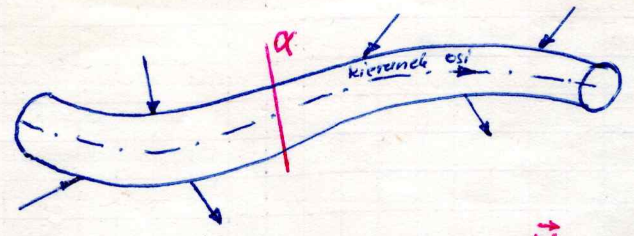
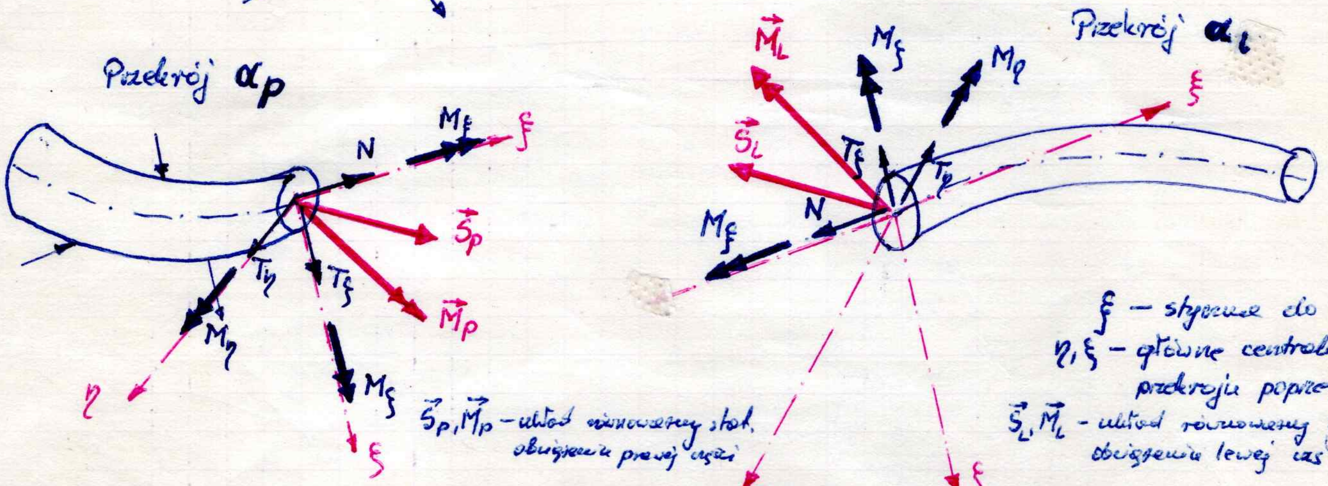
3.8. SIŁY WEWNĘTRZNE (PRZEKROJOWE)





ξ – styczne do osi pręta
η, ζ – główne centralne osie przekroju poprzecznego
$\vec{S}_p, \vec{M}_p$ – układ równoważny stat. obciążeniu prawej części
$\vec{S}_L, \vec{M}_L$ – układ równoważny statycznie obciążeniu lewej części

Zgodnie z trzecim prawem Newtona jest $\vec{S}_L = -\vec{S}_p$, $\vec{M}_L = -\vec{M}_p$.

N – siła osiowa (normalna)
T_η, T_ζ – siły tnące (poprzeczne)
M_η, M_ζ – momenty gnące
M_ξ – moment skręcający

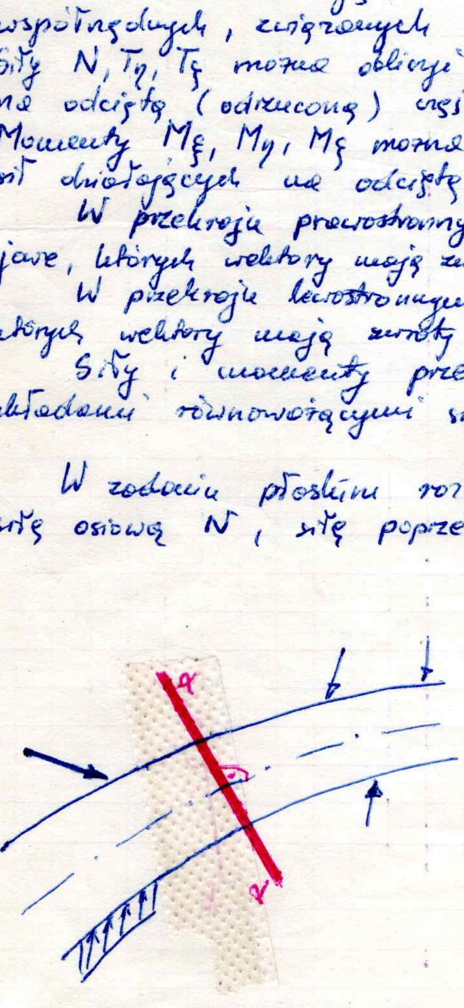
Siłami wewnętrznymi (przekrojowymi) w danym przekroju pręta nazywamy ogólną siłę i ogólny moment, sprowadzone do środka masy tego przekroju, równoważne układowi sił działających na odciętą część ustroju, i określone w lokalnym układzie współrzędnych, związanych z danym przekrojem.
Siły N, T_η, T_ζ można obliczyć bezpośrednio jako sumę rzutów wszystkich sił działających na odciętą (odrzuconą) część ustroju – odpowiednio na osie ξ, η, ζ.
Momenty M_ξ, M_η, M_ζ można obliczyć bezpośrednio jako sumy momentów wszystkich sił działających na odciętą część ustroju – odpowiednio względem osi ξ, η, ζ.

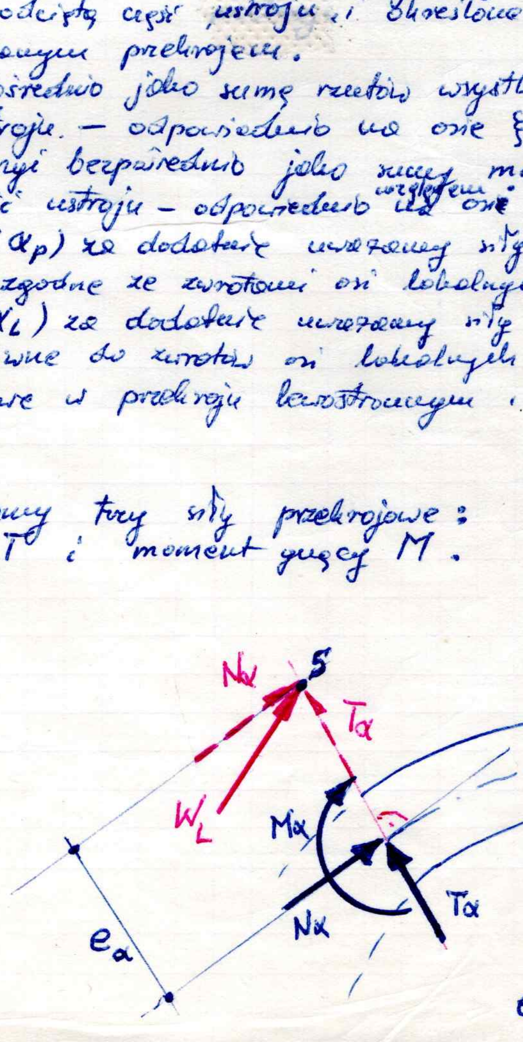
W przekroju prawostronnym (α_p) za dodatnie uważamy siły i momenty przekrojowe, których wektory mają zwroty zgodne ze zwrotami osi lokalnych.

W przekroju lewostronnym (α_L) za dodatnie uważamy siły i momenty przekrojowe, których wektory mają zwroty przeciwne do zwrotów osi lokalnych.

