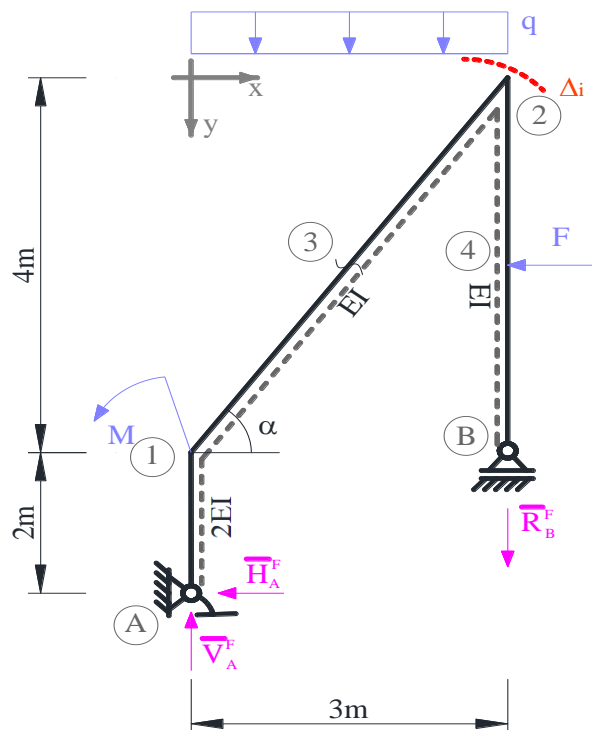
$$\delta_{i\Delta} = \left\{ -\sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n \right\} / P_i$$

przesunięcie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu osiadania podpór w układzie podstawowym

gdzie dla  $P_1=1\text{kN}\cdot\text{m}$  obliczamy przesunięcie kątowe, dla  $P_2=1\text{kN}$  obliczamy przesunięcie liniowe.

## 5. ROZWIĄZANIE RAMY OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

### 5.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO



Rys. 5.1.1. Reakcje od obciążenia siłami w układzie podstawowym

#### Obliczenie reakcji

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad \bar{H}_{1A}^F = -10\text{kN} \\ \sum M_A = 0 & \quad \bar{R}_B^F \cdot 3\text{m} - F \cdot 4\text{m} + q \cdot 3\text{m} \cdot 1,5\text{m} - M = 0 \quad \bar{R}_B^F = 14\text{kN} \\ \sum Y = 0 & \quad \bar{R}_B^F - \bar{V}_A^F + q \cdot 3\text{m} = 0 \quad \bar{V}_A^F = 26\text{kN} \end{aligned}$$

#### Obliczenie momentów zginających

$$\begin{aligned} \bar{M}_{A1}^F &= 0 \\ \bar{M}_{1A}^F &= \bar{H}_A^F \cdot 2\text{m} = 10\text{kN} \cdot 2\text{m} = 20\text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$\bar{M}_{12}^F = \bar{H}_A^F \cdot 2m - M = -10kN \cdot 2m - 20kN \cdot m = -40kN \cdot m$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_3^F &= \bar{H}_A^F \cdot 4m + \bar{V}_A^F \cdot 1,5m - M - q \cdot 1,5m \cdot 0,75m = \\ &= -10kN \cdot 4m + 26kN \cdot 1,5m - 20kN \cdot m - 4 \cdot 1,5m \cdot 0,75m = -25,5kN \cdot m \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{21}^F = \bar{H}_A^F \cdot 6m + \bar{V}_A^F \cdot 3m - M - q \cdot 3m \cdot 1,5m = -10kN \cdot 6m + 26kN \cdot 3m - 20kN \cdot m - 4 \cdot 3m \cdot 1,5m = -20kN \cdot m$$

$$\bar{M}_{B2}^F = 0$$

$$\bar{M}_4^F = 0$$

$$\bar{M}_{2B}^F = -F \cdot 2m = -10kN \cdot 2m = -20kN \cdot m$$

### Obliczenie sił tnących

$$\bar{V}_{A1}^F = \bar{V}_{1A}^F = \bar{H}_A^F = -10kN$$

$$\bar{V}_{12}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,8 + \bar{V}_A^F \cdot 0,6 = -10kN \cdot 0,8 + 26kN \cdot 0,6 = 7,6kN$$

$$\bar{V}_{21}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,8 + \bar{V}_A^F \cdot 0,6 - q \cdot 3m \cdot 0,6 = -10kN \cdot 0,8 + 26kN \cdot 0,6 - 4kN \cdot 3m \cdot 0,6 = 0,4kN$$

$$\bar{V}_{B4}^F = \bar{V}_{4B}^F = 0$$

$$\bar{V}_{42}^F = \bar{V}_{24}^F = F = 10kN$$

### Obliczenie sił osiowych

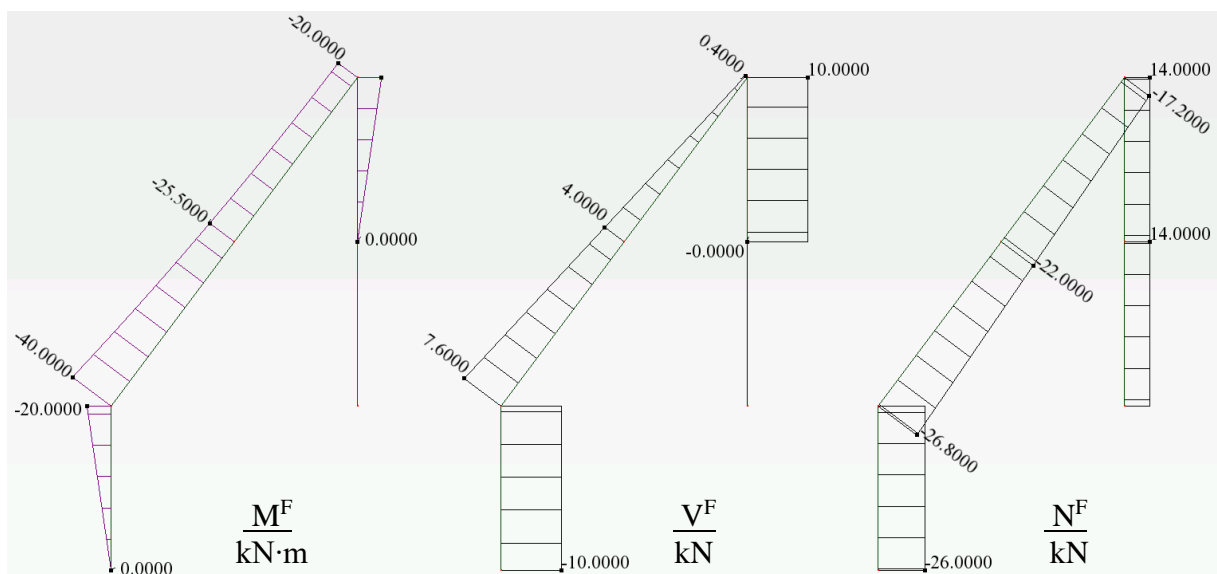
$$\bar{N}_{A1}^F = \bar{N}_{1A}^F = -\bar{V}_A^F = -26kN$$

$$\bar{N}_{12}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,6 - \bar{V}_A^F \cdot 0,8 = -10kN \cdot 0,6 - 26kN \cdot 0,8 = -26,8kN$$

$$\bar{N}_{21}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,6 - \bar{V}_A^F \cdot 0,8 + q \cdot 3m \cdot 0,8 = -10kN \cdot 0,6 - 26kN \cdot 0,8 + 4kN \cdot 3m \cdot 0,8 = -17,2kN$$

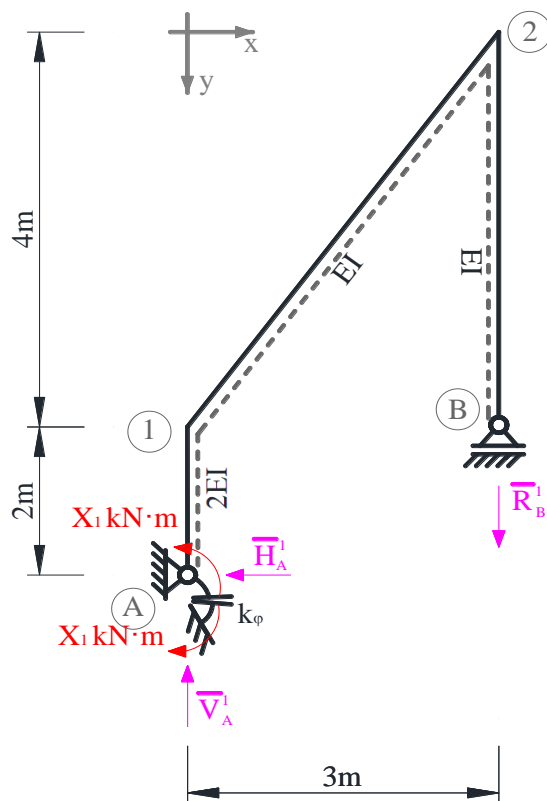
$$\bar{N}_{B2}^F = \bar{V}_{2B}^F = \bar{R}_B^F = 14kN$$

Moment zginający w więzi sprężystej:  $\bar{S}_\varphi^F = 0kN \cdot m$



Rys. 5.1.2. wykresy sił przekrojowych

## 5.2. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $(X_1=1)$ kN·m



Rys. 5.2.1. Reakcje od  $(X_1=1)$  kN·m

### Obliczenie reakcji

$$\sum X = 0 \quad \bar{H}_{1A}^1 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \bar{R}_B^1 \cdot 3\text{m} - X_1 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \quad \bar{R}_B^1 = \frac{1}{3} \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \quad \bar{R}_B^1 - \bar{V}_A^1 = 0 \quad \bar{V}_A^1 = \frac{1}{3} \text{ kN}$$

### Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_{A1}^1 = \bar{M}_{1A}^1 = \bar{M}_{12}^1 = -X_1 \text{ kN} \cdot \text{m} = -1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_{B2}^1 = \bar{M}_{2B}^1 = \bar{M}_{21}^1 = 0$$

### Obliczenie sił tnących

$$\bar{V}_{A1}^1 = \bar{V}_{1A}^1 = \bar{H}_A^1 = 0$$

$$\bar{V}_{12}^1 = \bar{V}_{21}^1 = \bar{H}_A^1 \cdot 0,8 + \bar{V}_A^1 \cdot 0,6 = 0 \text{ kN} \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,6\text{m} = 0,2 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_{B2}^1 = \bar{V}_{2B}^1 = 0$$

### Obliczenie sił osiowe

$$\bar{N}_{A1}^1 = \bar{N}_{1A}^1 = -\bar{V}_A^1 = -0,3333 \text{ kN}$$

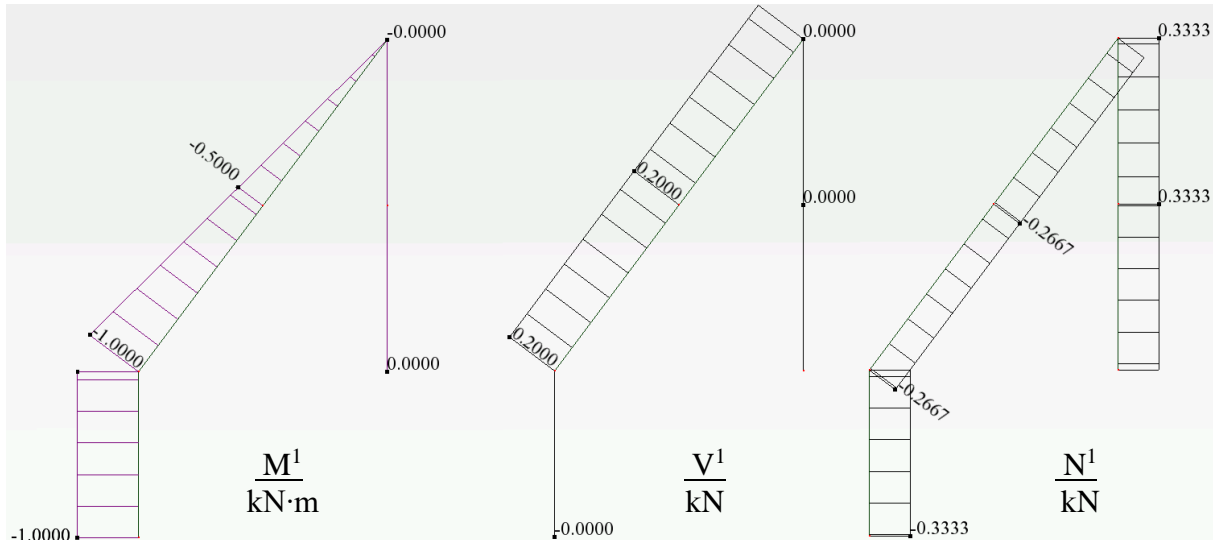


opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$\bar{N}_{12}^1 = \bar{N}_{21}^1 = \bar{H}_A^1 \cdot 0,6 - \bar{V}_A^1 \cdot 0,8 = 0 \text{ kN} \cdot 0,6 - \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,8 \text{ m} = -0,2667 \text{ kN}$$

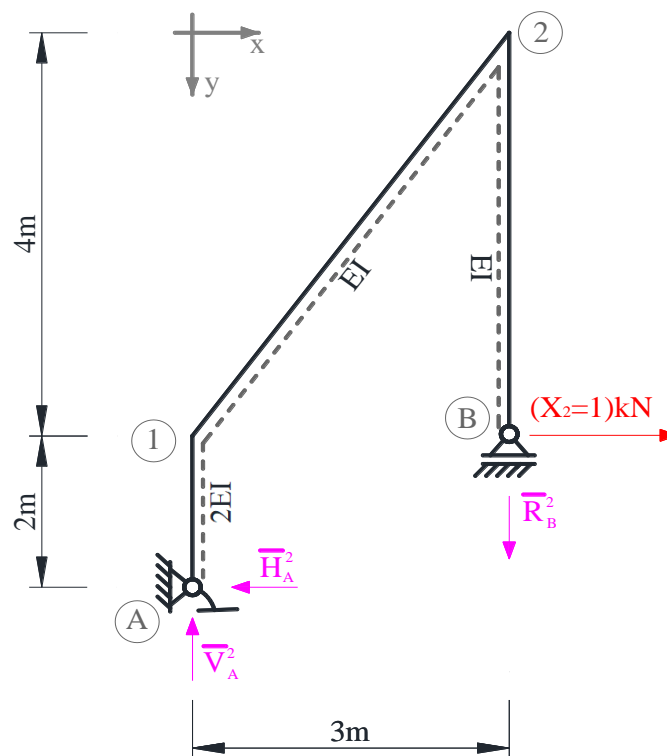
$$\bar{N}_{B2}^1 = \bar{V}_{2B}^1 = \bar{R}_B^1 = 0,3333 \text{ kN}$$

**Moment zginający w wieży sprężystej:**  $\bar{S}_\varphi^1 = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$



Rys. 5.2.2. wykresy sił przekrojowych

### 5.3. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $(X_2=1) \text{ kN}$



Rys. 5.3.1. Reakcje od  $(X_2=1) \text{ kN}$

### Obliczenie reakcji

$$\sum X = 0 \quad \bar{H}_{1A}^2 = X_2 kN = 1kN$$

$$\sum M_A = 0 \quad \bar{R}_B^2 \cdot 3m + X_2 kN \cdot 2m = 0 \quad \bar{R}_B^2 = -\frac{2}{3} kN$$

$$\sum Y = 0 \quad \bar{R}_B^2 - \bar{V}_A^2 = 0 \quad \bar{V}_A^2 = -\frac{2}{3} kN$$

### Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_{A1}^2 = 0 kN \cdot m$$

$$\bar{M}_{1A}^2 = \bar{M}_{12}^2 = \bar{H}_A^2 \cdot 2m = 1kN \cdot 2m = 2kN \cdot m$$

$$\bar{M}_{21}^2 = \bar{M}_{2B}^2 = X_2 kN \cdot 4m = 4kN \cdot m$$

$$\bar{M}_{B2}^2 = 0$$

### Obliczenie sił tnących

$$\bar{V}_{A1}^2 = \bar{V}_{1A}^2 = \bar{H}_A^2 = 1kN$$

$$\bar{V}_{12}^2 = \bar{V}_{21}^2 = \bar{H}_A^2 \cdot 0,8 + \bar{V}_A^2 \cdot 0,6 = 1kN \cdot 0,8 - \frac{2}{3} kN \cdot 0,6m = 0,4kN$$

$$\bar{V}_{B2}^2 = \bar{V}_{2B}^2 = -X_2 kN = -1kN$$

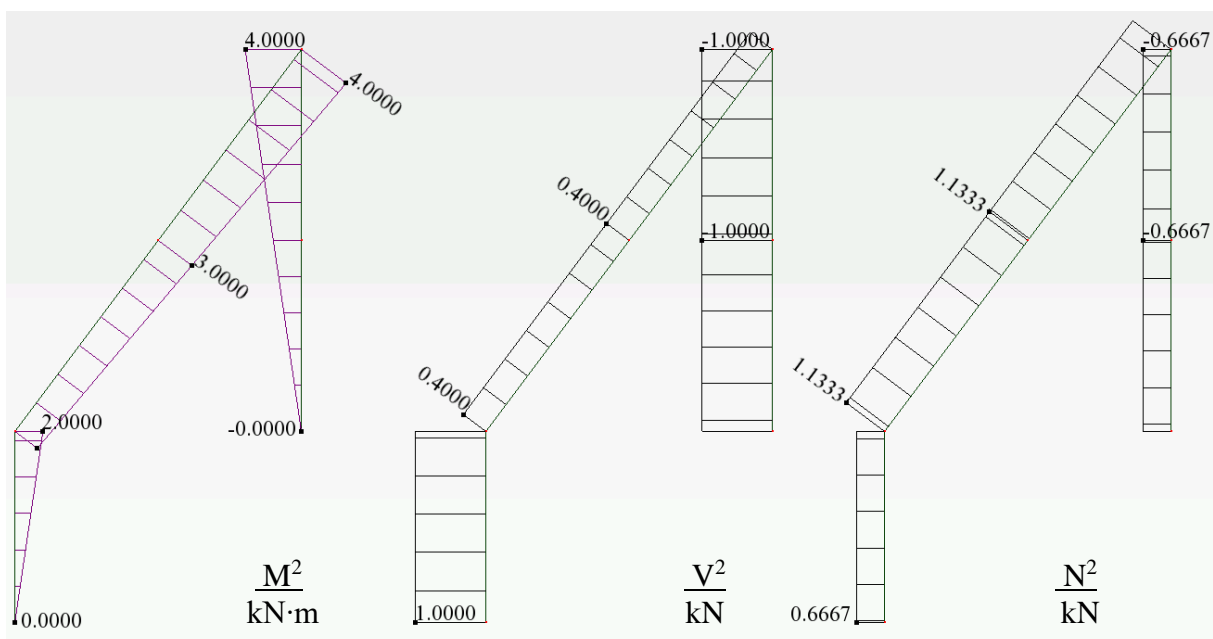
### Obliczenie sił osiowe

$$\bar{N}_{A1}^2 = \bar{N}_{1A}^2 = -\bar{V}_A^2 = 0,6667kN$$

$$\bar{N}_{12}^2 = \bar{N}_{21}^2 = \bar{H}_A^2 \cdot 0,6 - \bar{V}_A^2 \cdot 0,8 = 1kN \cdot 0,6 + \frac{2}{3} kN \cdot 0,8m = 1,1333kN$$

$$\bar{N}_{B2}^2 = \bar{V}_{2B}^2 = \bar{R}_B^2 = -0,6667kN$$

Moment zginający w więzi sprężystej:  $\bar{S}_\varphi^1 = 0kN \cdot m$



Rys. 5.3.2. wykresy sił przekrojowych

## 5.4. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW I WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ

Do obliczenia całek we wzorach podanych w p. 4 zastosowano wzory uproszczonego całkowania (wzór Simpsona lub wzór Wereszczagina).

