

## Wykład nr 3

WYZNACZANIE PRZEMIESZCZEŃ W PŁASKICH SPRĘŻYSTYCH USTROJACH PRĘTOWYCH

Przemieszczenia w układach statycznie wyznaczalnych SW jako i statycznie niewyznaczalnych SN wywołane zadaniem obciążeniem (obciążeniem sił czynnych „F”={P,M,q}, wpływem osiadania podpór „Δ<sub>r</sub>”, wpływem działania temperatury „Δ<sub>t</sub>”, wpływem błędów montażu „Δ<sub>m</sub>”) wyznacza się stosując II sformułowanie zasady prac przygotowanych (II –sf. ZPP), które przyjmuje postać:

$$\sum_n \bar{P}_{ni} \Delta_{nj} + \sum_m \bar{R}_{mi} \Delta_{r mj} = \int \bar{M}^i \Delta d\varphi^j + \int \bar{T}^i \Delta dh^j + \int \bar{N}^i \Delta d\psi^j + \int \bar{S}^i \Delta ds^j \quad (*)$$

\*  $\int \bar{S}^i \Delta ds^j$  - człon związany z pracą sił w więziach sprężystych

{ Def.: Praca wirtualnych sił zewnętrznych na odpowiadających im rzeczywistych przemieszczeniach jest równa pracy wirtualnych sił wewnętrznych na odpowiadających im rzeczywistych odkształceniach }

Aby wyznaczyć przemieszczenie w danym miejscu lub miejscach należy za obciążeni wirtualne przyjąć *obciążenie jednostkowe stojące w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia* (jest to możliwe ponieważ jedynym wymogiem stawianym obciążeniom wirtualnym jest to, by spełniało ono warunek statycznej dopuszczalności), a stan „j” traktować jako rzeczywisty stan konstrukcji, który stanowi przyczynę wywołanego przemieszczenia. Wówczas wyrażenie (\*) można zapisać:

$$\sum_n \bar{1}_{ni} \Delta_{nj} + \sum_m \bar{R}_{m1} \Delta_{r mj} = \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^j + \int \bar{T}^1 \Delta dh^j + \int \bar{N}^1 \Delta d\psi^j + \int \bar{S}^1 \Delta ds^j \quad (**)$$

Przykłady jednostkowych stanów obciążeń :

(\*przedstawione poniżej rysunki; źródło –wykłady prof. Prof. Pawła Śniadego)

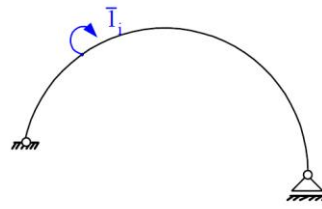
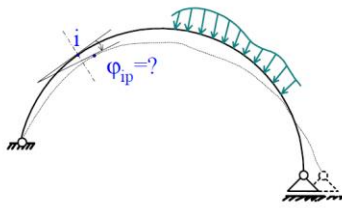
- Przesuw węzła



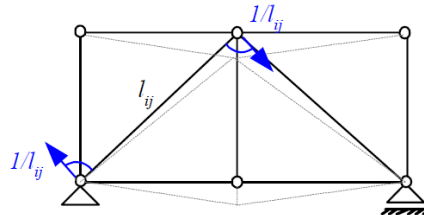
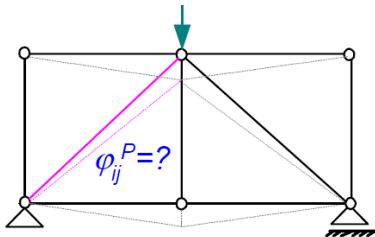
- Zmiana odległości między węzłami



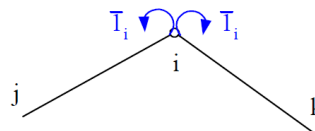
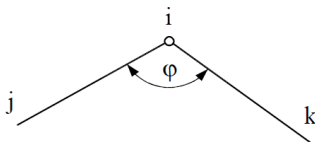
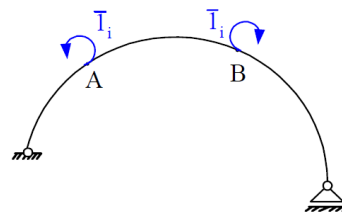
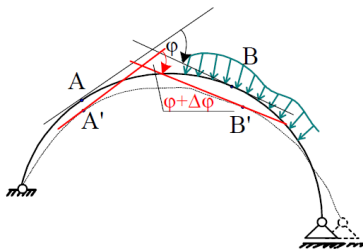
- kąt obrotu przekroju pręta



- Kąt obrotu pręta



- ❖ Zmiana kąta między stycznymi



Szczegółowe wzory do wyznaczenia przemieszczeń od zadanych wpływów obciążeń:

- ❖  $\Delta_{iF} = ?$  PRZEMISZCZENIE WYWOŁANE DZIAŁANIEM SIŁ CZYNNYCH  $F = \{P, M, q\}$

(pozostałe obciążenia układu są zerowe  $\Delta_r = \Delta_t = \Delta_m = 0$ )

- (Niech na konstrukcję działają obciążenia czynne  $F = \{P, M, q\}$ , które wywołuje siły przekrojowe  $M^F, T^F, N^F, S^F$  i odpowiedni stan odkształcenia  $\Delta d\varphi^F, \Delta dh^F, \Delta dl^F, \Delta dS^F$ )

$\{„F” \rightarrow M^F, T^F, N^F, S^F \rightarrow \Delta d\varphi^F, \Delta dh^F, \Delta dl^F, \Delta dS^F \}$