Siły i momenty przekrojowe w przekroju lewostronnym i prawostronnym są układami równoważącymi się.

W zadaniu płaskim rozróżniamy trzy siły przekrojowe: siłę osiową N, siłę poprzeczną T i moment gnący M.

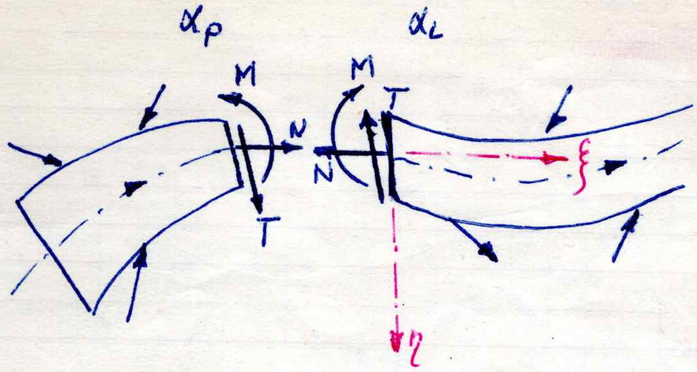




$M_\alpha = N_\alpha \cdot e_\alpha$

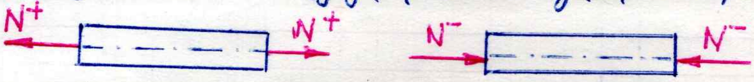
S – środek obciążenia (punkt przebicia wypadkowej sił po jednej stronie przekroju z tym przekrojem)

e – mimośród siły

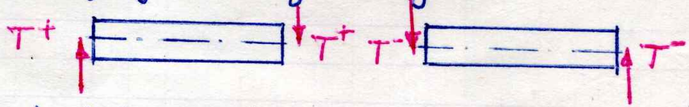


- **Definicje obliczania i znakowania sił wewnętrznych w zadaniu płaskim.**

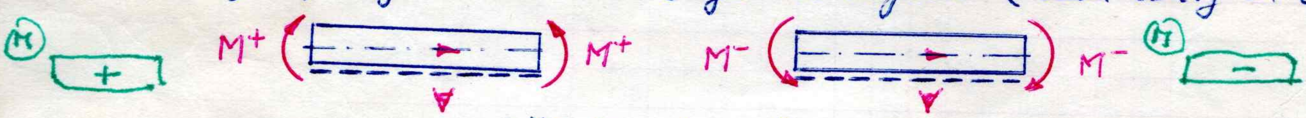
Siła osiowa w danym przekroju jest równa sumie rzutów wszystkich sił działających na odciętą część ustroju, na kierunek styczny do osi pręta w tym przekroju. Za dodatnią uważamy na ogół siłę rozciągającą (działającą od przekroju). Umowa jest obiektywna



Siła tnąca w danym przekroju jest równa sumie rzutów wszystkich sił działających na odciętą część ustroju, na kierunek prostopadły do osi pręta w tym przekroju. Za dodatnią uważamy siłę działającą do góry na lewym brzegu lub w dół na brzegu prawym. Umowa jest obiektywna

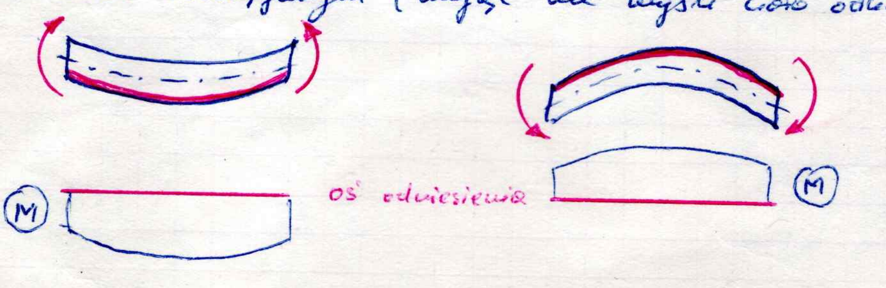


Moment gnący w danym przekroju jest równy sumie momentów wszystkich sił (obciętym) działających na odciętą część ustroju, względem środka masy tego przekroju. Za dodatni uważamy moment prawoskrętny na lewym brzegu lub lewoskrętny na brzegu prawym. Umowa nie jest obiektywna (znak zależy od zwrotu osi pręta)

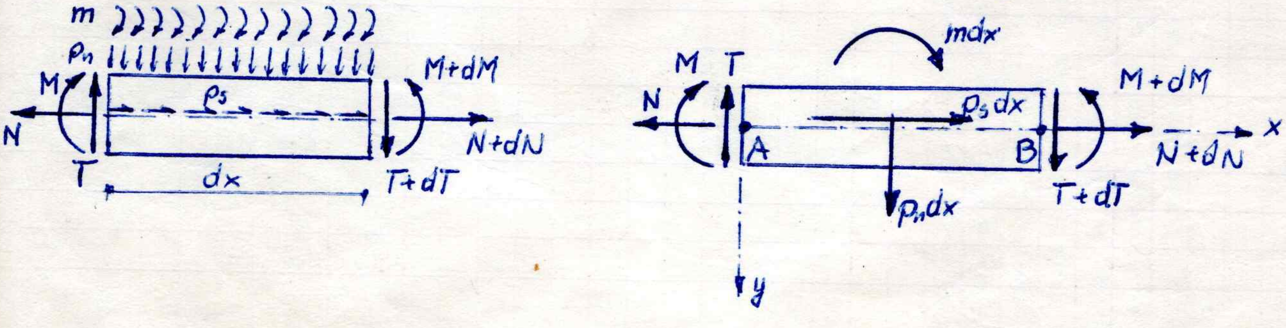


położenie obserwatora

Przy sporządzaniu wykresu momentów gnących można pominąć znaki, odkładając rzędne po stronie włókien rozciąganych (mając na myśli ciało odkształcone)



3.9. Związki między siłami wewnętrznymi w pręcie prostym



$\sum X = 0 \quad \cancel{-N} + p_s dx + \cancel{N} + dN = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dN}{dx} = -p_s$ Jeżeli $p_s = 0$, to $\frac{dN}{dx} = 0$, $N = const$

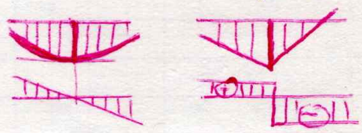
$\sum Y = 0 \quad \cancel{-T} + p_n dx + \cancel{T} + dT = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = -p_n$ Jeżeli $p_n = 0$, to $\frac{dT}{dx} = 0$, $T = const$

$\sum M_B = 0 \quad T dx + \cancel{M} + m dx - p_n dx \frac{dx}{2} - \cancel{M} - dM = 0$, $\frac{dM}{dx} = T + m$, Jeżeli $m = 0$, to $\frac{dM}{dx} = T$

małe wyższego rzędu

Wnioski:

1. Jeżeli w otoczeniu pewnego przekroju pręta prostego obciążenie styczne lub poprzeczne jest równe zeru, to odpowiednio siła osiowa lub tnąca w tym otoczeniu jest stała.
2. Jeżeli w pewnym otoczeniu pręta prostego siła poprzeczna jest równa zero, a pręt w otoczeniu tego przekroju nie jest obciążony obciążeniem momentowym, to moment gnący w tym przekroju osiąga ekstremum.
3. W przedziałach nieobciążonych moment gnący jest stały lub zmienia się liniowo.