$$\delta_{11} = \left\{ \frac{1}{2}(-1) \cdot 2 \cdot (-1) + \frac{1}{2}(-1) \cdot 5 \cdot \frac{2}{3}(-1) + \frac{1 \cdot 1}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = \{1 + 1,6667 + 0,1\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 2,7667 \frac{kN \cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_{12} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{5}{6} \left[ -1 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 0 \cdot 4 \right] + 0 + \frac{1 \cdot 0}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = \{-1 - 6,6667 + 0\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = -7,6667 \frac{kN \cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_{1F} = \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [-1 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \cdot (-10) + (-1) \cdot (-20)] + \frac{5}{6} \left[ (-1) \cdot (-40) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-25,5) + 0 \cdot (-20) \right] + 0 + \frac{1 \cdot 0}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = \{10 + 75,8333 + 0\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 85,8333 \frac{kN \cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_{21} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{5}{6} \left[ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot 0 \right] + 0 + \frac{0 \cdot 1}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = \{-1 - 6,6667 + 0\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -7,6667 \frac{kN \cdot m^3}{EI},$$

$$\delta_{22} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{6} [2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4] + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{0 \cdot 0}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = \{1,3333 + 46,6667 + 21,3333 + 0\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = \{1,3333 + 46,6667 + 21,3333 + 0\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = 69,3333 \frac{kN \cdot m^3}{EI},$$

$$\delta_{2F} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-20) + \frac{5}{6} [2 \cdot (-40) + 4 \cdot 3 \cdot (-25,5) + 4 \cdot (-20)] + \frac{2}{6} [4 \cdot (-20) + 4 \cdot 3 \cdot (-10) + 2 \cdot 0] + \frac{1 \cdot 0}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = \{-13,3333 - 388,3333 - 60,6667 + 0\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -468,3333 \frac{kN \cdot m^3}{EI},$$

## 5.5. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$2,7667 \frac{kN \cdot m^2}{EI} X_1^F - 7,6667 \frac{kN \cdot m^2}{EI} X_2^F + 85,8333 \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 0,$$

$$-7,6667 \frac{kN \cdot m^3}{EI} X_1^F + 69,3333 \frac{kN \cdot m^3}{EI} X_2^F - 468,3333 \frac{kN \cdot m^3}{EI} = 0,$$

$$X_1^F = -17,7422, \quad X_2^F = 4,7929.$$

## 5.6. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Rzeczywiste reakcje i siły przekrojowe można obliczyć rozwiązując układ podstawowy od obciążenia i obliczonych w pkt. 5.5 sił hiperstatycznych. Innym sposobem, jest obliczenie reakcji i sił przekrojowych korzystając z zasady superpozycji

$$\begin{aligned}R_i^F &= \bar{R}_i^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_i^F, \\M_{ij}^F &= \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_{ij}^F, \\V_{ij}^F &= \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_{ij}^F, \\N_{ij}^F &= \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_{ij}^F.\end{aligned}$$

### Reakcje

$$\begin{aligned}V_A^F &= \bar{V}_A^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_A^F = \left[ \frac{1}{3} \cdot (-17,7422) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 4,7929 + 26 \right] kN = 16,8904 kN, \\H_A^F &= \bar{H}_A^1 \cdot X_1^F + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^F + \bar{H}_A^F = [0 \cdot (-17,7422) + 1 \cdot 4,7929 - 10] kN = -5,2071 kN, \\R_B^F &= \bar{R}_B^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_B^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_B^F = \left[ \frac{1}{3} \cdot (-17,7422) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 4,7929 + 14 \right] kN = 4,8907 kN.\end{aligned}$$

### Momenty zginające

$$\begin{aligned}M_{A1}^F &= \bar{M}_{A1}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{A1}^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_{A1}^F = [1 \cdot (-17,7422) + 0 \cdot 4,7929 + 0] kN \cdot m = 17,7422 kN \cdot m \\ \bar{M}_{1A}^F &= [(-1) \cdot (-17,7422) + 2 \cdot 4,7929 + (-20)] kN \cdot m = 7,3280 kN \cdot m \\ \bar{M}_{12}^F &= [(-1) \cdot (-17,7422) + 2 \cdot 4,7929 + (-40)] kN \cdot m = -12,6720 kN \cdot m \\ \bar{M}_3^F &= \left[ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-17,7422) + 3 \cdot 4,7929 + (-25,5) \right] kN \cdot m = -2,2502 kN \cdot m \\ \bar{M}_{21}^F &= [0 \cdot (-17,7422) + 4 \cdot 4,7929 + (-20)] kN \cdot m = -0,8284 kN \cdot m \\ \bar{M}_{B2}^F &= [0 \cdot (-17,7422) + 0 \cdot 4,7929 + 0] kN \cdot m = 0 kN \cdot m \\ \bar{M}_4^F &= [0 \cdot (-17,7422) + 2 \cdot 4,7929 + 0] kN \cdot m = 9,5858 kN \cdot m \\ \bar{M}_{2B}^F &= [0 \cdot (-17,7422) + 4 \cdot 4,7929 + (-20)] kN \cdot m = -0,8284 kN \cdot m\end{aligned}$$

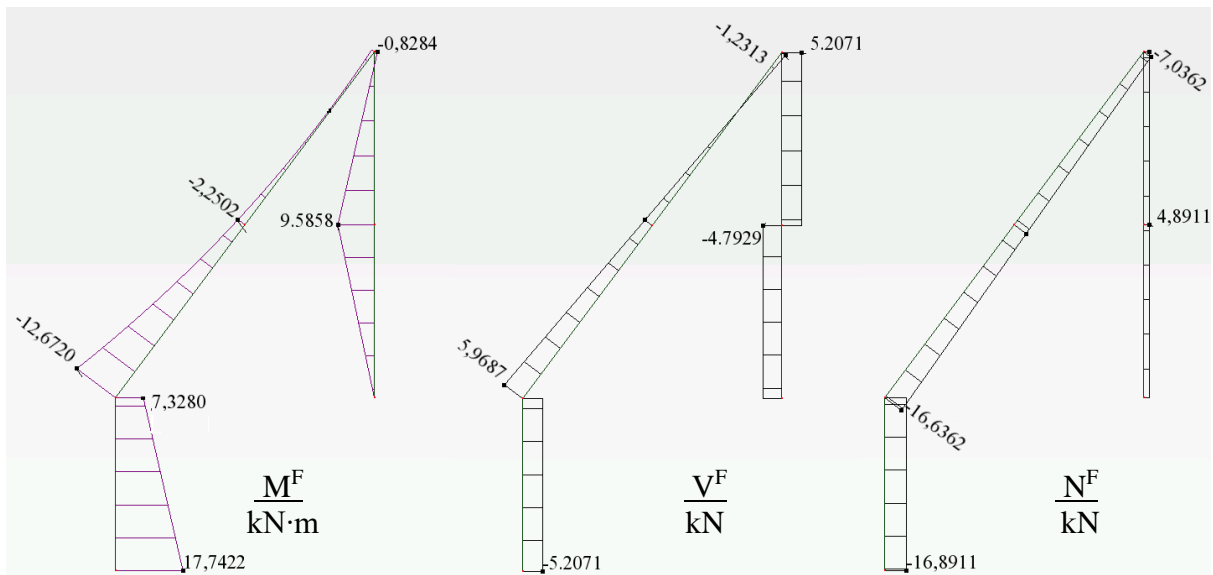
### Sily tnące

$$\begin{aligned}V_{A1}^F &= \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_{A1}^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_{A1}^F = [0 \cdot (-17,7422) + 1 \cdot 4,7929 + (-10)] kN = -5,2071 kN = V_{1A}^F \\ V_{12}^F &= [0,2 \cdot (-17,7422) + 0,4 \cdot 4,7929 + 7,6] kN = 5,9687 kN \\ V_{21}^F &= [0,2 \cdot (-17,7422) + 0,4 \cdot 4,7929 + 0,4] kN = -1,2313 kN \\ V_{B4}^F &= [0 \cdot (-17,7422) + (-1) \cdot 4,7929 + 0] kN = -4,7929 kN = V_{4B}^F \\ V_{42}^F &= [0 \cdot (-17,7422) + (-1) \cdot 4,7929 + 10] kN = 5,2071 kN = V_{24}^F\end{aligned}$$

### Sily osiowe

$$\begin{aligned}N_{A1}^F &= \bar{N}_{A1}^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_{A1}^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_{A1}^F = [(-0,3333) \cdot (-17,7422) + 0,6667 \cdot 4,7929 + (-26)] kN = -16,8911 kN = N_{1A}^F \\ N_{12}^F &= [(-0,2667) \cdot (-17,7422) + 1,1333 \cdot 4,7929 + (-26,8)] kN = -16,6362 kN \\ N_{21}^F &= [-0,2667 \cdot (-17,7422) + 1,1333 \cdot 4,7929 + (-17,2)] kN = -7,0362 kN \\ N_{B2}^F &= [0,3333 \cdot (-17,7422) + (-0,6667) \cdot 4,7929 + 14] kN = 4,8911 kN = N_{2B}^F\end{aligned}$$