$\Rightarrow$  stan rzeczywisty „j” = F

(rzeczywisty stan obciążeń i przemieszczeń)

gdzie:

$$\Delta d\varphi^F = \frac{M^F}{EI} dx, \Delta dh^F = \frac{\kappa T^F}{GA} dx, \Delta dl^F = \frac{N^F}{EA} dx, \Delta dS^F = \frac{S^F}{k} dx$$

- (Niech na ten sam układ działa jedynie obciążenie jednostkowe  $\bar{P}_i = \bar{1}_i$  stojące w miejscu  $i$  na kierunku szukanego przemieszczenia, które wywołuje siły przekrojowe  $\bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1$ ).

$$\{\bar{P}_i = \bar{1}_i \rightarrow \bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1\}$$

=> stan wirtualny "i" =  $\bar{1}_i$

(wirtualny stan obciążeń)

- (Wówczas przy przyjętym stanie rzeczywistym "j" =  $\mathbf{F}$  i wirtualnym "i" =  $\bar{1}_i$  II sformułowanie ZPP przedstawione wzorem (\*) przyjmie postać).

## II-sformułowanie ZPP

$$\begin{aligned} \bar{1}_i \Delta_{iF} &= \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^F + \int \bar{T}^1 \Delta dh^F + \int \bar{N}^1 \Delta dl^F + \int \bar{S}^1 \Delta dS^F = \\ &= \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^F}{GA} dx + \int \bar{N}^1 \frac{N^F}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m} \end{aligned}$$

Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach **SW** i **SN**,  
które wywołane jest obciążeniem czynnym **F**

\*kratownice SW i SN

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \int \bar{N}^1 \frac{N^F}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m} = \sum_p \frac{\bar{N}_p^1 N_p^F L_p}{(EA)_p} + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

\*ramy i belki SW i SN ( wpływ sił tnących i siły osiowych na wartość przemieszczenie jest pomijalnie mały)

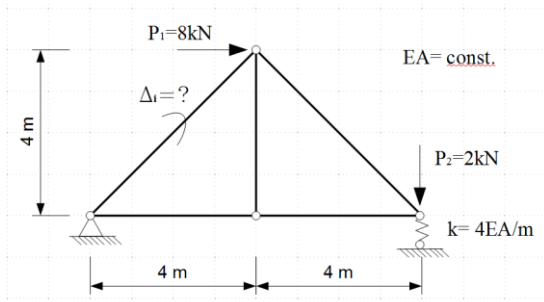
$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

\*łuki SW i SN ( wpływ sił tnących na wartość przemieszczenia jest pomijalnie mały)

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \int \bar{M}^1 \frac{M^F}{EI} dx + \int \bar{N}^1 \frac{N^F}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^F}{k_m}$$

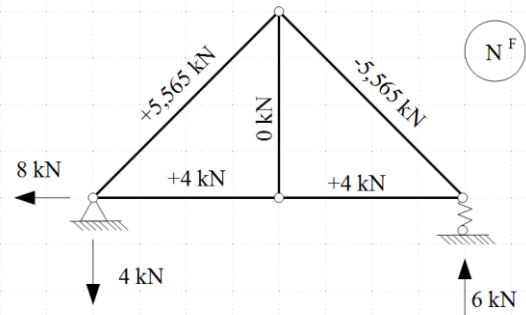
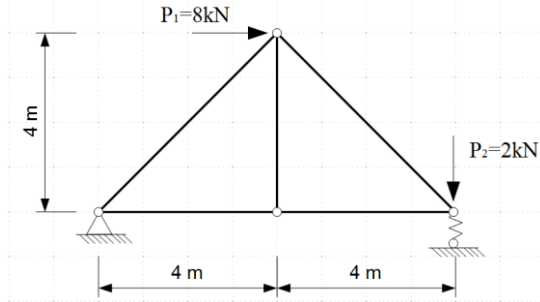
## PRZYKŁAD

Dla układu SW obciążonego jak na rysunku należy wyznaczyć przemieszczenie w postaci obrotu wybranego pręta  $\Delta_{iF} = ?$



Stan rzeczywisty „j”=F

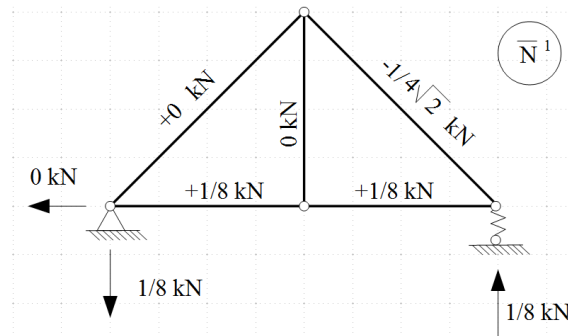
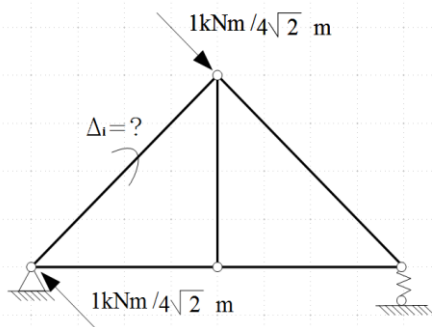
1) Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia



$$S^F = -6kN$$

2) Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia

stan wirtualnego obciążenia „i”=1̄<sub>i</sub>



$$S^1 = -1/8kN$$

3) Zastosowanie II sformułowania ZPP do wyznaczenia szukanego przemieszczenia

$$\bar{1}_i \Delta_{iF} = \sum_m \frac{\bar{N}_p^1 N_p^F L_p}{(EA)_p} + \sum_m \frac{\bar{S}_m^1 S_m^F}{k_m}$$

$$1kNm \Delta_{iF} = \frac{\frac{1}{8}kN * 4kN * 4m}{EA} + \frac{\frac{1}{8}kN * 4kN * 4m}{EA} + \frac{(-\frac{1}{4\sqrt{2}}kN) * (-5,656kN) * 4\sqrt{2}m}{EA} + \frac{(-6kN) * (-\frac{1}{8}kN)}{4EA/m} = 9,843 \frac{kN^2m}{EA} \quad /: 1kNm$$

$$\Delta_{iF} = 9,843 \frac{kN}{EA} \quad \left[ \frac{kN}{EA} = \frac{kN}{\frac{kN}{m^2}m^2} = rad \right]$$