6. BELKI

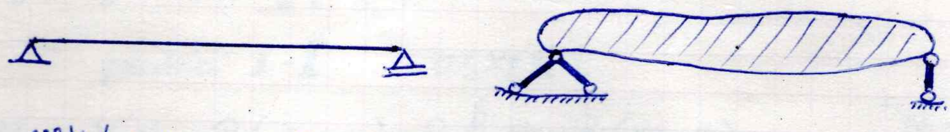
Belką nazywamy pręt prosty przeznaczony do przenoszenia głównie obciążeń poprzecznych do jego osi. Oddziaływania i siły wewnętrzne obliczamy wg ogólnych zasad.

6.1. PRZYPADKI ELEMENTARNE (belki proste)

Belki, dla których oddziaływania wyznaczamy z trzech warunków równowagi.

6.1.1. Belka swobodnie podparta

Analiza kinematyczna



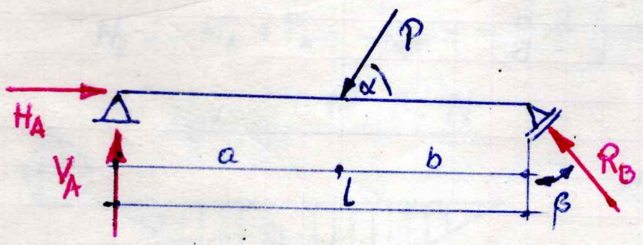
$t=1, \ e=3$

$e=3t$

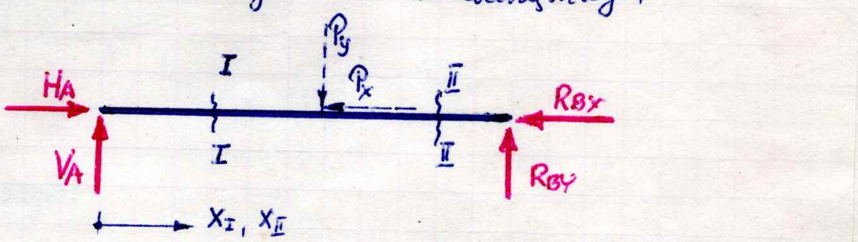
Układ jest geometrycznie niezmienny i statycznie wyznaczalny.

Przykład 1.

Schemat statyczny



Schemat obliczeniowy do wyznaczania sił biernych oraz sił wewnętrznych



Na ogół ze schematu obliczeniowego rezygnujemy a wykorzystujemy do obliczenia oddziaływań i sił MTN schemat statyczny. Przy czym każde położenie dowolnego obciążenia powoduje powstanie nowego przedziału, w którym musimy określić MTN.

W rozważanym schemacie jako dane mamy: $a, b, (l=a+b), P, \alpha, \beta$, a stąd w dalszych obliczeniach przyjmujemy $P_y = P\sin\alpha$, $P_x = P\cos\alpha$. Jako niewiadome przyjęto V_A, H_A, R_B przy czym wygodnie jest operować składowymi $R_{Bx} = R_B \sin\beta$, $R_{By} = R_B\cos\beta$ $(R_{Bx} = R_{By}\,tg\,\beta)$. W ten sposób układ sił można rozbić na dwa układy: równoległy (poprzeczny do osi pręta) oraz kolinearny (układ sił stycznych).

Rozwiązanie analityczne

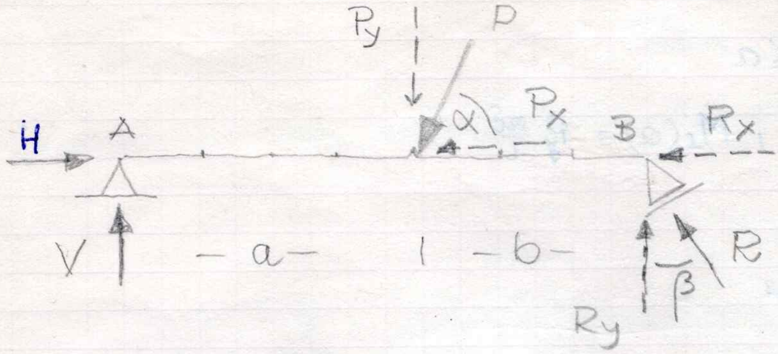
Oddziaływania:

$$\left.\begin{array}{l} \sum M_{iB} = 0 \rightarrow V_A \cdot l - P_y b = 0 \\ \sum M_{iA} = 0 \rightarrow -R_{By} l + P_y a = 0 \\ \sum P_{ix} = 0 \rightarrow H_A - R_{Bx} - P_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_A = P_y \frac{b}{l} \\ R_{By} = P_y \frac{a}{l} \quad \left(R_{Bx} = P_y \frac{a}{l}\, tg\,\beta \right) \\ H_A = P_x + P_y \frac{a}{l}\, tg\,\beta \end{array}$$

W zapisie macierzowym mamy

$$\begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l\cos\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ R_B \\ H_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_y b \\ P_y a \\ P_x \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad A_R \cdot \bar{R} = \bar{P} \quad \text{a stąd}$$

$$\bar{R} = A_R^{-1}\,\bar{P}$$



Dane: $a, b, (a+b=l)$, P, α, β

$P_y = P\sin\alpha$, $P_x = P\cos\alpha$

$R_y = R\cos\beta$, $R_x = R\sin\beta$

$\frac{R_x}{R_y} = tg\beta \rightarrow R_x = R_y\, tg\beta$

reakcje – równania równowagi (wariantowo)

np! $\Sigma M_B = 0$, $V\cdot l - P_y\cdot b = 0$, $V = P_y\cdot\frac{b}{l}$

$\Sigma M_A = 0$, $-R_y\cdot l + P_y\cdot a = 0$, $R_y = P_y\cdot\frac{a}{l} \rightarrow$

$\rightarrow R_x = P_y\frac{a}{l}\cdot tg\beta$

kontrola $\Sigma Y = 0 \rightarrow V + R - P_y = 0$!

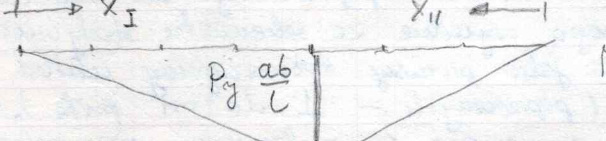
$\Sigma X = 0$, $H - P_x - R_x = 0$, $H = P_x + R_x = P_x + P_y\cdot\frac{a}{l}\cdot tg\beta$

macierzowo $A_R\cdot\bar{R} + \bar{P} = 0$, $\bar{R} = (V, R, H)^T$

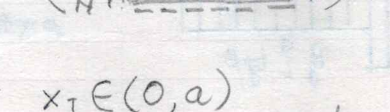
rozwiązanie $\bar{R} = -A_R^{-1}\cdot\bar{P}$

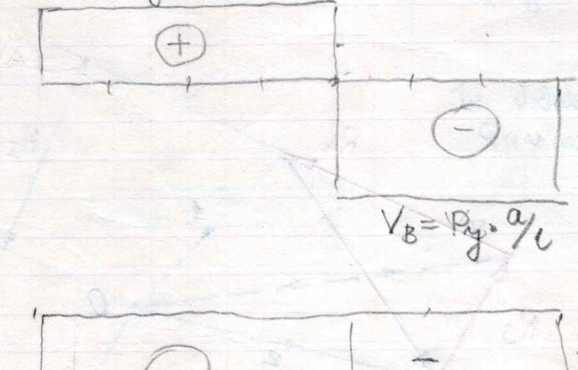
warunek rozwiązalności $\det A_R \neq 0 \rightarrow l^2\cos\beta \neq 0$

dla $\beta = 90°(270°)$ układ GZ



znakowanie





$x_I \in (0, a)$

$M = +V\cdot x_I = P_y\frac{b}{l}\cdot x_I$

$T = +V = P_y\, b/l$

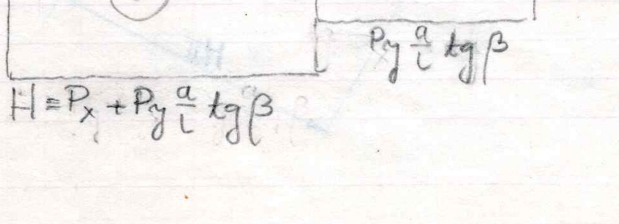
$N = -H = -(P_x + P_y\frac{a}{l}\, tg\beta)$