**Moment zginający w więzi sprężystej:**  $\bar{S}_\varphi^F = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^F = [1 \cdot (-17,7422)] kN \cdot m = -17,7422 kN \cdot m$

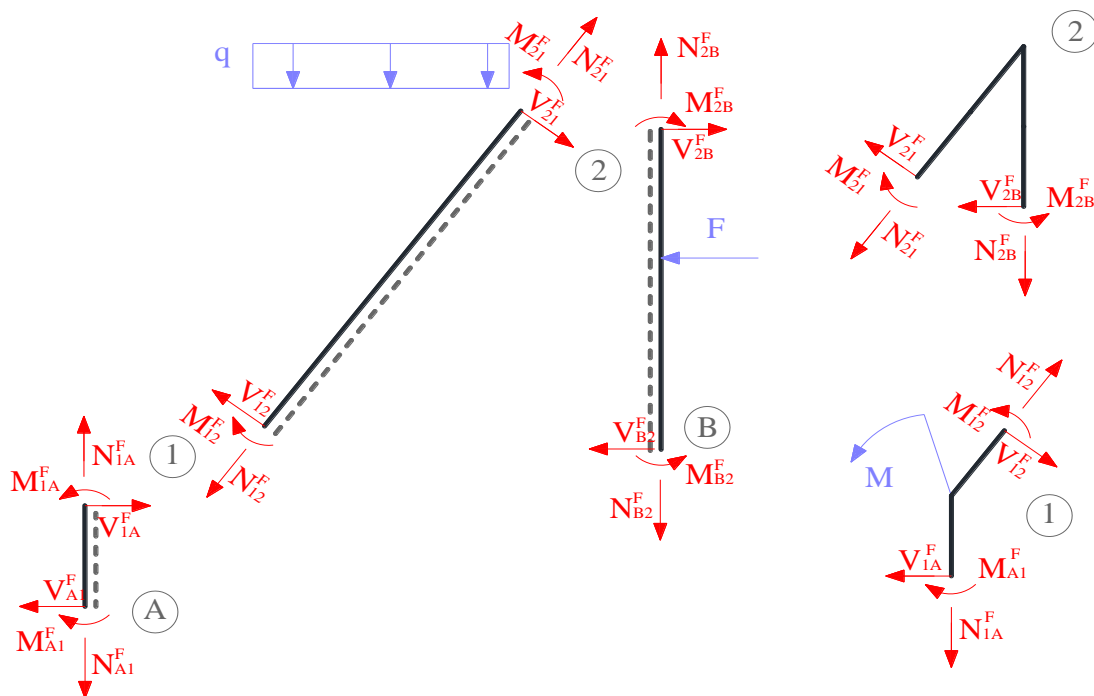


Rys. 5.6.1. wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

## 5.7. KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

### 5.7.1. KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola statycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu czy siły spełniają równania równowagi na prętach i w węzłach. Wektory sił przekrojowych wskazują dodatnie wartości zgodnie z wyróżnionymi włóknami uprzywilejowanymi



Rys. 5.7.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

### Pręt A-1

$$\sum M_A = M_{A1}^F - M_{1A}^F + V_{1A}^F \cdot 1m = [17,7422 - 7,3280 + (-5,2071) \cdot 2] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{A1}^F - V_{1A}^F = [5,2701 - 5,2071] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{A1}^F - N_{1A}^F = [16,8911 - 16,8911] kN = 0.$$

### Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^F - M_{21}^F + V_{21}^F \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m = [-12,6720 - (-0,8284) + (-1,2313) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m \approx 0,$$

$$\sum V = V_{12}^F - V_{21}^F - q \cdot 3m \cdot \cos \alpha = [5,9687 - (-1,2313) - 4 \cdot 3 \cdot 0,6] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{12}^F - N_{21}^F + q \cdot 3m \cdot \sin \alpha = [-16,6362 - (-7,0362) + 4 \cdot 3 \cdot 0,8] kN = 0.$$

### Pręt 1-2

$$\sum M_B = M_{B2}^F - M_{2B}^F - V_{2B}^F \cdot 4m + F \cdot 2m = [0 - (-0,8284) - 5,2071 \cdot 4 + 10 \cdot 2] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{B2}^F - V_{2B}^F + F = [-4,7929 - 5,2071 + 10] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{B2}^F - N_{2B}^F = [4,8911 - 4,8911] kN = 0.$$

### Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{1A}^F - M_{12}^F - M = [7,3280 - (-12,6720) - 20] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = -V_{1A}^F + V_{12}^F \cdot \sin \alpha + N_{12}^F \cdot \cos \alpha = [5,2071 + 5,9687 \cdot 0,8 + (-16,6362) \cdot 0,6] kN = 0,0003 kN,$$

$$\sum Y = N_{1A}^F - N_{12}^F \sin \alpha + V_{12}^F \cdot \cos \alpha = [-16,8911 - (-16,6362) \cdot 0,8 + 5,9687 \cdot 0,6] kN = -0,0002 kN.$$

### Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21}^F - M_{2B}^F = [-0,8284 - (-0,8284)] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = -V_{2B}^F - V_{21}^F \cdot \sin \alpha - N_{21}^F \cdot \cos \alpha = [-5,2071 - (-1,2313) \cdot 0,8 - (-7,0362) \cdot 0,6] kN = 0,0003 kN,$$

$$\sum Y = N_{2B}^F + N_{21}^F \cdot \sin \alpha - V_{21}^F \cdot \cos \alpha = [4,8911 + (-7,0362) \cdot 0,8 - (-1,2313) \cdot 0,6] kN = -0,0009 kN.$$

## 5.7.2. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

**Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania** polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach usuniętych lub przeciętych więzi. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu.

$$\Delta_{iF} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_i$$

$$\Delta_{1F} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_1 = \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [(-1) \cdot 17,7422 + 4 \cdot (-1) \cdot 12,5351 + (-1) \cdot 7,3280] + \frac{5}{6} [(-1) \cdot (-12,6720) + 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2,2502) + 0] + \frac{1 \cdot (-17,7422)}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 0,0010 \frac{kN \cdot m^2}{EI}$$

$$\Delta_{2F} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_1 = \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [0 \cdot 17,7422 + 4 \cdot 1 \cdot 12,5351 + 2 \cdot 7,3280] + \right. \\ \left. + \frac{5}{6} [2 \cdot (-12,6720) + 4 \cdot 3 \cdot (-2,2502) + 4 \cdot (-0,8284)] + \frac{2}{6} [0 + 4 \cdot 1 \cdot (4,7929) + 2 \cdot 9,5858] + \right. \\ \left. + \frac{2}{6} [4 \cdot (-0,8284) + 4 \cdot 3 \cdot (4,3787) + 2 \cdot 9,5858] + \frac{0 \cdot (-17,7422)}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -0,0025 \frac{kN \cdot m^3}{EI}$$

## 6. WSTĘPNE PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW PRĘTÓW.

Projektowanie prętów przyjmując założenia:

średni współczynnik obciążenia:  $\gamma_f = 1,5$ ,  
 wytrzymałość obliczeniową stali  $f_d = 215 \text{ MPa}$ ,  
 moduł Younga:  $E = 210 \text{ GPa}$ .

$$W \geq \frac{\max M \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{12,6720 \cdot 1,5}{215000} m^3 = 0,000088409 m^3 = 88,409 cm^3$$

Uwzględniając, że układ składa się z prętów o sztywności EI oraz 2EI przyjęto dwuteownik równoległościenny IPE 160 dla prętów o sztywności EI oraz 2 IPE 160 dla pręta o sztywności 2EI

$$W_{IPE 160} = 108,6 \text{ cm}^3, I_{IPE 160} = 869,293 \text{ cm}^4 \\ EI = 210000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 869,293 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 1825,4019 \text{ kNm}^2, \\ k_\varphi = 10 EI/m = 18254,019 \text{ kNm/rad}.$$

## 7. ROZWIĄZANIE UKŁADU OD TEMPERATURY

### 7.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD TEMPERATURY

W układach statycznie wyznaczalnych obciążenia niemechaniczne nie powodują powstania sił przekrojowych