❖  $\Delta_{i\Delta_r}=?$       PRZEMISZCZENIE WYWOŁANE WPŁYWEM OSIADANIA PODPÓR  $\Delta_r$   
 (pozostałe obciążenia układu są zerowe  $F = \Delta_r = \Delta_m = 0$ )

- (Niech na konstrukcję działają obciążenia w formie przemieszczeń podpór  $\Delta_r$ , które wywołują w układach SN siły przekrojowe:  $M^{\Delta_r}, T^{\Delta_r}, N^{\Delta_r}, S^{\Delta_r}$  i odpowiedni stan odkształcenia  $\Delta d\varphi^{\Delta_r}, \Delta dh^{\Delta_r}, \Delta dl^{\Delta_r}, \Delta dS^{\Delta_r}$ , w układach SW nie wywołują sił przekrojowych i stanu odkształcenia)

=> stan rzeczywisty "j" =  $\Delta_r$

**Układy SN:**

(rzeczywisty stan obciążeń i przemieszczeń)

$\{,,\Delta_r'' \rightarrow M^{\Delta_r}, T^{\Delta_r}, N^{\Delta_r}, S^{\Delta_r} \rightarrow \Delta d\varphi^{\Delta_r}, \Delta dh^{\Delta_r}, \Delta dl^{\Delta_r}, \Delta dS^{\Delta_r} \}$

gdzie:

$$\Delta d\varphi^{\Delta_r} = \frac{M^{\Delta_r}}{EI} dx, \Delta dh^{\Delta_r} = \frac{\kappa T^{\Delta_r}}{GA} dx, \Delta dl^{\Delta_r} = \frac{N^{\Delta_r}}{EA} dx, \Delta dS^{\Delta_r} = \frac{S^{\Delta_r}}{k} dx$$

**Układy SW:**

$\{,,\Delta_r'' \rightarrow M^{\Delta_r} = T^{\Delta_r} = N^{\Delta_r} = S^{\Delta_r} = 0 \rightarrow \Delta d\varphi^{\Delta_r} = \Delta dh^{\Delta_r} = \Delta dl^{\Delta_r} = \Delta dS^{\Delta_r} = 0 \}$

- (Niech na ten sam układ działa jedynie obciążenie jednostkowe  $\bar{P}_i = \bar{1}_i$  stojące w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia, które wywołuje siły przekrojowe  $\bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1$ ).

$\{\bar{P}_i = \bar{1}_i \rightarrow \bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1\}$

=> stan wirtualny "i" =  $\bar{1}_i$

(wirtualny stan obciążeń)

- (Wówczas przy przyjętym stanie rzeczywistym "j" =  $\Delta_r$  i wirtualnym "i" =  $\bar{1}_i$  II sformułowanie ZPP przedstawione wzorem (\*) przyjmie postać).

II-sformułowanie ZPP

$$\begin{aligned} \bar{1}_i \Delta_{i\Delta_r} + \sum_m \bar{R}_{m1} \Delta_{r_m} &= \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^{\Delta_r} + \int \bar{T}^1 \Delta dh^{\Delta_r} + \int \bar{N}^1 \Delta dl^{\Delta_r} + \int \bar{S}^1 \Delta dS^{\Delta_r} = \\ &= \int \bar{M}^1 \frac{M^{\Delta_r}}{EI} dx + \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^{\Delta_r}}{GA} dx + \int \bar{N}^1 \frac{N^{\Delta_r}}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^{\Delta_r}}{k_m} \end{aligned}$$

Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach SN  
które wywołane jest osiadaniem podpór  $\Delta_r$

$$\bar{1}_i \Delta_{i\Delta_r} = - \sum_m \bar{R}_{m1} \Delta_{r_m}$$

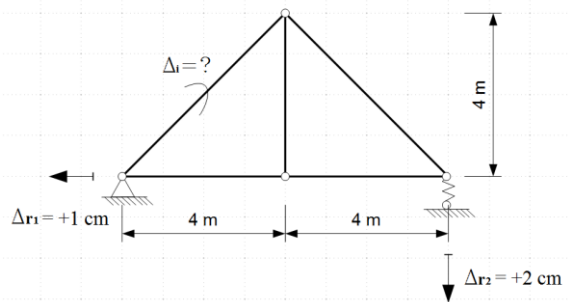
Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach SW  
które wywołane jest osiadaniem podpór  $\Delta_r$

- \*uwaga 1:  $\bar{R}_{m1}$  - jest to reakcja w miejscu i na kierunku zadanego osiadania podpory wywołana jednostkowym stanem obciążenia stojącym w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.

\*uwaga 2: jeżeli zwrot zadanego wektora przemieszczenia podpory  $\Delta_{r_m}$  jest przeciwny do zwrotu reakcji  $\bar{R}_{m1}$  to ich iloczyn jest ujemny (praca jest ujemna) niezależnie od minusa stojącego przed sumą w podanym we wzorze.

