

Na prawach rękopisu

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Politechniki Wrocławskiej

**Wybrane zagadnienia dynamiki,
aerodynamiki i niezawodności
rurociągowych mostów wiszących**

Raport serii PRE nr 11/2022

Praca doktorska

mgr inż. Dawid Prokopowicz

Słowa kluczowe:

rurociągowy mosty wiszące,
technika podziału na podstruktury,
obciążenie ruchome, turbulентne oddziaływanie wiatru
drżania liniowe i nieliniowe, drżania stochastyczne,
niezawodność

Promotor: dr hab. inż. Danuta Bryja, prof. uczelni

Wrocław, czerwiec 2022

Autor:

mgr inż. Dawid Prokopowicz

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego
Katedra Mechaniki Budowli i Inżynierii Miejskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
tel. 71 320 23 45 tel./fax. 71 320 36 45

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w czerwcu 2022.

Lista odbiorców:

Recenzenci	2 egz.
Promotor	1 egz.
Autor	2 egz.
Biblioteka Główna PWr	1 egz.
Archiwum W-2	1 egz.

Razem

 7 egz.

Spis treści

1. Wstęp.....	6
1.1. Wprowadzenie	6
1.2. Cele i tezy pracy	13
1.3. Układ rozprawy	14
2. Przegląd problemów badawczych opisywanych w przedmiotowej literaturze.....	17
2.1. Przestrzenny układ cięgien	17
2.2. Badania eksperymentalne na modelach.....	20
2.3. Bazy danych	23
2.4. Inspekcja i utrzymanie.....	24
2.5. Przepływ medium w rurociągu.....	25
2.6. Zagadnienie własne	31
2.7. Trzęsienia ziemi.....	33
2.8. Oddziaływanie wiatru.....	37
2.9. Podsumowanie oraz wnioski wynikające z przeglądu literatury.....	46
3. Model obliczeniowy wiszącego mostu rurociągowego	50
3.1. Technika podstruktur	50
3.2. Główne założenia modelu obliczeniowego i podział na podstruktury	55
3.3. Równania ruchu podstruktur	58
3.3.1. Elementy ciągnowe	58
3.3.2. Rurociąg	71
3.3.3. Wieszaki	86
3.3.4. Pylony	89
3.4. Agregacja równań (ogólne równanie ruchu wiszącego mostu rurociągowego).....	94
3.5. Zagadnienia szczegółowe	98
3.5.1. Wstępny naciąg cięgien (globalne równanie równowagi)	98

3.5.2. Tłumienie drgań	99
3.5.3. Model numeryczny przykładowego rurociągowego mostu wiszącego.....	101
3.5.4. Zagadnienie własne – testy numeryczne.....	105
3.6. Podsumowanie.....	112
4. Drgania spowodowane ruchem transportowanego medium	115
4.1. Wprowadzenie	115
4.2. Obciążenie wynikające z przepływu cieczy w rurociągu.....	115
4.3. Zagadnienie własne z uwzględnieniem ruchomej masy cieczy oraz wyznaczenie prędkości krytycznej przepływu.....	121
4.4. Analiza numeryczna drgań liniowych i nieliniowych spowodowanych przepływem cieczy.....	124
4.5. Podsumowanie.....	136
5. Drgania wymuszone turbulencją wiatru.....	139
5.1. Wprowadzenie	139
5.2. Obciążenia aerodynamiczne mostów dużych rozpiętości	141
5.2.1. Charakterystyka pola porywistego wiatru.....	141
5.2.2. Siły aerodynamiczne działające na dźwigary mostów.....	143
5.3. Algorytm analizy drgań wiszącego mostu rurociągowego spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym	148
5.3.1. Założenia	148
5.3.2. Związki korelacyjne procesu turbulencji wiatru	150
5.3.3. Obciążenie aerodynamiczne działające na podwieszony rurociąg	152
5.3.4. Równanie ruchu mostu rurociągowego i jego rozwiązanie	155
5.3.5. Charakterystyki probabilistyczne odpowiedzi mostu	158
5.4. Analiza numeryczna odpowiedzi mostu spowodowanej jednoczesnym oddziaływaniem wzbudzenia turbulentnego oraz ruchu masy	163
5.5. Podsumowanie.....	173
6. Niezawodność w sensie problemu pierwszego przekroczenia.....	176