$x_{II} \in (0, b)$

$M = +R_y\cdot x_{II} = P_y\, a/l\; x_{II}$

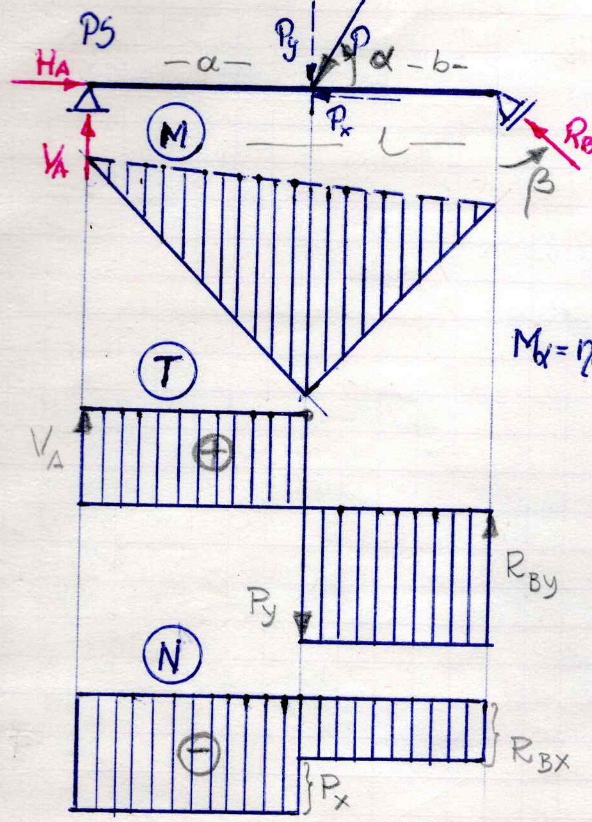
$T = -R_y = -P_y\, a/l$

$N = -R_x = -P_y\, a/l\; tg\beta$

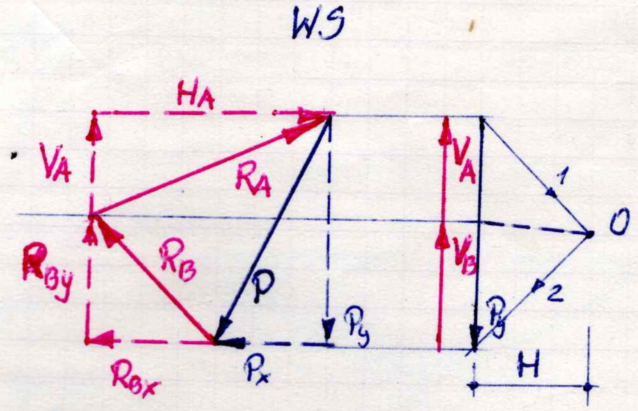


Występuje tu problem niejednolitej podziałki, a wykres M jest odbiegający od kształtu otrzymanego drogą analityczną. Sporządzenie wykresów T i N nie nastręcza kłopotów.

Rozwiązanie wykreślne (ujednolicenie podziałki)



$M_\alpha = \eta_\alpha \cdot H$



$R_{By} = R\cos\beta \qquad R_{BX} = R\sin\beta$

$H_A = P_x + R_{BX} \quad$ ale $\; R_{BX}/R_{By} = tg\beta$

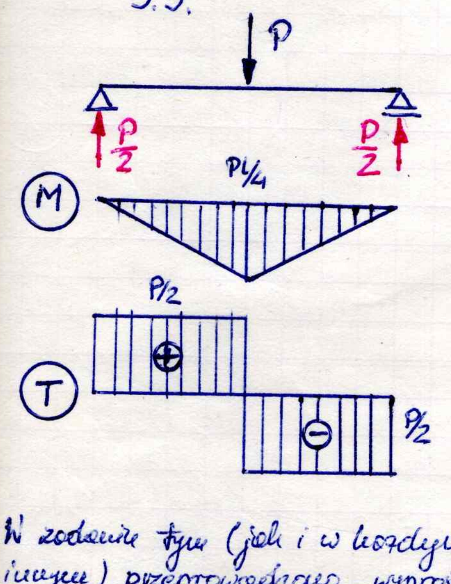
$R_{BX} = R_{By} \cdot tg\beta = P_y \cdot a/l \cdot tg\beta$

Uwaga: W dalszych rozwiązaniach wykreślnych będziemy korzystali z ujednolicenia podziałki przyjmując biegun O z prawej strony wieloboku sił. Wykres M pod zamykającą to moment dodatni.

Przedstawione rozwiązanie analityczne bądź wykreślne zawiera kilka przypadków szczególnych jak np. przyjmując:

$\alpha = 90^\circ \rightarrow P_y = P$; $\beta = 0$; $a = b = l/2$

S.S.



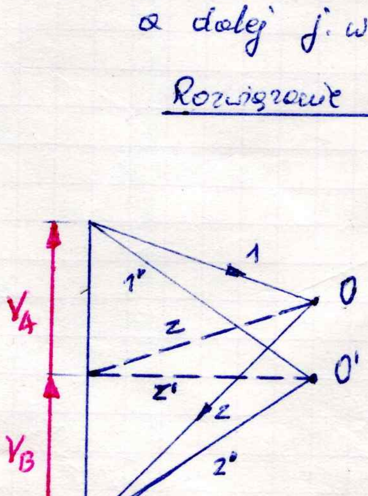
W zadaniu tym (jak i w każdym innym) przeprowadzono „wyprostowanie" zamykającej by uzyskać wykres M jak w rozwiązaniu analitycznym

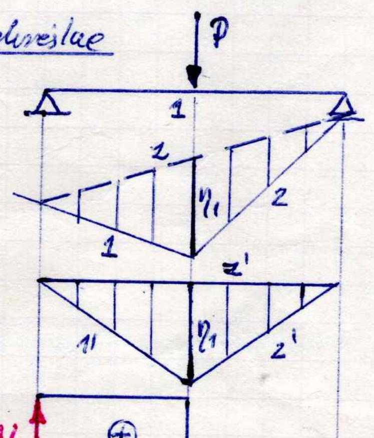
Rozwiązanie analityczne

$V_A = V_B = P/2$; $H_A = 0$

a dalej j. w.

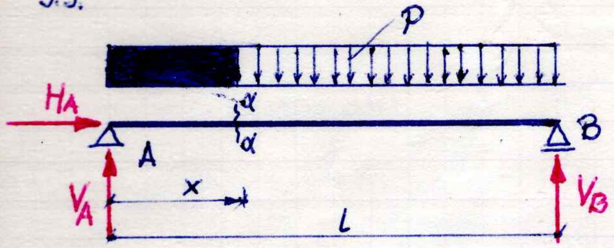
Rozwiązanie wykreślne





Przykład 4

S.S.