### 7.2. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN·m

Jak w punkcie 5.2

### 7.3. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_2=1$ ) kN

Jak w punkcie 5.3

### 7.4. OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ

Wyrazy wolne  $\delta_{iT}$  należy obliczyć według wzoru

$$\delta_{iT} = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i},$$

gdzie  $\Delta T_w$  to temperatura po stronie włókien uprzywilejowanych,  $\Delta T_p$  to temperatura po stronie przeciwnej do włókien uprzywilejowanych a  $\Delta T_o = (\Delta T_w + \Delta T_p) / 2$  jest temperą w osi pręta symetrycznego,  $h$  to wysokość przekroju. Do obliczeń przyjmujemy:  $\alpha = 0.000012/^\circ\text{C}$ ,  $h_{\text{IPE 160}} = 0,16 \text{ m}$

$$\Delta T_{0,12} = [(-15 + 25) / 2]^\circ\text{C} = 5^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{0,2B} = [(10 - 20) / 2]^\circ\text{C} = -5^\circ\text{C}$$

$$\Omega_{\bar{M}_{y,12}^1} = \left(-1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}\right) \text{kN} \cdot \text{m}^2 = -2,5 \text{kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$\Omega_{\bar{M}_{y,12}^2} = \left((4 + 2) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}\right) \text{kN} \cdot \text{m}^2 = 15 \text{kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$\Omega_{\bar{M}_{y,2B}^1} = 0,$$

$$\Omega_{\bar{M}_{y,2B}^2} = \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}\right) \text{kN} \cdot \text{m}^2 = 8 \text{kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$\Omega_{\bar{N}_{y,12}^1} = (-0,2667 \cdot 5) \text{kN} \cdot \text{m} = -1,3335 \text{kN} \cdot \text{m},$$

$$\Omega_{\bar{N}_{y,12}^2} = (1,1333 \cdot 5) \text{kN} \cdot \text{m} = 5,6665 \text{kN} \cdot \text{m},$$

$$\Omega_{\bar{N}_{y,2B}^1} = (0,3333 \cdot 4) \text{kN} \cdot \text{m} = 1,3332 \text{kN} \cdot \text{m},$$

$$\Omega_{\bar{N}_{y,2B}^2} = (-0,6667 \cdot 4) \text{kN} \cdot \text{m} = -2,6668 \text{kN} \cdot \text{m}.$$

$$\delta_{1T} = \left[ \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_o \Omega_{\bar{N}_y^i} \right] / P_1 = \left[ 0,000012 \cdot \frac{-15 - 25}{0,16} \cdot (-2,5) + 0 + 0,000012 \cdot 5 \cdot (-1,3335) + 0,000012 \cdot (-5) \cdot 1,3332 \right] \text{rad} = 7,3400 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{2T} = \left[ \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_o \Omega_{\bar{N}_y^i} \right] / P_2 = \left[ 0,000012 \cdot \frac{-15 - 25}{0,16} \cdot (15) + 0,000012 \cdot \frac{10 - (-20)}{0,16} \cdot 8 + 0,000012 \cdot 5 \cdot 5,6665 + 0,000012 \cdot (-5) \cdot (-2,6668) \right] \text{m} = -0,0265 \text{m}$$

## 7.5. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$2,7667 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}^2}{EI} X_1^T - 7,6667 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}^2}{EI} X_2^T + 7,3400 \cdot 10^{-3} = 0,$$

$$-7,6667 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}^3}{EI} X_1^T + 69,3333 \frac{\text{kN} \cdot \text{m}^3}{EI} X_2^T - 0,0265 \text{m} = 0,$$

$$X_1^T = -0,002298 \frac{EI}{\text{kN} \cdot \text{m}^2} = -0,002298 \frac{1825,4019 \text{kN} \cdot \text{m}^2}{\text{kN} \cdot \text{m}^2} = -4,1948,$$

$$X_2^T = 0,000121 \frac{EI}{\text{kN} \cdot \text{m}^2} = 0,000121 \frac{1825,4019 \text{kN} \cdot \text{m}^2}{\text{kN} \cdot \text{m}^2} = 0,2209.$$

## 7.6. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Reakcji i sił przekrojowe obliczono korzystając z zasady superpozycji

$$R_i^T = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^T + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^T,$$

$$M_{ij}^T = \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^T,$$

$$V_{ij}^T = \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^T,$$

$$N_{ij}^T = \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^T.$$



## Reakcje

$$V_A^T = \bar{V}_A^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^T = \left[ \frac{1}{3} \cdot (-4,1948) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,2209 \right] kN = -1,6192 kN,$$

$$H_A^T = \bar{H}_A^1 \cdot X_1^T + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^T = [0 \cdot (-4,1948) + 1 \cdot 0,2209] kN = 0,2209 kN,$$

$$R_B^T = \bar{R}_B^1 \cdot X_1^T + \bar{R}_B^2 \cdot X_2^T = \left[ \frac{1}{3} \cdot (-4,1948) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,2209 \right] kN = -1,6192 kN.$$

## Momenty zginające

$$M_{A1}^T = \bar{M}_{A1}^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_{A1}^2 \cdot X_2^T = [(-1) \cdot (-4,1948) + 0 \cdot 0,2209] kN \cdot m = 4,1948 kN \cdot m$$

$$\bar{M}_{1A}^T = [(-1) \cdot (-4,1948) + 2 \cdot 0,2209] kN \cdot m = 4,6366 kN \cdot m = \bar{M}_{12}^T$$

$$\bar{M}_{21}^T = [0 \cdot (-4,1948) + 4 \cdot 0,2209] kN \cdot m = 0,8836 kN \cdot m = \bar{M}_{2B}^T$$

$$\bar{M}_{B2}^T = [0 \cdot (-4,1948) + 0 \cdot 0,2209] kN \cdot m = 0 kN \cdot m$$

## Sily tnące

$$V_{A1}^T = \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_{A1}^2 \cdot X_2^T = [0 \cdot (-4,1948) + 1 \cdot 0,2209] kN = 0,2209 kN = V_{1A}^T$$

$$V_{12}^T = [0,2 \cdot (-4,1948) + 0,4 \cdot 0,2209] kN = -0,7506 kN = V_{21}^T$$

$$V_{B2}^T = [0 \cdot (-4,1948) + (-1) \cdot 0,2209] kN = -0,2209 kN = V_{2B}^T$$

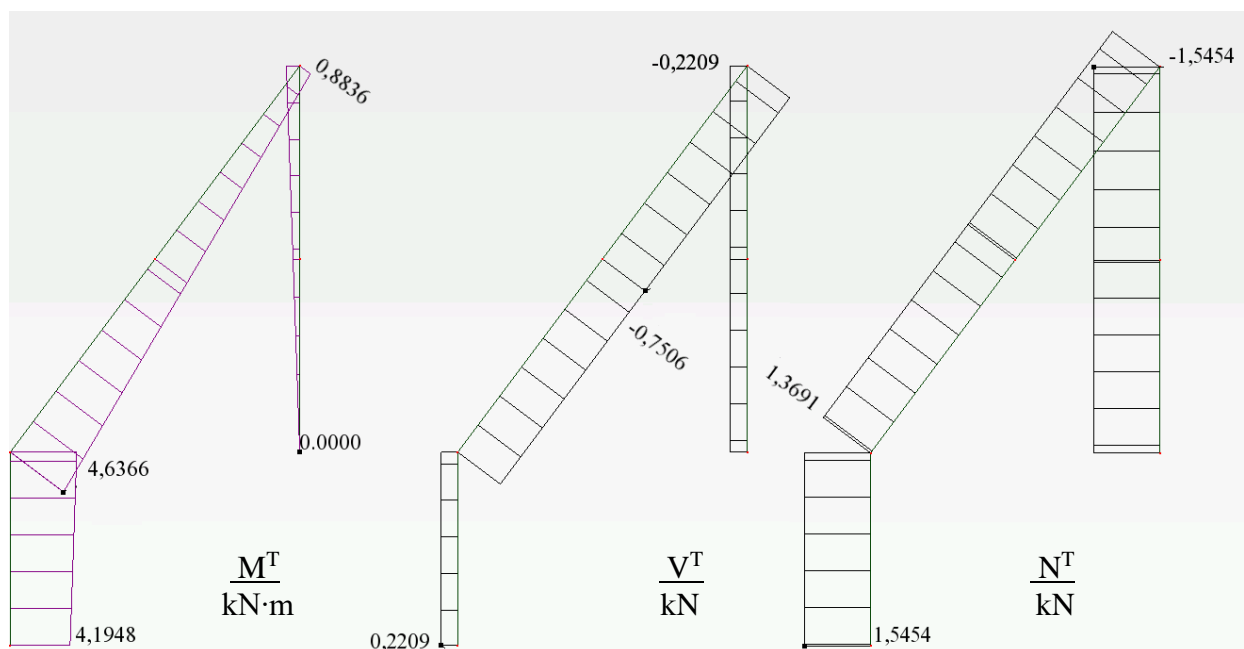
## Sily osiowe

$$N_{A1}^T = \bar{N}_{A1}^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_{A1}^2 \cdot X_2^T = [(-0,3333) \cdot (-4,1948) + 0,6667 \cdot 0,2209] kN = 1,5454 kN = N_{1A}^T$$

$$N_{12}^T = [(-0,2667) \cdot (-4,1948) + 1,1333 \cdot 0,2209] kN = 1,3691 kN = N_{21}^T$$

$$N_{B2}^T = [0,3333 \cdot (-4,1948) + (-0,6667) \cdot 0,2209] kN = -1,5454 kN = N_{2B}^T$$

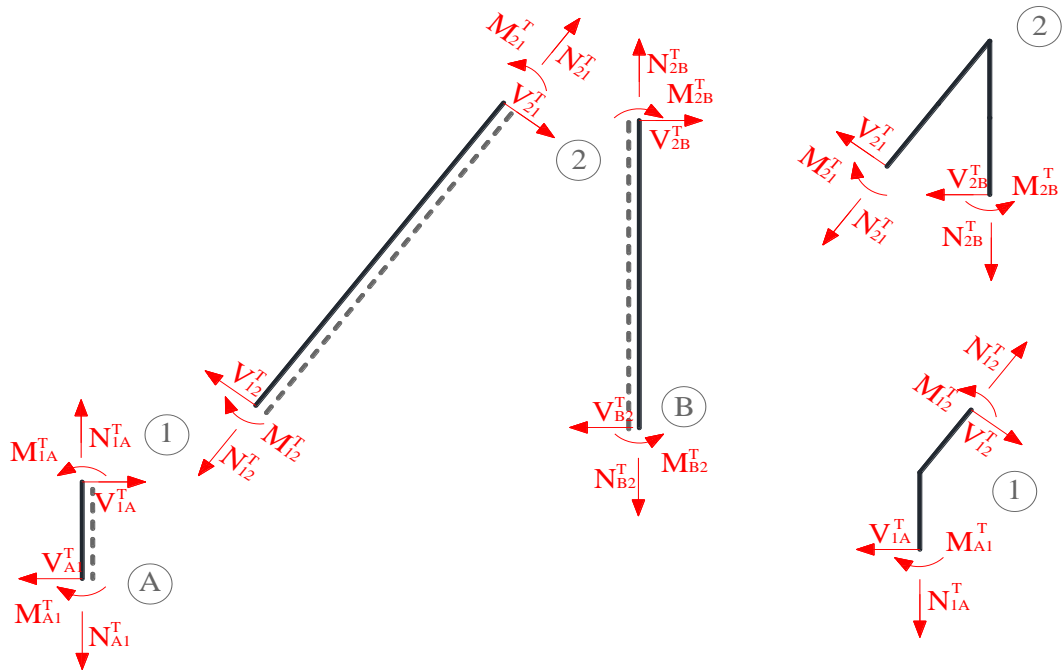
$$\text{Moment zginający w więzi sprężystej: } \bar{S}_\varphi^T = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^T = [1 \cdot (-4,1948)] kN \cdot m = -4,1948 kN \cdot m$$