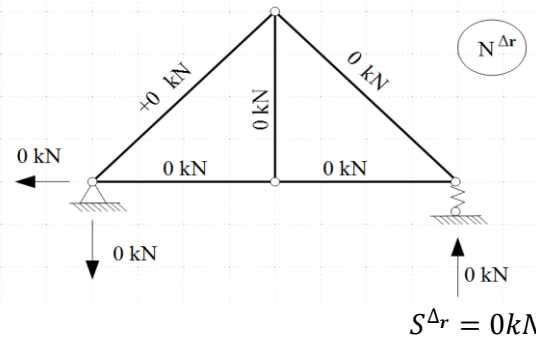
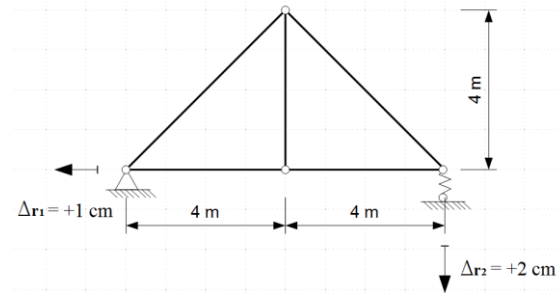
**PRZYKŁAD**

Dla układu SW jak na rysunku obciążonego osiadaniem podpór należy wyznaczyć przemieszczenie w postaci obrotu wybranego pręta  $\Delta_i \Delta_r = ?$



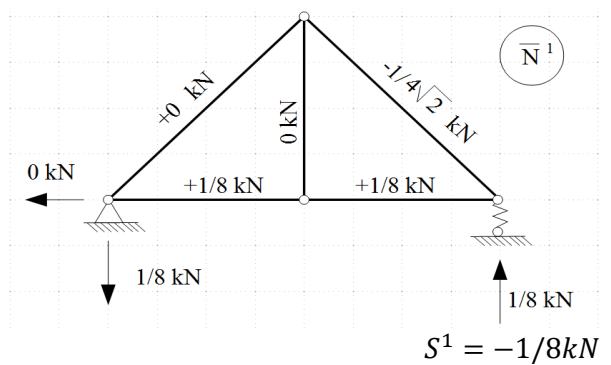
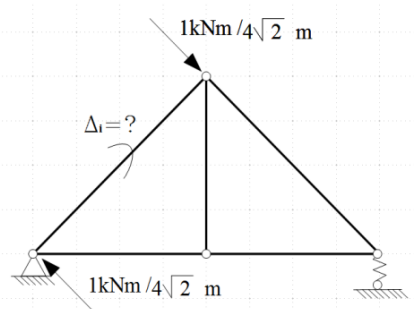
Stan rzeczywisty  
„j” =  $\Delta_r$

1) Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia



2) Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia

stan wirtualnego obciążenia „i” =  $\bar{1}_i$



3) Zastosowanie II sformułowania ZPP do wyznaczenia szukanego przemieszczenia

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_r = - \sum_m \bar{R}_{m1} \Delta_{r_m} \Delta_r$$

$$1 \text{ kNm} \Delta_i \Delta_r = - \left( 0 \text{ kN} * 0.01 \text{ m} + \frac{1}{8} \text{ kN} * (-0.02 \text{ m}) \right) = 2,5 * 10^{-3} \text{ kNm} \text{ } /: 1 \text{ kNm}$$

$$\Delta_i \Delta_r = 2,5 * 10^{-3} \text{ rad}$$

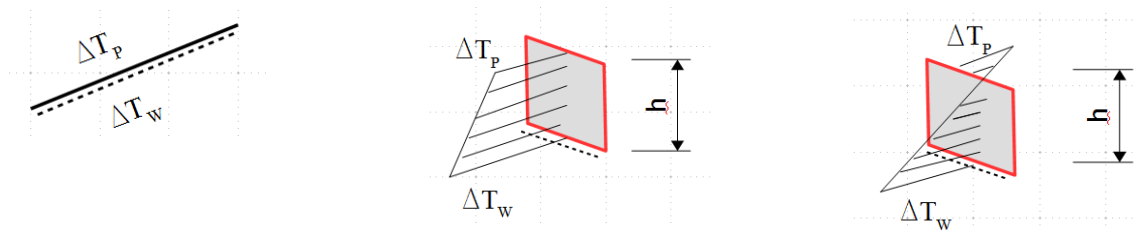
- ❖  $\Delta_{i\Delta_t}=?$       PRZEMISZCZENIE WYWOŁANE WPŁYWEM TEMPERATURY  $\Delta_t$   
 (pozostałe obciążenia układu są zerowe  $F = \Delta_r = \Delta_m = 0$ )

Wpływ temperatury:

Założenie: liniowy rozkład temperatury po wysokości przekroju pręta  $h$

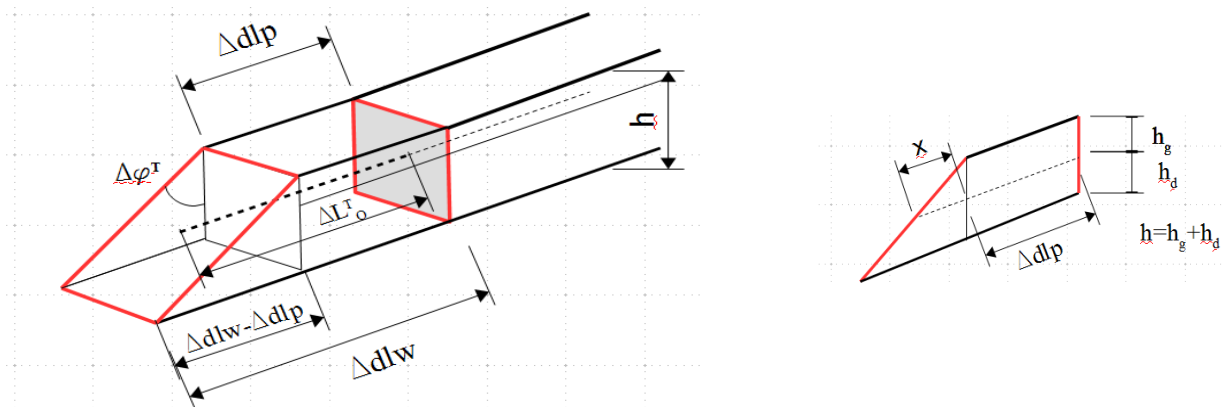
$\Delta T_w$  – przyrost temperatury w stosunku do temperatury montażu we włóknach wyróżnionych