Rozwiązanie analityczne

$$\sum P_{ix} = 0 \rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0 \rightarrow V_A \cdot l - pl \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow V_A = \frac{1}{2}pl$$

$$\sum P_{iy} = 0 \rightarrow V_A + V_B - pl = 0 \rightarrow V_B = \frac{1}{2}pl$$

$$M_\alpha(x) = V_A \cdot x - q\,x\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}qx^2$$

$$M_\alpha = \frac{1}{2}px(l-x)$$

$$M_A = 0\ ;\quad M_B = 0\ ;\quad M_\alpha\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{pl^2}{8}$$

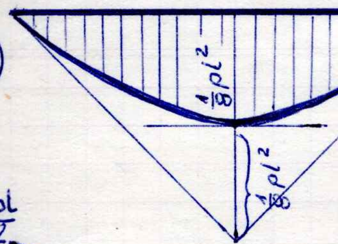
$$T_\alpha(x) = V_A - px = \frac{1}{2}pl - px$$

$$T_A = \frac{1}{2}pl\ ;\quad T_B = -\frac{1}{2}pl\ ;\quad T\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

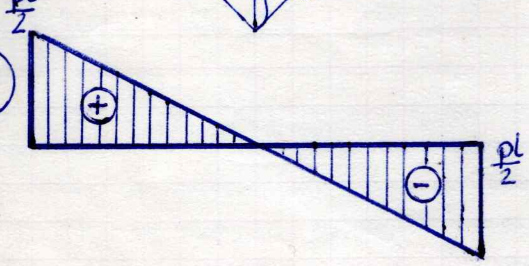
$$N \equiv 0$$

Wykresy sił przekrojowych

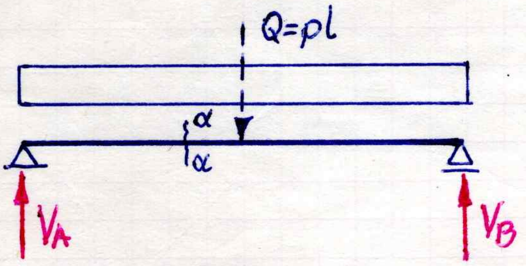
M



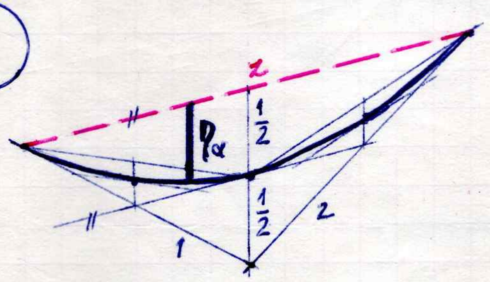
T



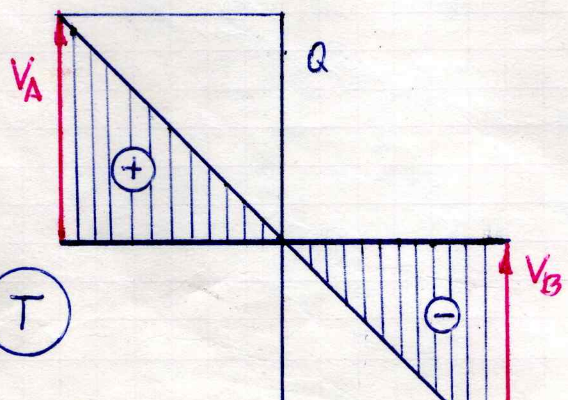
P.S.



M

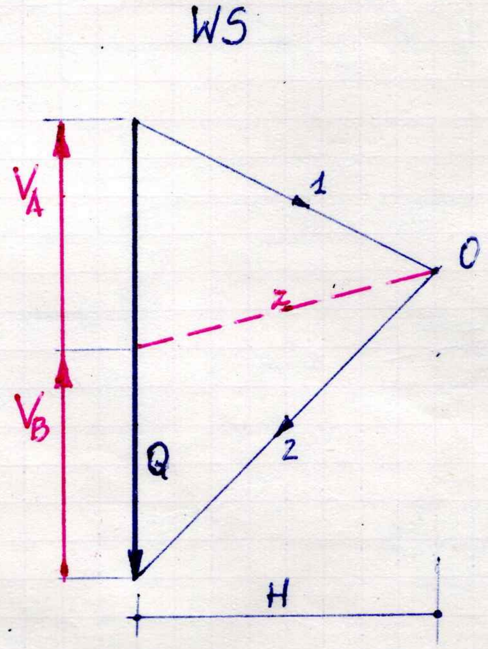


T



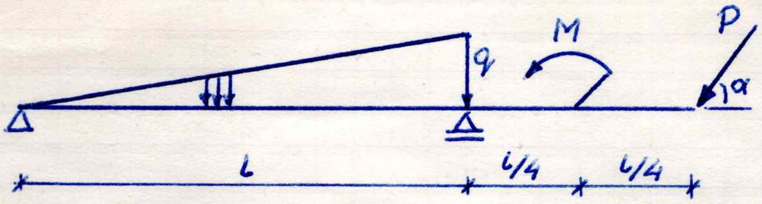
Rozwiązanie wykreślne

WS



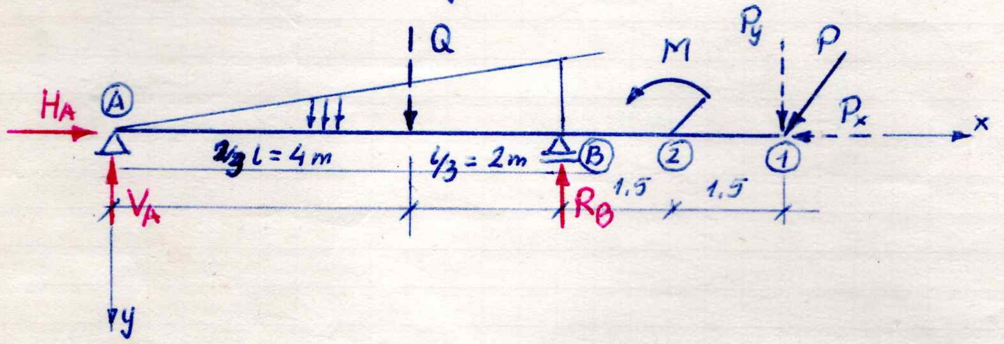
$$M_\alpha = \eta_\alpha\,(m) \cdot H\,(kN)$$

BELKA PROSTA



$M = 18\ kNm$
$P = 10\ kN$
$q = 4\ kN/m$
$l = 6\ m$
$tg\alpha = 4/3$

1. Wyznaczenie reakcji



$Q = \frac{1}{2} q l = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12\ kN$

$P_y = \frac{4}{5} P = \frac{4}{5} 10 = 8\ kN$

$P_x = \frac{3}{5} P = \frac{3}{5} 10 = 6\ kN$

1) $\sum M_A = 0 \qquad Q \cdot \frac{2}{3} l - M + P_y \cdot \frac{3}{2} l - R_B \cdot l = 0$

$R_B = \frac{2}{3} Q - \frac{M}{l} + \frac{3}{2} P_y = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \overset{4}{\cancel{12}} - \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{6}_1} + \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} = 17\ kN$

2) $\sum M_B = 0 \qquad -Q \cdot \frac{1}{3} l - M + P_y \cdot \frac{l}{2} + V_A \cdot l = 0$

$V_A = \frac{1}{3} Q + \frac{M}{l} - \frac{P_y}{2} = \frac{1}{\cancel{3}} \overset{4}{\cancel{12}} + \frac{\overset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{6}} - \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}} = 3\ kN$

3) $\sum X = 0 \qquad H_A - P_x = 0$

$H_A = P_x = 6\ kN$

$$\boxed{\begin{aligned} H_A &= 6\ kN \\ V_A &= 3\ kN \\ R_B &= 17\ kN \end{aligned}}$$