Rys. 7.6.1. wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia temperaturą

## 7.7. KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

### 7.7.1 KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA



Rys. 7.7.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

#### Pręt A-1

$$\sum M_A = M_{A1}^T - M_{1A}^T + V_{1A}^T \cdot 1m = [4,1948 - 4,6366 + 0,2209 \cdot 2] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{A1}^T - V_{1A}^T = [0,2209 - 0,2209] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{A1}^T - N_{1A}^T = [1,5454 - 1,5454] kN = 0.$$

#### Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^T - M_{21}^T + V_{21}^T \cdot 5m = [4,6366 - (0,8836) + (-0,7506) \cdot 5] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{12}^T - V_{21}^T = [(-0,7506) - (-0,7506)] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{12}^T - N_{21}^T = [1,3691 - 1,3691] kN = 0.$$

#### Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2}^T - M_{2B}^T - V_{2B}^T \cdot 4m = [0 - 0,8836 - (-0,2209) \cdot 4] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{B2}^T - V_{2B}^T = [(-0,2209) - (-0,2209)] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{B2}^T - N_{2B}^T = [-1,5454 - (-1,5454)] kN = 0.$$

#### Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{1A}^T - M_{12}^T = [(-4,6366) - (-4,6366) - 20] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = -V_{1A}^T + V_{12}^T \cdot \sin \alpha + N_{12}^T \cdot \cos \alpha = [-0,2209 + (-0,7506) \cdot 0,8 + 1,3691 \cdot 0,6] kN = 0,$$

$$\sum Y = N_{1A}^T - N_{12}^T \sin \alpha + V_{12}^T \cdot \cos \alpha = [1,5454 - 1,3991 \cdot 0,8 + (-0,7506) \cdot 0,6] kN = -0,0002 kN.$$

## Węzeł 2

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= M_{21}^T - M_{2B}^T = [0,8836 - 0,8836] kN \cdot m = 0, \\ \sum X &= -V_{2B}^T - V_{21}^T \cdot \sin \alpha - N_{21}^T \cdot \cos \alpha = [0,2209 - (-0,7506) \cdot 0,8 - 1,3691 \cdot 0,6] kN = 0, \\ \sum Y &= N_{2B}^T + N_{21}^T \cdot \sin \alpha - V_{21}^T \cdot \cos \alpha = [-1,5454 + 1,3691 \cdot 0,8 - (-0,7506) \cdot 0,6] kN = 0.\end{aligned}$$

### 7.7.2. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

$$\begin{aligned}\Delta_{iT} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} \right\} / P_i, \\ \Delta_{1T} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^1} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^1} \right\} / P_1 = \\ &= \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [(-1) \cdot 4,1948 + 4 \cdot (-1) \cdot 4,4157 + (-1) \cdot 4,6366] + \frac{5}{6} [(-1) \cdot 4,6366 + 4 \cdot (-0,5) \cdot 2,7601 + 0] + \right. \\ &+ \left. \frac{1 \cdot (-4,1948)}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} + \left\{ 0,000012 \cdot \frac{-15 - 25}{0,16} \cdot (-2,5) + 0 + 0,000012 \cdot 5 \cdot (-1,3335) = \right. \\ &+ \left. 0,000012 \cdot (-5) \cdot 1,3332 \right\} = \{-4,4157 - 8,464 - 0,41948\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 7,3400 \cdot 10^{-3} = \\ &= \frac{-12,2956 kN \cdot m^2}{1825,4019 kN \cdot m^2} + 7,3400 \cdot 10^{-3} = 0 \\ \Delta_{2T} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^2} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^2} \right\} / P_2 = \\ &= \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [0 \cdot 4,1948 + 4 \cdot 1 \cdot 4,4157 + 2 \cdot 4,6366] + \frac{5}{6} [2 \cdot 4,6366 + 4 \cdot 3 \cdot 2,7601 + 4 \cdot 0,8836] + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{6} [4 \cdot 0,8836 + 4 \cdot 2 \cdot 0,4418 + 0] \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} + \left[ 0,000012 \cdot \frac{-15 - 25}{0,16} \cdot (15) + 0,000012 \cdot \frac{10 - (-20)}{0,16} \cdot 8 + \right. \\ &+ \left. 0,000012 \cdot 5 \cdot 5,6665 + 0,000012 \cdot (-5) \cdot (-2,6668) \right] m = [4,4893 + 38,274 + 4,7125] \frac{kN \cdot m^3}{EI} - 0,0265 m = \\ &= \frac{47,4758 kN \cdot m^3}{1825,4019 kN \cdot m^2} - 0,0265 m = 0,0005 m\end{aligned}$$

## 8. ROZWIĄZANIE UKŁADU OD PRZEMIESZCZENIA PODPÓR

### 8.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD PRZEMIESZCZENIA PODPÓR

W układach statycznie wyznaczalnych obciążenia niemechaniczne nie powodują powstania sił przekrojowych.

### 8.2. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD (X<sub>1</sub>=1) kN·m

Jak w punkcie 5.2

### 8.3. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD ( $X_1=1$ ) kN·m

Jak w punkcie 5.3

### 8.4. OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ

Wyrazy wolne  $\delta_{i\Delta}$  należy obliczyć według wzoru

$$\delta_{i\Delta} = \left[ -\sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n \right] / P_i$$

Przemieszczenia podpory występują w węźle A (obrót  $\Delta r_1$ ) oraz w węźle B (pionowe  $\Delta r_1$ ). Ponieważ usunięto więź podporową (zastępując ją siłą  $X_1$ ), w której zadano przemieszczenie, prawa strona pierwszego równania, która jest rzeczywistym przemieszczeniem w tym miejscu, równa jest temu przemieszczeniu.

$$\bar{R}_B^1 = \frac{1}{3} kN \quad \bar{R}_B^2 = -\frac{2}{3} kN$$

$$\delta_{1\Delta} = \left[ -\sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n \right] / P_1 = \left[ -\bar{R}_B^1 \Delta r_1 - \bar{S}_\varphi^1 \Delta r \right] / kN \cdot m = -\left( \frac{1}{3} \cdot 0,04 + 1 \cdot 0,06 \right) = -0,0733$$

$$\delta_{2\Delta} = \left[ -\sum_n \bar{R}_n^2 \Delta r_n \right] / P_2 = \left[ -\bar{R}_B^2 \Delta r_1 \right] / kN = -\left( -\frac{2}{3} \cdot 0,04 \right) m = 0,0267m$$

### 8.5. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$2,7667 \frac{kN \cdot m^2}{EI} X_1^T - 7,6667 \frac{kN \cdot m^2}{EI} X_2^T - 0,0733 = 0,$$

$$-7,6667 \frac{kN \cdot m^3}{EI} X_1^T + 69,3333 \frac{kN \cdot m^3}{EI} X_2^T + 0,0267m = 0,$$

$$X_1^T = 0,003668 \frac{EI}{kN \cdot m^2} = 0,005412 \frac{1825,4019 kN \cdot m^2}{kN \cdot m^2} = 66,9539,$$

$$X_2^T = 0,000367 \frac{EI}{kN \cdot m^2} = 0,000367 \frac{1825,4019 kN \cdot m^2}{kN \cdot m^2} = 6,7015.$$

### 8.6. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Reakcje i siły przekrojowe obliczono korzystając z zasady superpozycji

$$R_i^\Delta = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^\Delta,$$

$$M_{ij}^\Delta = \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^\Delta,$$

$$V_{ij}^\Delta = \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^\Delta,$$

$$N_{ij}^\Delta = \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^\Delta.$$

## Reakcje

$$V_A^\Delta = \bar{V}_A^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^\Delta = \left[ \frac{1}{3} \cdot 66,9539 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 6,7015 \right] kN = 17,8503 kN,$$

$$H_A^\Delta = \bar{H}_A^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^\Delta = [0 \cdot 66,9539 + 1 \cdot 6,7015] kN = 6,7015 kN,$$

$$R_B^\Delta = \bar{R}_B^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{R}_B^2 \cdot X_2^\Delta = \left[ \frac{1}{3} \cdot 66,9539 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 6,7015 \right] kN = 17,8503 kN.$$

## Momenty zginające

$$M_{A1}^\Delta = \bar{M}_{A1}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{M}_{A1}^2 \cdot X_2^\Delta = [(-1) \cdot 66,9539 + 0 \cdot 6,7015] kN \cdot m = -66,9539 kN \cdot m$$

$$\bar{M}_{1A}^\Delta = [(-1) \cdot 66,9539 + 2 \cdot 6,7015] kN \cdot m = -53,5509 kN \cdot m = \bar{M}_{12}^\Delta$$

$$\bar{M}_{21}^\Delta = [0 \cdot 66,9539 + 4 \cdot 6,7015] kN \cdot m = 26,806 kN \cdot m = \bar{M}_{2B}^\Delta$$

$$\bar{M}_{B2}^\Delta = [0 \cdot 66,9539 + 0 \cdot 6,7015] kN \cdot m = 0 kN \cdot m$$