$\Delta T_p$  – przyrost temperatury w stosunku do temperatury montażu we włóknach przeciwnych do wyróżnionych



$\Delta\varphi^T$  – odkształcenie kątowe wywołane nierównomiernym rozkładem temperatury po wysokości pręta przy braku sił wewnętrznych w przekroju

$\Delta l_0^T$  – odkształcenie podłużne w osi pręta wywołane wpływem temperatury przy braku sił wewnętrznych w przekroju



$$\Delta dl_w = \alpha_t \Delta T_w dx \text{ -- przyrost długości włókien wyróżnionych}$$

$$\Delta dl_p = \alpha_t \Delta T_p dx \text{ -- przyrost długości włókien przeciwnych do wyróżnionych}$$

$$\Delta\varphi^T = \text{tg} \Delta\varphi^T = \frac{\Delta dl_w - \Delta dl_p}{h} = \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} dx$$

$$\Delta l_0^T = x + \Delta dl_p = (\Delta dl_w - \Delta dl_p) \frac{h_g}{h} + \Delta dl_p = \alpha_t \frac{(\Delta T_w h_g + \Delta T_p h_d)}{h} dx = \alpha_t \Delta T_0 dx$$

gdy przekrój symetryczny to:  $\Delta T_0 = (\Delta T_w + \Delta T_p)/2$

- (Niech na konstrukcję działają obciążenia w formie liniowego rozkładu temperatury  $\Delta_t$  po wysokości przekroju pręta, które wywołują w układach SN siły przekrojowe:  $M^{\Delta_t}$ ,  $T^{\Delta_t}$ ,  $N^{\Delta_t}$ ,  $S^{\Delta_t}$  i odpowiedni stan odkształcenia  $\Delta d\varphi^{\Delta_t}$ ,  $\Delta dh^{\Delta_t}$ ,  $\Delta dl^{\Delta_t}$ ,  $\Delta dS^{\Delta_t}$ . W układach SW siły przekrojowe wywołane wpływem temperatury są zerowe, a niezerowy stan odkształcenia dotyczy odkształcenia kąowego i podłużnego)

=> stan rzeczywisty "j" =  $\Delta_t$

#### Układy SN:

(rzeczywisty stan obciążeń i przemieszczeń)

$$\{ „\Delta_t” \rightarrow M^{\Delta_t}, T^{\Delta_t}, N^{\Delta_t}, S^{\Delta_t} \rightarrow \Delta d\varphi^{\Delta_t}, \Delta dh^{\Delta_t}, \Delta dl^{\Delta_t}, \Delta dS^{\Delta_t} \}$$

gdzie:

$$\Delta d\varphi^{\Delta_t} = \frac{M^{\Delta_t}}{EI} dx + \Delta\varphi^T; \quad \left( \Delta\varphi^T = \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} dx \right), \quad \Delta dl^{\Delta_t} = \frac{N^{\Delta_t}}{EA} dx + \Delta l_0^T; \quad \left( \Delta l_0^T = \alpha_t \Delta T_0 dx \right),$$

$$\Delta dh^{\Delta_t} = \frac{\kappa T^{\Delta_t}}{GA} dx, \quad \Delta dS^{\Delta_t} = \frac{S^{\Delta_t}}{k} dx$$

#### Układy SW:

$$\{ „\Delta_t” \rightarrow M^{\Delta_t} = T^{\Delta_t} = N^{\Delta_t} = S^{\Delta_t} = 0 \rightarrow \Delta d\varphi^{\Delta_t} = \Delta\varphi^T; \quad \left( \Delta\varphi^T = \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} dx \right),$$

$$\Delta dl^{\Delta_t} = \Delta l_0^T; \quad \left( \Delta l_0^T = \alpha_t \Delta T_0 dx \right), \quad \Delta dh^{\Delta_t} = \Delta dS^{\Delta_t} = 0 \}$$

- (Niech na ten sam układ działa jedynie obciążenie jednostkowe  $\bar{P}_i = \bar{1}_i$  stojące w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia, które wywołuje siły przekrojowe  $\bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1$ ).

$$\{ \bar{P}_i = \bar{1}_i \rightarrow \bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1 \}$$

=> stan wirtualny "i" =  $\bar{1}_i$

(wirtualny stan obciążeń)

- (Wówczas przy przyjętym stanie rzeczywistym "j" =  $\Delta_t$  i wirtualnym "i" =  $\bar{1}_i$  II sformułowanie ZPP przedstawione wzorem (\*) przyjmie postać).