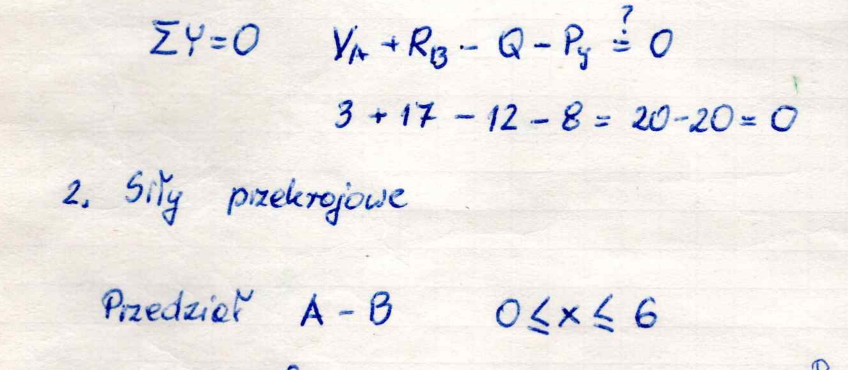
Sprawdzenie

$\sum Y = 0 \qquad V_A + R_B - Q - P_y \overset{?}{=} 0$

$3 + 17 - 12 - 8 = 20 - 20 = 0$

2. Siły przekrojowe

Przedział A – B $\qquad 0 \leq x \leq 6$



$\frac{q_x}{x} = \frac{q}{l} \rightarrow q_x = \frac{x}{l} q$

$Q_x = \frac{1}{2} q_x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{l} \cdot x q = \frac{q}{2l} x^2$

- $\underline{N(x)} = -H_A = \underline{-6\ kN}$
- $\underline{T(x)} = V_A - Q_x = V_A - \frac{q}{2l}x^2 = 3 - \frac{4}{2\cdot 6}x^2 = \underline{-\frac{1}{3}x^2 + 3}$

$T(x) = \frac{dM}{dx} = -\frac{1}{3}x^2 + 3$

$T_A = T(0) = V_A = 3\ kN$

$T(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{3} + 3 = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}\ ,\ x = -3$

$T_B^l = T(6) = -\frac{1}{3}\cdot 6^2 + 3 = -12 + 3 = -9\ kN$

$T_{ekstr.} \Leftrightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{2}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$T_{ekstr} = T(0) = 3\ kN$

- $\underline{M(x)} = V_A\cdot x - Q_x \cdot \frac{1}{3}x = V_A \cdot x - \frac{q}{6l}x^3 = \underline{-\frac{x^3}{9} + 3x}$

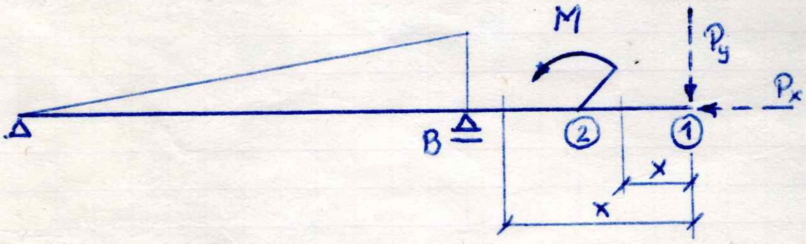
$M_A = M(0) = 0$

$M_B^l = M(6) = -\frac{6^3}{9} + 3\cdot 6 = -6\ kNm$

$M_{ekstr.} = M_{max} = M(3) = -\frac{3^3}{9} + 3\cdot 3 = 6\ kNm$

$M(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^3}{9} + 3x = 0\ ,\ \underline{x_1 = 0}\ ,\ \underline{x_2 = 3\sqrt{3} \cong 5.13}\ ,\ x_3 = -3\sqrt{3} \cong 5.13\ m$

Przedział 1-2 $0 \leq x \leq 1.5$ 2-B $1.5 \leq x \leq 3$



$N(x) = -P_x = -6\ kN$

$T(x) = P_y = 8\ kN$

$M(x) = -P_y \cdot x = -8x$

$M_1 = M(0) = 0$

$M_2^p = M(1.5) = -8\cdot\frac{3}{2} = -12\ kNm$

$N(x) = -P_x = -6\ kN$

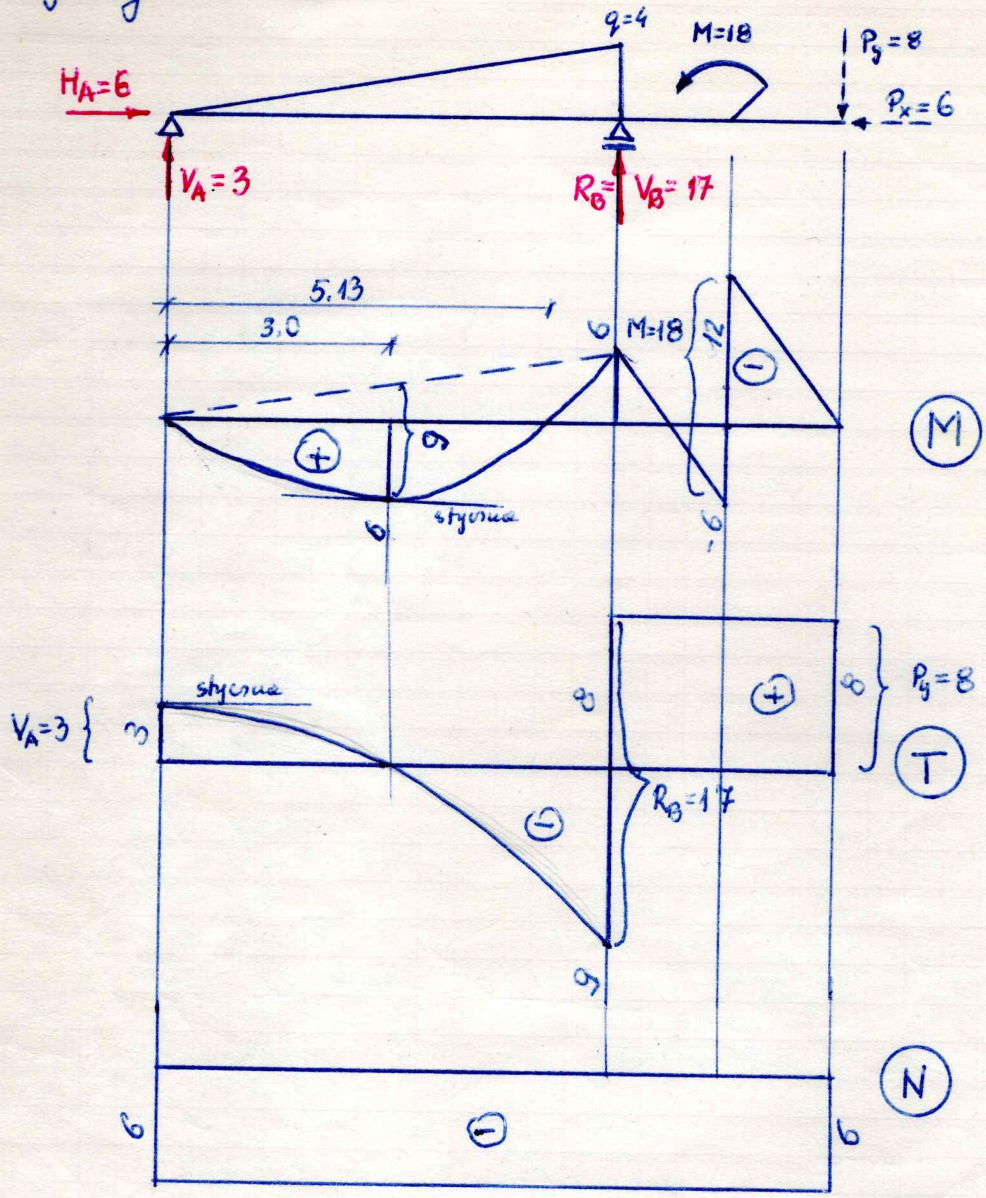
$T(x) = P_y = 8\ kN$

$M(x) = -P_y \cdot x + M = -8x + 18$

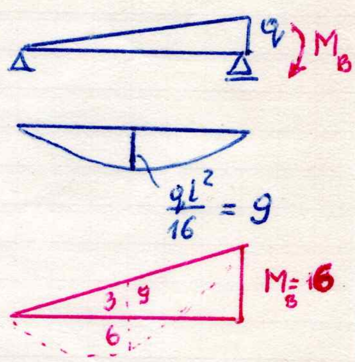
$M_2^l = M(1.5) = -8\cdot\frac{3}{2} + 18 = 6\ kNm$