## Sily tnące

$$V_{A1}^\Delta = \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_{A1}^T \cdot X_2^\Delta = [0 \cdot 66,9539 + 1 \cdot 6,7015] kN = 6,7015 kN = V_{1A}^\Delta$$

$$V_{12}^\Delta = [0,2 \cdot 66,9539 + 0,4 \cdot 6,7015] kN = 16,07138 kN = V_{21}^\Delta$$

$$V_{B2}^\Delta = [0 \cdot 66,9539 + (-1) \cdot 6,7015] kN = -6,7015 kN = V_{2B}^\Delta$$

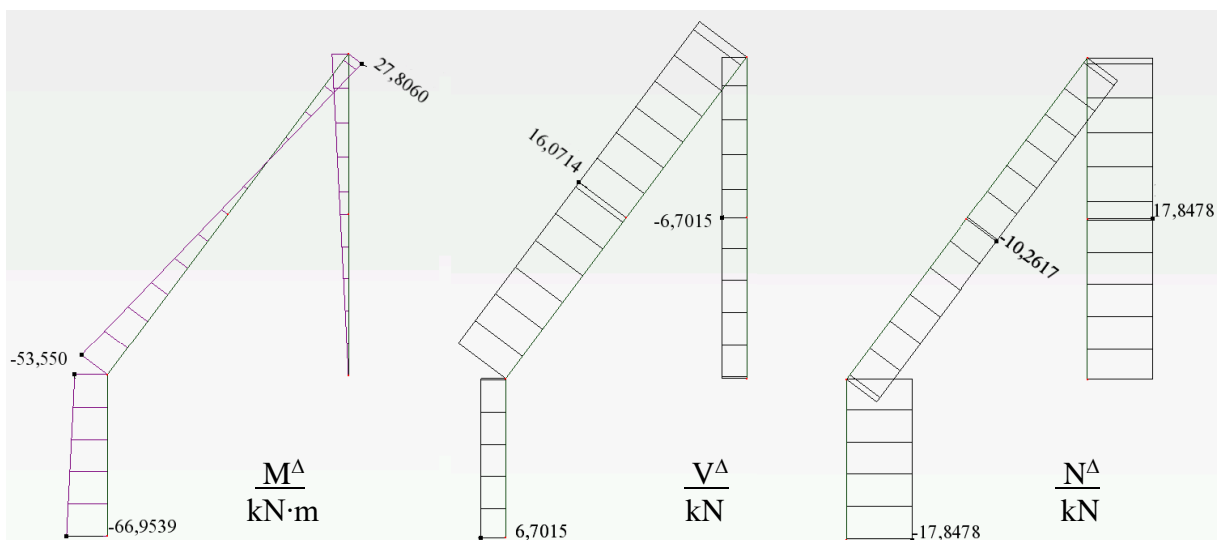
## Sily osiowe

$$N_{A1}^\Delta = \bar{N}_{A1}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{N}_{A1}^2 \cdot X_2^\Delta = [(-0,3333) \cdot 66,9539 + 0,6667 \cdot 6,7015] kN = -17,8478 kN = N_{1A}^\Delta$$

$$N_{12}^\Delta = [(-0,2667) \cdot 66,9539 + 1,1333 \cdot 6,7015] kN = -10,2617 kN = N_{21}^\Delta$$

$$N_{B2}^\Delta = [0,3333 \cdot 66,9539 + (-0,6667) \cdot 6,7015] kN = 17,8478 = N_{2B}^\Delta$$

$$\text{Moment zginający w więzi sprężystej: } \bar{S}_\varphi^\Delta = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^\Delta = [1 \cdot 66,9539] kN \cdot m = 66,9539 kN \cdot m$$

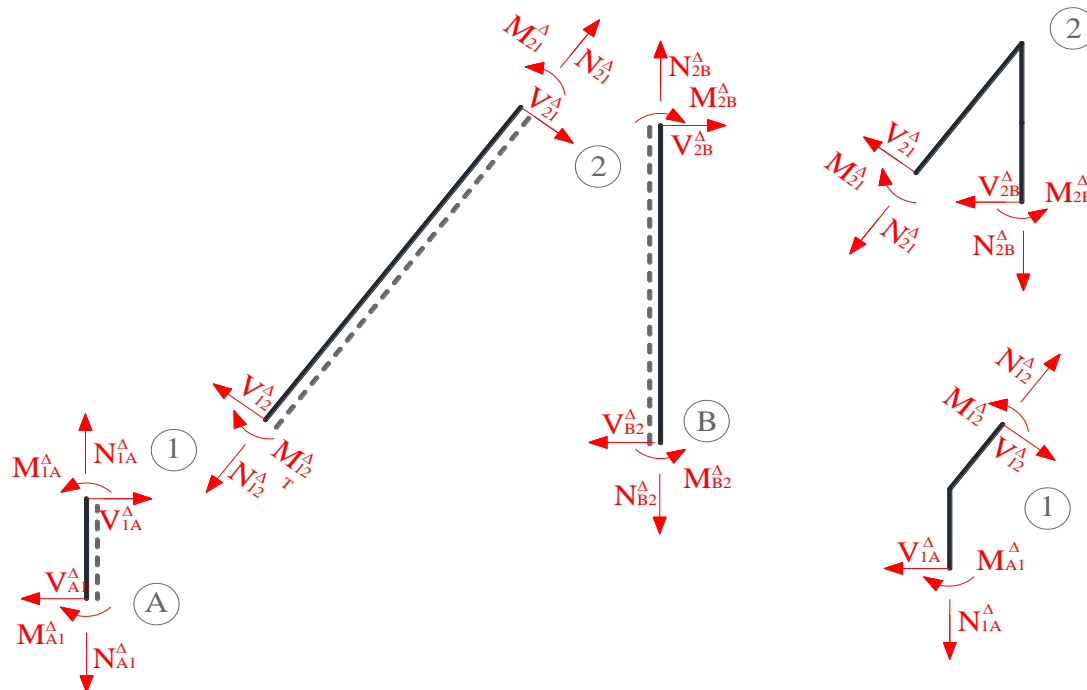


Rys. 8.6.1. wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

## 8.7. KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

### 8.7.1. KONTROLA STATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola statycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu czy siły spełniają równania równowagi na prętach i w węzłach. Wektory sił przekrojowych wskazują dodatnie wartości zgodnie z wyróżnionymi włóknami uprzywilejowanymi



Rys. 8.7.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

#### Pręt A-1

$$\sum M_A = M_{A1}^A - M_{1A}^A + V_{1A}^A \cdot 1m = [-66,9639 - (-53,5509) + 6,7015 \cdot 2] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{A1}^A - V_{1A}^A = [6,7015 - 6,7015] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{A1}^A - N_{1A}^A = [-17,8478 - (-17,8478)] kN = 0.$$

#### Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^A - M_{21}^A + V_{21}^A \cdot 5m = [-53,5509 - 26,806 + 16,0713 \cdot 5] kN \cdot m = -0,0004 kN \cdot m,$$

$$\sum V = V_{12}^A - V_{21}^A = [2,1320 - 2,1320] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{12}^A - N_{21}^A = [-2,2034 - (-2,2034)] kN = 0.$$

#### Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2}^A - M_{2B}^A - V_{2B}^A \cdot 4m = [0 - 26,806 - (-6,7015) \cdot 4] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum V = V_{B2}^A - V_{2B}^A = [(-6,7015) - (-6,7015)] kN = 0,$$

$$\sum N = N_{B2}^A - N_{2B}^A = [17,8478 - 17,8478] kN = 0.$$

### Węzeł 1

$$\begin{aligned}\sum M_1 &= M_{1A}^\Delta - M_{12}^\Delta = [(-53,5509) - (-53,5508)] kN \cdot m = 0, \\ \sum X &= -V_{1A}^\Delta + V_{12}^\Delta \cdot \sin \alpha + N_{12}^\Delta \cdot \cos \alpha = [-6,7015 + 16,0714 \cdot 0,8 + (-10,2617) \cdot 0,6] kN = -0,0014 kN, \\ \sum Y &= N_{1A}^\Delta - N_{12}^\Delta \sin \alpha + V_{12}^\Delta \cdot \cos \alpha = [-17,8478 - (-10,2617) \cdot 0,8 + 16,0714 \cdot 0,6] kN = -0,0044 kN.\end{aligned}$$

### Węzeł 2

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= M_{21}^\Delta - M_{2B}^\Delta = [1,5624 - 1,5624] kN \cdot m = 0, \\ \sum X &= -V_{2B}^\Delta - V_{21}^\Delta \cdot \sin \alpha - N_{21}^\Delta \cdot \cos \alpha = [-(0,3906) - 2,1320 \cdot 0,8 - (-2,2034) \cdot 0,6] kN = 0,0007 kN, \\ \sum Y &= N_{2B}^\Delta + N_{21}^\Delta \cdot \sin \alpha - V_{21}^\Delta \cdot \cos \alpha = [3,0389 + (-2,2034) \cdot 0,8 - 2,1320 \cdot 0,6] kN = 0,003 kN.\end{aligned}$$