#### II-sformułowanie ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_t = \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^{\Delta_t} + \int \bar{T}^1 \Delta dh^{\Delta_t} + \int \bar{N}^1 \Delta dl^{\Delta_t} + \int \bar{S}^1 \Delta dS^{\Delta_t} =$$

$$= \int \bar{M}^1 \frac{M^{\Delta_t}}{EI} dx + \int \bar{M}^1 \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} dx + \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^{\Delta_t}}{GA} dx + \int \bar{N}^1 \frac{N^{\Delta_t}}{EA} dx + \int \bar{N}^1 \alpha_t \Delta T_0 dx + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^{\Delta_t}}{k_m}$$

Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach SN, które wywołane jest wpływem temperatury  $\Delta_t$

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_t = \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^{\Delta_t} + \int \bar{N}^1 \Delta dl^{\Delta_t} = \int \bar{M}^1 \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} dx + \int \bar{N}^1 \alpha_t \Delta T_0 dx =$$

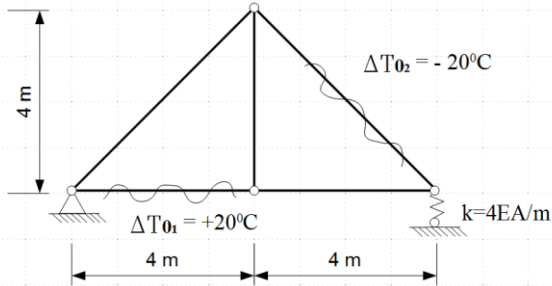
$$= \sum_p (\alpha_t \Delta T_0 \int \bar{N}^1 dx)_p + \sum_p \left( \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \int \bar{M}^1 dx \right)_p$$

Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach SW, które wywołane jest wpływem temperatury  $\Delta_t$



**PRZYKŁAD**

Dla układu SW jak na rysunku obciążonego wpływem temperatury (podane są przyrosty temperatury w osi dwóch prętów  $\Delta T_{01}, \Delta T_{02}$ ) należy wyznaczyć przemieszczenie w postaci obrotu wybranego pręta  $\Delta_i \Delta_t = ?$

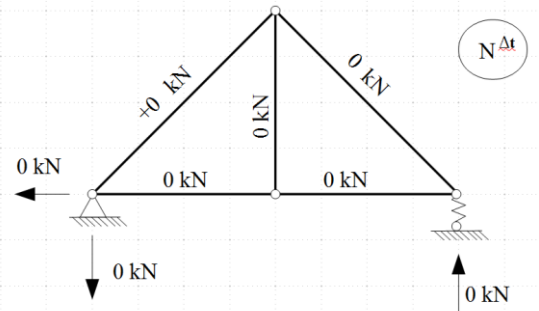
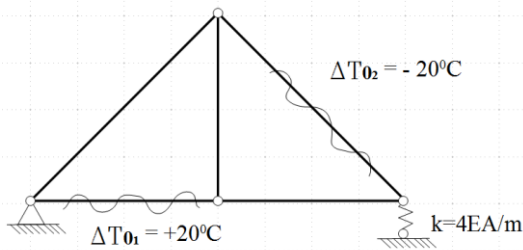


Stan rzeczywisty

$$j'' = \Delta_t$$

$$\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$$

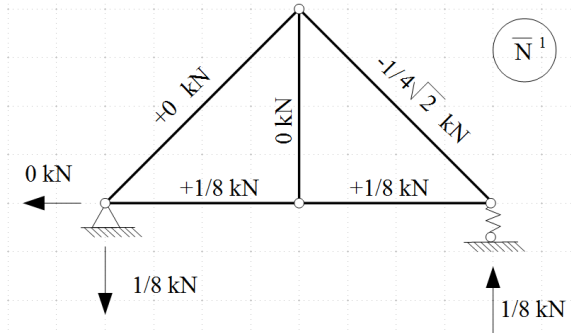
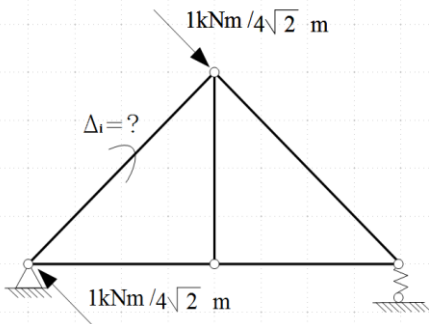
1) Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia



$$S^{\Delta t} = 0 kN$$

2) Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia

stan wirtualnego obciążenia „i'' =  $\bar{1}_i$



$$S^1 = -1/8 kN$$

3) Zastosowanie II sformułowania ZPP do wyznaczenia szukanego przemieszczenia

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_t = \sum_p (\alpha_t \Delta T_0 \int \bar{N}^1 dx)_p + \sum_p \left( \frac{\alpha_t (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \int \bar{M}^1 dx \right)_p$$

$$1 kNm \Delta_i \Delta_t = \sum_p (\alpha_t \Delta T_0 \int \bar{N}^1 dx)_p = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} \cdot 20^\circ C \cdot \frac{1}{8} kN \cdot 4m + 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} \cdot (-20^\circ C) \cdot \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} kN\right) \cdot 4\sqrt{2}m = 4,2 \cdot 10^{-4} kNm \quad /: 1 kNm$$

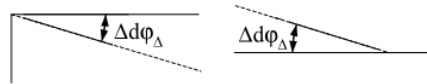
$$\Delta_i \Delta_t = 4,2 \cdot 10^{-4} rad$$

- ❖  $\Delta_i \Delta_m = ?$  PRZEMISZCZENIE WYWOŁANE WPŁYWEM BŁĘDÓW MONTAŻU  $\Delta_m$   
(pozostałe obciążenia układu są zerowe  $F = \Delta_r = \Delta_t = 0$ )

Błędy montażu (imperfekcje geometryczne):

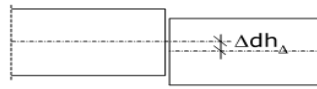
Przez błędy montażu będziemy rozumieli nieprawidłowości mogące występować na stykach elementów:

- łączenie elementów pod niewłaściwym kątem (imperfekcja kątowa  $-\Delta d\varphi_\Delta$ )



\*źródło rysunku: wykład prof. S. Żukowskiego

- łączenie elementów niewspółliniowo (imperfekcja postaciowa  $-\Delta dh_\Delta$ )



\*źródło rysunku: wykład prof. S. Żukowskiego

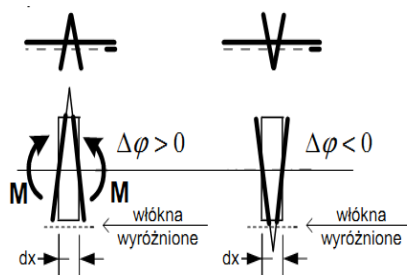
- łączenie elementów zbyt krótkich lub zbyt długich (imperfekcja podłużna  $-\Delta dL_\Delta$ )



\*źródło rysunku: wykład prof. S. Żukowskiego

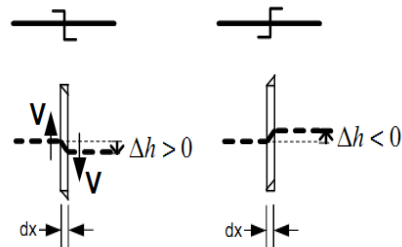
Znakowanie błędów montażu

Imperfekcja kątowa



\*źródło rysunku: wykład prof. S. Żukowskiego

Imperfekcja postaciowa



\*źródło rysunku: wykład prof. S. Żukowskiego

- (Niech na konstrukcję działają obciążenia w formie imperfekcji geometrycznych  $\Delta_m$ , które wywołują w układach SN siły przekrojowe:  $M^{\Delta m}$ ,  $T^{\Delta m}$ ,  $N^{\Delta m}$ ,  $S^{\Delta m}$  i odpowiedni stan odkształcenia  $\Delta d\varphi^{\Delta m}$ ,  $\Delta dh^{\Delta m}$ ,  $\Delta dl^{\Delta m}$ ,  $\Delta dS^{\Delta m}$ . W układach SW siły przekrojowe wywołane wpływem błędów montażu są zerowe, stan odkształcenia kątowego, podłużnego i postaciowego jest różny od zera)

=> stan rzeczywisty "j" =  $\Delta_m$

**Układy SN:**

(rzeczywisty stan obciążeń i przemieszczeń)

$$\{ \Delta_m \rightarrow M^{\Delta_m}, T^{\Delta_m}, N^{\Delta_m}, S^{\Delta_m} \rightarrow \Delta d\varphi^{\Delta_m}, \Delta dh^{\Delta_m}, \Delta dl^{\Delta_m}, \Delta dS^{\Delta_m} \}$$

gdzie:

$$\Delta d\varphi^{\Delta_m} = \frac{M^{\Delta_m}}{EI} dx + \Delta d\varphi_{\Delta}; \quad \Delta dl^{\Delta_m} = \frac{N^{\Delta_m}}{EA} dx + \Delta dL_{\Delta}; \quad \Delta dh^{\Delta_m} = \frac{\kappa T^{\Delta_m}}{GA} dx + \Delta dh_{\Delta}, \quad \Delta dS^{\Delta_m} = \frac{S^{\Delta_m}}{k} dx$$

$\Delta d\varphi_{\Delta}, \Delta dL_{\Delta}, \Delta dh_{\Delta}$  – błędy montażu interpretowane jako odkształcenia elementów

**Układy SW:**

$$\{ \Delta_m \rightarrow M^{\Delta_m} = T^{\Delta_m} = N^{\Delta_m} = S^{\Delta_m} = 0 \rightarrow \Delta d\varphi^{\Delta_m} = \Delta d\varphi_{\Delta}, \Delta dl^{\Delta_m} = \Delta dL_{\Delta}, \Delta dh^{\Delta_m} = \Delta dh_{\Delta}, \Delta dS^{\Delta_m} = 0 \}$$

- (Niech na ten sam układ działa jedynie obciążenie jednostkowe  $\bar{P}_i = \bar{1}_i$  stojące w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia, które wywołuje siły przekrojowe  $\bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1$ ).

$$\{\bar{P}_i = \bar{1}_i \rightarrow \bar{M}^1, \bar{T}^1, \bar{N}^1, \bar{S}^1\}$$

=> stan wirtualny "i" =  $\bar{1}_i$

(wirtualny stan obciążeń)

- (Wówczas przy przyjętym stanie rzeczywistym "j" =  $\Delta_m$  i wirtualnym "i" =  $\bar{1}_i$  II sformułowanie ZPP przedstawione wzorem (\*) przyjmie postać).

## II-sformułowanie ZPP

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^{\Delta_m} + \int \bar{T}^1 \Delta dh^{\Delta_m} + \int \bar{N}^1 \Delta dl^{\Delta_m} + \int \bar{S}^1 \Delta dS^{\Delta_m} =$$

\*jeśli błędy montażu są typu ciągłego

$$\begin{aligned} \bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = & \int \bar{M}^1 \frac{M^{\Delta_m}}{EI} dx + \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi_{\Delta} + \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^{\Delta_m}}{GA} dx + \int \bar{T}^1 \Delta dh_{\Delta} + \\ & + \int \bar{N}^1 \frac{N^{\Delta_m}}{EA} dx + \int \bar{N}^1 \Delta dL_{\Delta} + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^{\Delta_m}}{k_m} \end{aligned}$$