6.1. Wprowadzenie	176
6.2. Prawdopodobieństwo przekroczenia założonego poziomu granicznego	179
6.3. Losowe drgania wiszącego mostu rurociągowego – analiza problemu pierwszego przekroczenia.....	187
6.4. Podsumowanie.....	191
7. Uwagi końcowe i kierunki dalszych badań.....	193
Załącznik 1	198
Załącznik 2	212
Załącznik 3	215
Literatura	220
Źródła internetowe	232
Streszczenie w języku polskim	233
Streszczenie w języku angielskim.....	235

1. Wstęp

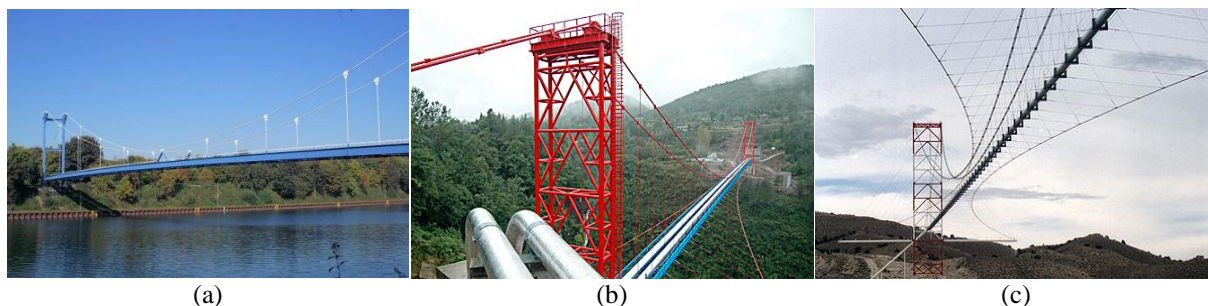
1.1. Wprowadzenie

Szybki rozwój mocy obliczeniowej komputerów w ostatnich dziesięcioleciach spowodował w wielu dziedzinach nauki znaczący postęp w zakresie numerycznej symulacji zjawisk, które trudno jest opisać rozwiązaniami w zamkniętej (analitycznej) postaci. Dotyczy to także mechaniki budowli, gdzie metody dyskretyzacyjne, a zwłaszcza metoda elementów skończonych (MES) stały się narzędziem wręcz obowiązkowym przy budowie modeli numerycznych złożonych konstrukcji inżynierskich. W przypadku analiz dynamicznych takich konstrukcji poddanych działaniu ruchomych obciążeń inercyjnych, gdzie wymagane są symulacje drgań w czasie rzeczywistym (ang. *real-time simulations*), modelowanie z wykorzystaniem MES prowadzi zazwyczaj do bardzo dużych nakładów obliczeniowych, głównie ze względu na znaczny rozmiar zadania wynikający z dużej liczby stopni swobody. Naturalnym wyjściem z tej sytuacji jest poszukiwanie metod, których celem jest ograniczenie rozmiaru zadania bez zauważalnego wpływu na otrzymywane wyniki. Jedną z metod proponowanych w tym celu w literaturze jest „technika podstruktur”. Podstawy tej metody sformułował Hurty w 1960 roku [69], a jej ogólna idea polega na podziale konstrukcji na podukłady (podstruktury), dla których formułuje się równania ruchu osobno, różnymi metodami dostosowanymi do poszczególnych podukładów. Wyboru zbioru funkcji bazowych, aproksymujących ruch danej podstruktury, dokonuje się biorąc pod uwagę m. in. niski nakład obliczeniowy oraz dobre właściwości aproksymacyjne dostosowane do danej podstruktury. Następnie formułuje się globalne równania ruchu konstrukcji przy wykorzystaniu warunków ciągłości przemieszczeń i równowagi sił w punktach połączeń podstruktur. To podejście pozwala znacząco zmniejszyć nakłady obliczeniowe. Należy tutaj podkreślić, że w literaturze funkcjonuje wiele różnych terminów odnoszących się do metod, które mogą być traktowane jako pewne odmiany metody podziału na podstruktury. W artykule z 2008 roku Klerk i in. [77] podjęli próbę usystematyzowania tych metod wprowadzając ogólny termin „*dynamic substructuring*”. Natomiast termin „technika podstruktur” został wprowadzony przez autora na potrzeby niniejszej pracy i będzie rozumiany jako określenie ogólnego podejścia, w którym dokonuje się podziału wyjściowego układu na składniki.