## 8.7.2. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

$$\begin{aligned}\Delta_{i\Delta} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n \right\} / P_i, \\ \Delta_{1\Delta} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n \right\} / P_1 = \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [(-1) \cdot (-66,9539) + 4 \cdot (-1) \cdot (-60,2524) + (-1) \cdot (-53,5509)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{6} [(-1) \cdot (-53,5509) + 4 \cdot (-0,5) \cdot (-13,3725) + 0] + \frac{1 \cdot 66,9539}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} - \left( \frac{1}{3} \cdot 0,04 + 1 \cdot 0,06 \right) = \\ &= (60,2524 + 66,9133 + 6,6954) \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 0,0133 = 133,8611 \frac{133,8611 kN \cdot m^2}{1825,4019 kN \cdot m^2} - 0,0133 = 0,0733 - 0,0733 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2\Delta} &= \left\{ \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^2 \Delta r_n \right\} / P_2 = \left\{ \frac{2}{6 \cdot 2} [0 \cdot (-66,9539) + 4 \cdot 1 \cdot (-60,2524) + 2 \cdot (-53,5509)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{6} [2 \cdot (-53,5509) + 4 \cdot 3 \cdot (-13,3725) + 4 \cdot 26,806] + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 26,806 + \frac{0 \cdot 66,9539}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} - \\ &\quad - \left( -\frac{2}{3} \cdot 0,04 \right) m = (-58,0172 - 133,6232 + 142,9653) \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,0267 m = \\ &= -48,6751 \frac{kN \cdot m^3}{1825,4019 kN \cdot m^2} + 0,00267 m = 0,00003 m\end{aligned}$$

## 9. OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA

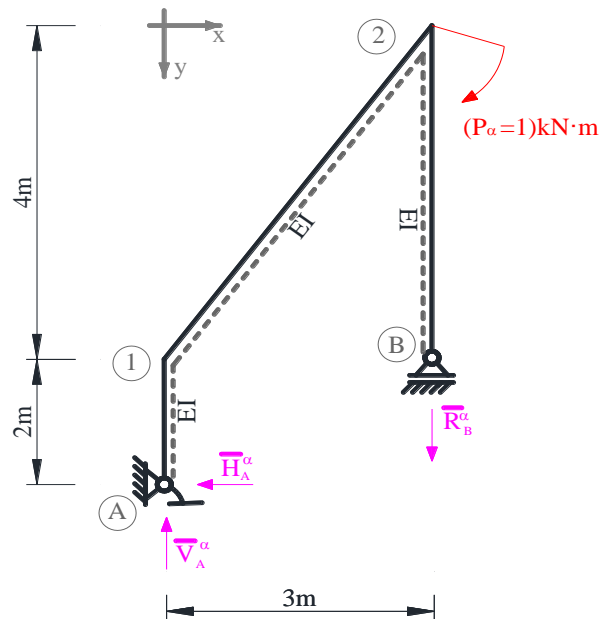
Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczone są ze wzorów:

$$\Delta_{\alpha F} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^F}{k_n} \right\} / P_\alpha$$

$$\Delta_{\alpha T} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^{\alpha} \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^{\alpha} \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^{\alpha}} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^{\alpha}} \right\} / P_{\alpha},$$

$$\Delta_{\alpha \Delta} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^{\alpha} \cdot M^{\Delta}}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^{\alpha} \cdot S_n^{\Delta}}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^{\alpha} \Delta r_n \right\} / P_{\alpha}.$$

## 9.1. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA JEDNOSTKOWEGO W MIEJSCU I KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA



Rys. 5.2.1. Reakcje od  $(P_{\alpha}=1)$  kN·m

### Obliczenie reakcji

$$\sum X = 0 \quad \bar{H}_{1A}^{\alpha} = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \bar{R}_B^{\alpha} \cdot 3m - P_{\alpha} \text{ kN} \cdot m = 0 \quad \bar{R}_B^{\alpha} = -\frac{1}{3} \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \quad \bar{R}_B^{\alpha} - \bar{V}_A^{\alpha} = 0 \quad \bar{V}_A^{\alpha} = -\frac{1}{3} \text{ kN}$$

### Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_{A1}^{\alpha} = \bar{M}_{1A}^{\alpha} = \bar{M}_{12}^{\alpha} = 0$$

$$\bar{M}_{2B}^{\alpha} = \bar{M}_{B2}^{\alpha} = 0$$

$$\bar{M}_{21}^{\alpha} = -P_{\alpha} = -1 \text{ kN} \cdot m$$

### Obliczenie sił tnących

$$\bar{V}_{A1}^{\alpha} = \bar{V}_{1A}^{\alpha} = \bar{H}_A^{\alpha} = 0$$

$$\bar{V}_{12}^{\alpha} = \bar{V}_{21}^{\alpha} = \bar{H}_A^{\alpha} \cdot 0,8 + \bar{V}_A^{\alpha} \cdot 0,6 = 0 \text{ kN} \cdot 0,8 - \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,6m = -0,2 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_{B2}^{\alpha} = \bar{V}_{2B}^{\alpha} = 0$$



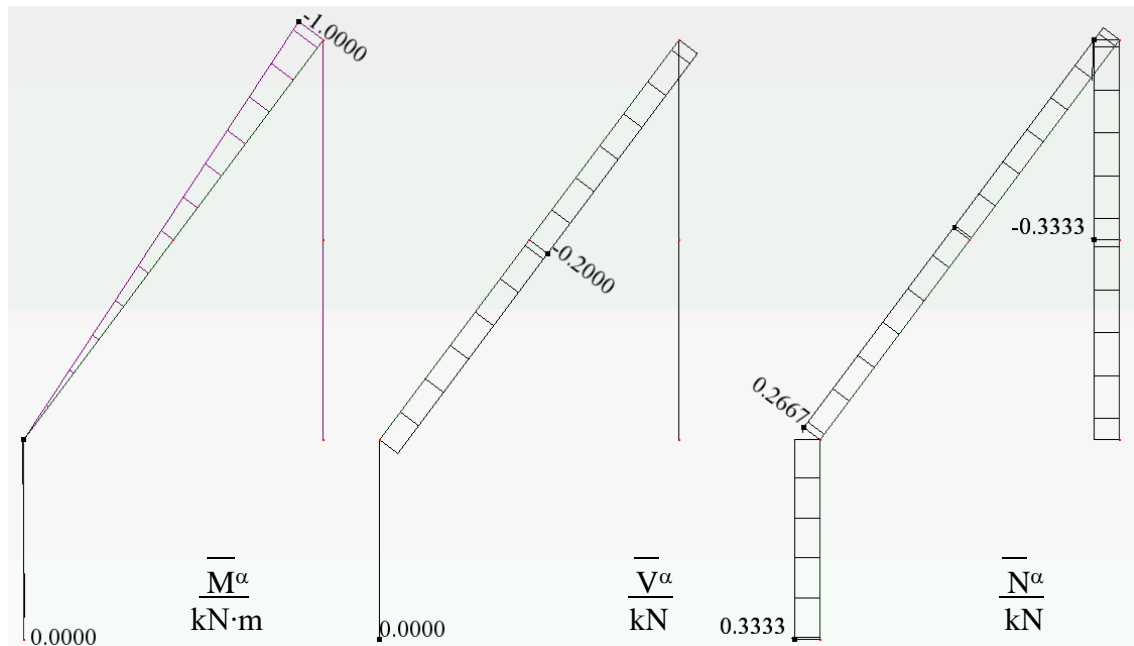
### Obliczenie sił osiowe

$$\bar{N}_{A1}^{\alpha} = \bar{N}_{1A}^{\alpha} = -\bar{V}_A^{\alpha} = 0,3333kN$$

$$\bar{N}_{12}^{\alpha} = \bar{N}_{21}^{\alpha} = \bar{H}_A^{\alpha} \cdot 0,6 - \bar{V}_A^{\alpha} \cdot 0,8 = 0kN \cdot 0,6 - (-\frac{1}{3})kN \cdot 0,8m = 0,2667kN$$

$$\bar{N}_{B2}^{\alpha} = \bar{V}_{2B}^{\alpha} = \bar{R}_B^{\alpha} = -0,3333kN$$

**Moment zginający w więzi sprężystej:**  $\bar{S}_{\varphi}^1 = 0$



Rys. 5.6.1. wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

## 9.2. PRZEMIESZCZENIE OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\Delta_{\alpha F} = \left\{ \frac{5}{6} [0 \cdot (-12,6720) + 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2,2502) + (-1) \cdot (-0,8284)] + \frac{0 \cdot (-17,7422)}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI_y}$$

$$= \frac{4,4407kN \cdot m^2}{1825,4019kN \cdot m^2} = 0,0024rad$$

## 9.3. PRZEMIESZCZENIE OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\Delta_{\alpha T} = \left\{ \frac{5}{6} [0 \cdot 4,6366 + 4 \cdot (-0,5) \cdot 2,7601 + (-1) \cdot 0,8836] + \frac{0 \cdot -4,1948}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+ \left[ 0,000012 \cdot \frac{-15 - 25}{0,16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-1) + 0,000012 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0,2667 + 0,000012 \cdot (-5) \cdot 4 \cdot (-0,3333) \right] rad =$$

$$= -5,3365 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0,0076rad = -\frac{5,3365kN \cdot m^2}{1825,4019kN \cdot m^2} + 0,0076rad = 0,0047rad$$

## 9.4. PRZEMIESZCZENIE OD OSIADANIA PODPÓR

$$\Delta_{\alpha\Delta} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^\alpha \Delta r_n \right\} / P_\alpha,$$

$$\Delta_{2\Delta} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^\Delta}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^2 \Delta r_n \right\} / P_2 = \left\{ \frac{5}{6} [0 \cdot (-53,5509) + 4 \cdot (-0,5) \cdot (-13,3725) + (-1) \cdot 26,806] + \right.$$

$$\left. \frac{-0 \cdot 66,9539}{10} \right\} \frac{kN \cdot m^3}{EI} - \left( -\frac{1}{3} \cdot 0,04 \right) m = (-0,0508) \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,0267m$$

$$= \frac{-0,0508kN \cdot m^3}{1825,4019kN \cdot m^2} + 0,00133m = -0,0134rad$$