\*jeśli błędy są typu dyskretnego, występują w pewnych przekrojach, to całkowanie przekształca się na sumowanie

$$= \int \bar{M}^1 \frac{M^{\Delta_m}}{EI} dx + \sum_k \bar{M}^1 \Delta\varphi_{\Delta k} + \int \bar{T}^1 \frac{\kappa T^{\Delta_m}}{GA} dx + \sum_n \bar{T}^1 \Delta h_{\Delta n} + \int \bar{N}^1 \frac{N^{\Delta_m}}{EA} dx + \sum_s \bar{N}^1 \Delta L_{\Delta s} + \sum_m \bar{S}_m^1 \frac{S_m^{\Delta_m}}{k_m}$$

Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach **SN** wywołanego wpływem błędów montażu  $\Delta_m$

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi^{\Delta_m} + \int \bar{T}^1 \Delta dh^{\Delta_m} + \int \bar{N}^1 \Delta dl^{\Delta_m} + \int \bar{S}^1 \Delta dS^{\Delta_m} =$$

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = \int \bar{M}^1 \Delta d\varphi_{\Delta} + \int \bar{T}^1 \Delta dh_{\Delta} + \int \bar{N}^1 \Delta dL_{\Delta} \quad \text{*jeśli błędy montażu są typu ciągłego}$$

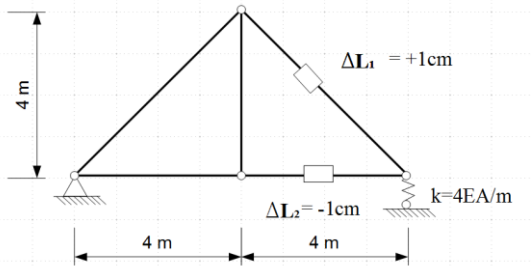
$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = \sum_k \bar{M}^1 \Delta\varphi_{\Delta k} + \sum_n \bar{T}^1 \Delta h_{\Delta n} + \sum_s \bar{N}^1 \Delta L_{\Delta s} \quad \text{*jeśli błędy montażu są dyskretnie}$$

Wzór do wyznaczenia przemieszczenia w układach **SW** wywołanego wpływem błędów montażu  $\Delta_m$

**PRZYKŁAD**

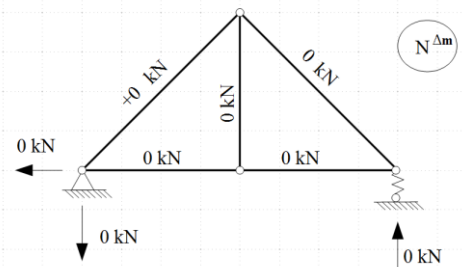
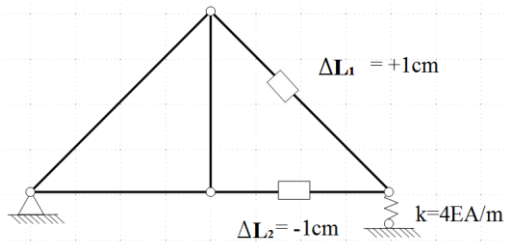
Dla układu SW jak na rysunku obciążonego błędami montażu należy wyznaczyć przemieszczenie w postaci obrotu wybranego pręta  $\Delta_i \Delta_m = ?$

(Podane są jedynie błędy łączenia elementów zbyt krótkich lub z zbyt długich powodujące odkształcenie podłużne/inne typy błędów montażu powodujące odkształcenie postaciowe czy kątowe nie wpłynęłyby na wartość przemieszczenia gdyż w kratownicy nie powstają momenty zginające i siły tnące, stąd nie obciążono nimi kratownicy).



Stan rzeczywisty „j” =  $\Delta_m$

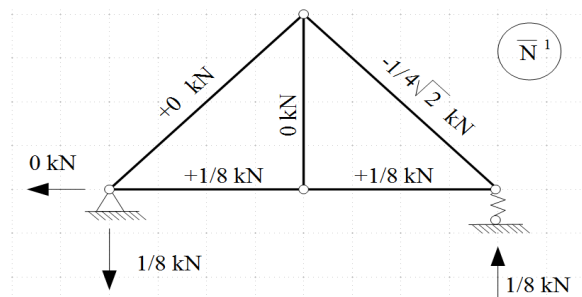
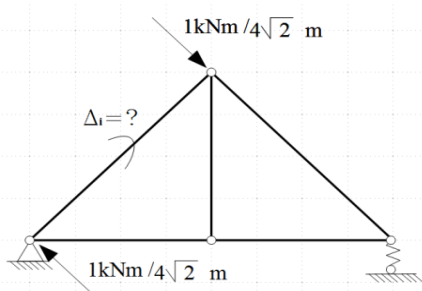
**1) Rozwiązanie układu od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia**



$S^{\Delta_m} = 0kN$

**2) Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia**

stan wirtualnego obciążenia „i” =  $\bar{1}_i$



$S^1 = -1/8kN$

**3) Zastosowanie II sformułowania ZPP do wyznaczenia szukanego przemieszczenia**

$$\bar{1}_i \Delta_i \Delta_m = \sum_k \bar{M}^1 \Delta \varphi_{\Delta k} + \sum_n \bar{T}^1 \Delta h_{\Delta n} + \sum_s \bar{N}^1 \Delta L_{\Delta s}$$

$$1kNm \Delta_i \Delta_m = \sum_s \bar{N}^1 \Delta L_{\Delta s} = \left( -\frac{1}{4\sqrt{2}} kN \right) * 0,01m + \frac{1}{8} kN * (-0,01m) = 3,0177 * 10^{-3} kNm \quad /: 1kNm$$

$$\Delta_i \Delta_m = 3,0177 * 10^{-3} rad$$