Technika podstruktur, jako efektywna metoda modelowania złożonych konstrukcji inżynierskich, została zastosowana w niniejszej pracy do budowy oryginalnego modelu

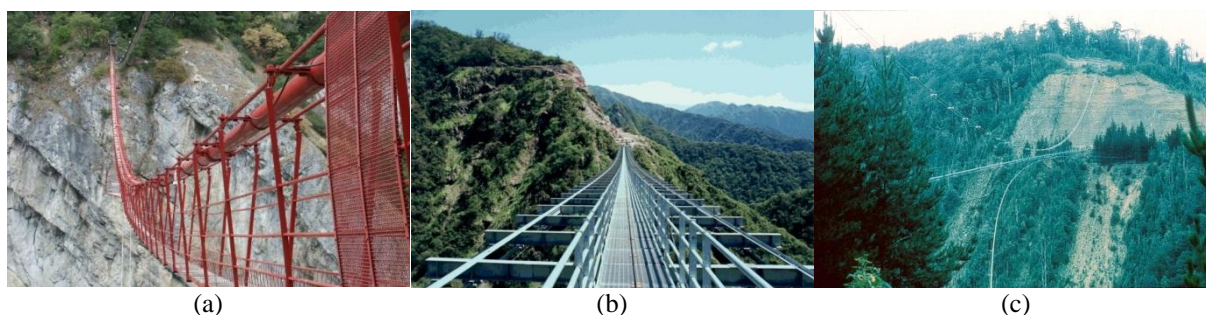
obliczeniowego wiszących mostów rurociągowych, które są przykładem nietypowych konstrukcji belkowo-ciężnowych charakteryzujących się bardzo dużymi rozpiętościami, wiotką belką i przestrzennie rozpiętym układem podwieszenia złożonym z cięgien o dużym zwisie. Opracowany, dynamiczny model obliczeniowy uwzględnia specyficzne cechy tych konstrukcji, w tym duże przemieszczenia, a równocześnie znacznie ogranicza rozmiar zadania numerycznego w porównaniu z modelami MES, stosowanymi standardowo w literaturze dotyczącej wiszących mostów rurociągowych (np. [136], [147]). Zastosowanie niestandardowego autorskiego modelu bazującego na technice podstruktur umożliwiło rozwiązanie i analizę wybranych zagadnień dynamiki, aerodynamiki i niezawodności, które były częściowo rozważane w literaturze na temat tych mostów, jednak wskazywano potrzebę dalszych badań i tworzenia jeszcze dokładniejszych modeli obciążeń, które są istotne z punktu widzenia trwałości i bezpieczeństwa użytkowania konstrukcji (np. [141], [147]).

Rurociągowy mosty wiszące są konstrukcjami nietypowymi, które swoją budową różnią się znacząco od konwencjonalnych mostów komunikacyjnych. Są to konstrukcje stosunkowo mało znane w Polsce, budowane w większości tylko w wybranych regionach na świecie. Charakteryzują się dużymi rozpiętościami przęseł głównych, dochodzącymi nawet do 700 m. W systemach konstrukcyjnych rurociągowych mostów wiszących wykorzystywana jest technologia znana z mostów komunikacyjnych, tj. system podwieszenia składający się z cięgien głównych (nośnych) oraz wieszaków. Jednak wśród istniejących mostów bardzo rzadko spotyka się rozwiązania klasyczne, złożone z dwóch pionowych płaszczyzn podwieszenia oraz sztywnego pomostu, na którym układane są rurociągi (rys. 1.1a). Znacznie częściej występują rozwiązania nietypowe, gdzie system podwieszenia stanowi przestrzenny wieszak ciężnowy o złożonej strukturze (rys. 1.1b), a rurociąg jest w wielu przypadkach bezpośrednio podwieszony do cięgien nośnych za pomocą wieszaków (rys. 1.1c).