$M_B^p = M(3) = -8\cdot 3 + 18 = -6\ kNm$

Wykresy



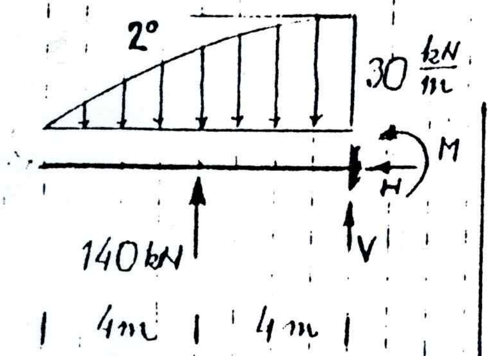
q=4
M=18
$P_y=8$
$H_A=6$
$P_x=6$
$V_A=3$
$R_B=V_B=17$
5.13
3.0
6
M=18
12
9
6
stycznie
6
M
$V_A=3$
3
stycznie
9
8
$P_y=8$
T
$R_B=17$
9
N
6
6

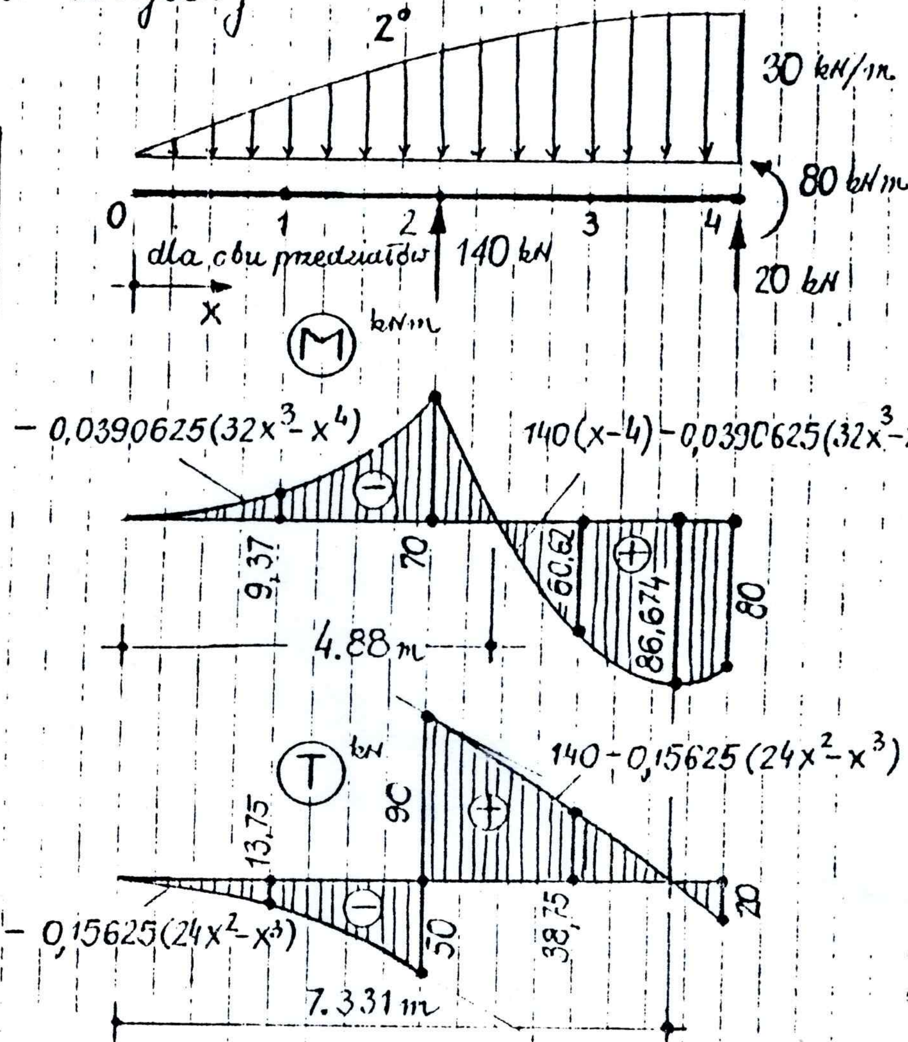


q
M_B
$\frac{ql^2}{16}=9$
3
9
6
$M_B=16$

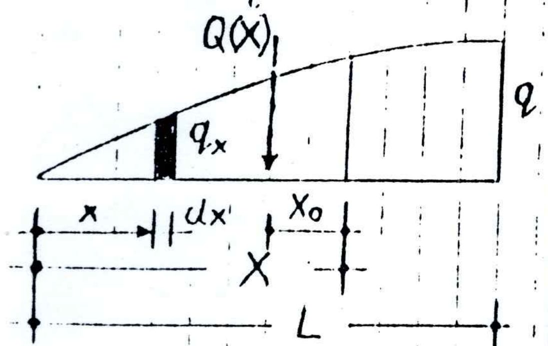
Belkę wspornikową rozwiązać analitycznie.
Sporządzić wykresy M, T.

Schemat statyczny





analiza obciążenia:



reakcje: $\Sigma X = 0$, $H = 0$
$\Sigma Y = 0$, $140 + V - 2/3 \cdot 30 \cdot 8 = 0$, $V = +20$ kN
$\Sigma M = 0$, $140 \cdot 4 - 30 \cdot 8^2/4 - M = 0$, $M = +80$ kNm

$q_x = ax^2 + bx + c$ równanie

$q'_x = 2ax + b$

$q(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$$\begin{cases} q'(L) = 2aL + b = 0 \\ q(L) = aL^2 + bL = q \end{cases}$$

$a = -q/L^2;\ b = 2q/L$

$$q_x = \frac{q}{L^2}(2Lx - x^2)$$

siła:

$$Q(X) = \int_0^X q_x\,dx = \int_0^X \frac{q}{L^2}(2Lx - x^2)\,dx = \frac{qX^2}{3L^2}(3L - X);\quad Q(L) = \frac{2}{3}qL$$

moment:

$$M(X) = \int_0^X q_x (X - x)\,dx = \int_0^X \frac{q}{L^2}(2Lx - x^2)(X - x)\,dx = \frac{qX^3}{12L^2}(4L - X);\quad M(L) = \frac{qL^2}{4}$$

lokalizacja obciążenia wypadkowego:

$$X_0(X) = M(X)/Q(X) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4L - X}{3L - X}\cdot X;\quad X_0(L) = \frac{3}{8}L$$

przekroje

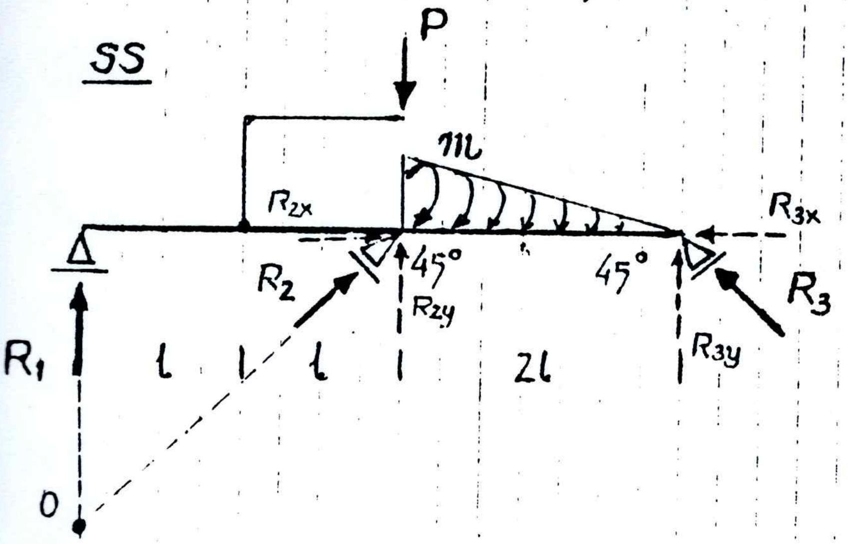
$T_1 = -Q(2) = -13,75$ kN; $T_{2l} = -Q(4) = -50$ kN; $T_{2p} = -50 + 140 = +90$ kN
$T_3 = 140 - Q(6) = +38,75$; $T_4 = 140 - Q(8) = -20$ kN

$M_1 = -M(2) = -9,375$ kNm; $M_2 = -M(4) = -70$ kNm, $M_3 = 140(6-4) - M(6) = 60,625$
$M_4 = 140(8-4) - M(8) = 80$ kNm

Uwaga: $x_{02} \in (0; 4m)$; $x_{24} \in (4; 8m)$!

Belkę rozwiązać analitycznie. Sporządzić wykresy MTN (pręt główny)
Przeprowadzić dyskusję wyników.

SS



Oddziaływania:

$R_{2x} = R_{2y} = \sqrt{2}/2\, R_2$

$R_{3x} = R_{3y} = \sqrt{2}/2\, R_3$

$\sum M_{i0} = 0$

$-R_{3y} \cdot 4l - R_{3x} \cdot 2l + P \cdot 2l + \frac{1}{2} m \cdot 2l = 0$

$R_{3y} = R_{3x} = \frac{1}{3} P + \frac{1}{6} m$

$\sum P_{ix} = 0$

$R_{2x} - R_{3x} = 0$

$R_{2x} = R_{2y} = \frac{1}{3} P + \frac{1}{6} m$

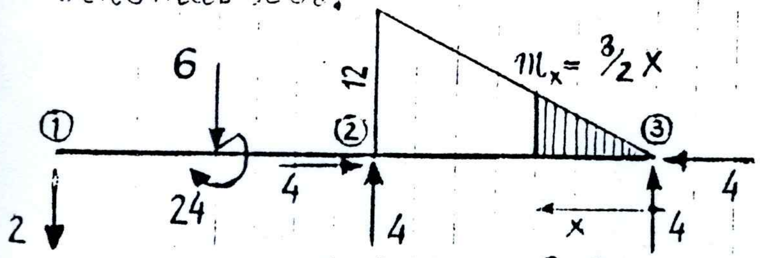
$\sum P_{iy} = 0$

$R_1 + R_{2y} + R_{3y} - P = 0$

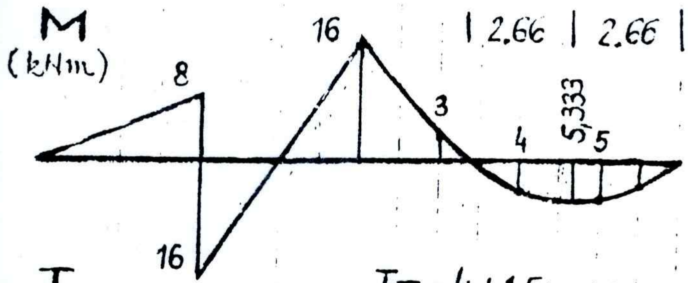
$R_1 = \frac{1}{3} P - \frac{1}{3} m$

dla: $P = 6\,kN$; $m = 12\, kNm/m$; $l = 4m$

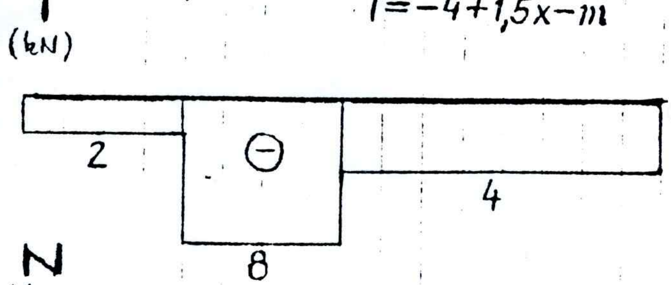
schemat obl.

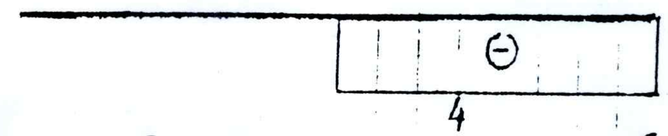


$M(x) = 4x - \frac{1}{2} x \frac{3}{2} x = 4x - \frac{3}{4} x^2$



$T = -4 + 1{,}5x - m$





Uwaga: $\frac{dM}{dx} = T + m$, wzór $-\frac{dM}{dx} = T + m$

$T = -\frac{dM}{dx} - m = 8 - 1{,}5x - m(x) = 8 - 1{,}7x - (12 - 1{,}5x) = -4$

przedział 3-2 $x \in (0, 8)\, m$

$M(1) = +4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3/2 \cdot 1 = +3{,}25\ kNm$

$M(2) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3/2 \cdot 2 = +5\ kNm$

$M(4) = 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3/2 \cdot 4 = +4\ kNm$

$M(6) = 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3/2 \cdot 6 = -3\ kNm$

$M(8) = 4 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3/2 \cdot 8 = -16\ kNm$

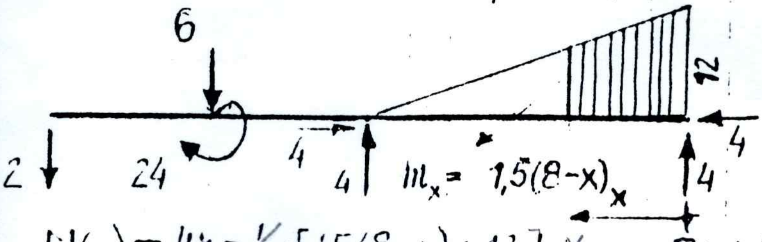
$M(x) = 0 \quad 4x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3}{2} x = 0$

$x = 16/3\ m$

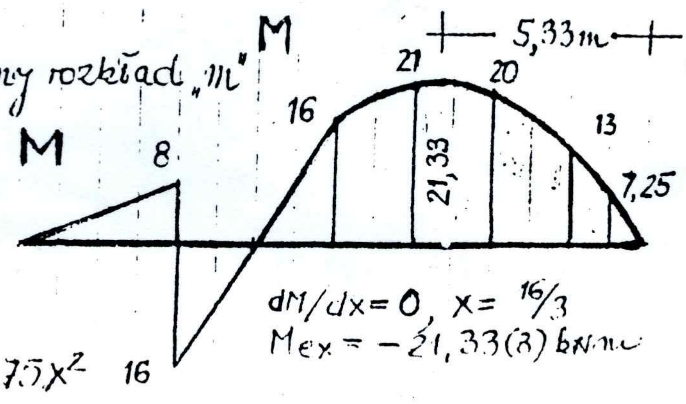
$dM/dx = 0 \quad x = 8/3\ m$

$M(8/3) = 4 \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = +16/3$

inny rozkład „m"



$M(x) = 4x - \frac{1}{2} \cdot [1{,}5(8-x) + 12] \cdot x = -8x + 0{,}75x^2$



$dM/dx = 0$, $x = 16/3$

$M_{ex} = -21{,}33(3)\ kNm$