Rys. 1.1. Przykłady rurociągowych mostów wiszących:
a) most w Gelsenkirchen, Niemcy (fot. Nicolas Janberg) {3},
b) most nad rzeką Yesanhe, Chiny (fot. Shen Daming) {10},
c) most w rezerwacie Flaming Gorge, Wyoming, USA (fot. Eric Sakowski) {6}

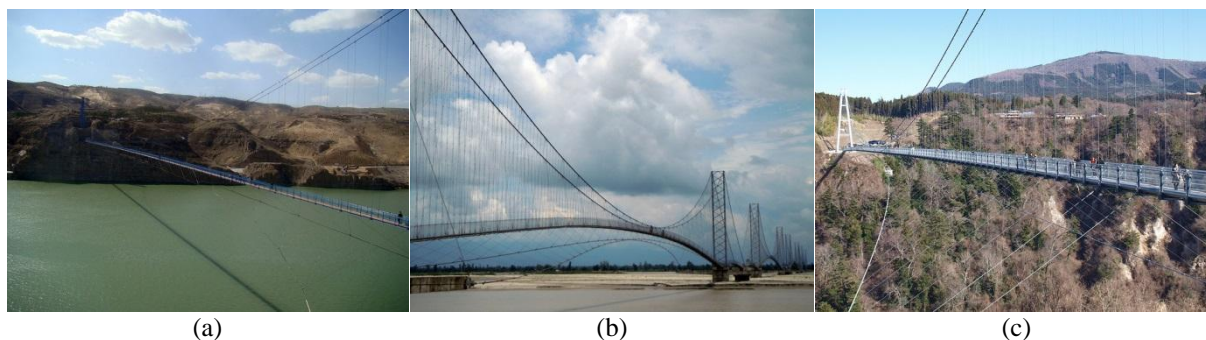
Różnorodność układów konstrukcyjnych stosowanych w rurociągowych mostach wiszących jest bardzo duża. Wiele rozwiązań można uznać za unikatowe na skalę światową, na przykład most wiszący wybudowany w 1922 w Szwajcarii, w którym dwa ciężkie wspierają wodociąg i kładkę dla pieszych. Most ten znajduje się na wysokości 190 m nad wąwozem i służy obecnie do skoków na bungee (rys. 1.2a). Kolejnym przykładem jest most wiszący o rozpiętości 337 m, przenoszący kilka rurociągów oraz chodnik roboczy, wybudowany w 1998 w Argentynie, przy projektowaniu którego inspirowano się mostami linowymi Inków (rys. 1.2b). Unikatową konstrukcją jest też most wiszący znajdujący się w Australii, o rozpiętości 439 m między zakotwieniami, gdzie ciężka zakotwiono bezpośrednio do ścian skalnych, bez pylonów (rys. 1.2c).



Rys. 1.2. Przykłady rurociągowych mostów wiszących:
a) most w Niouc, Szwajcaria (fot. Nicolas Janberg) {3},
b) most w pobliżu Las Estancias, Argentyna (fot. Laura Albano) {7},
c) most nad rzeką Savage, Australia {6}

Pomimo tego, że trudno jest jednoznacznie wyłonić jeden schemat konstrukcyjny charakteryzujący rurociągowy most wiszący, w większości tych konstrukcji można wyróżnić kilka cech wspólnych, takich jak: a) nachylone płaszczyzny podwieszenia, w których ciężkie główne mają zazwyczaj duży zwis, b) dźwigar w postaci rurociągu, charakteryzujący się dużą smukłością, c) zastosowanie systemu bocznych ciężarów, które są odpowiedzialne za zachowanie prawidłowego kształtu rurociągu oraz przenoszenie bocznych obciążeń wiatrem. Układ ciężarów bocznych, nazywanych też wiatrowymi, jest w zasadzie stosowany tylko w mostach rurociągowych. Próby przeniesienia tego rozwiązania do mostów komunikacyjnych nie przyjęły się [62], poza nielicznymi wyjątkami, na przykład: kładka dla pieszych o największej na świecie rozpiętości między pylonami 500 m i długości pomostu 467 m, znajdująca się w pobliżu zapory Wanjiashai w Chinach (rys. 1.3a); kładka o całkowitej długości przęsła 1453 m w Nepalu (rys. 1.3b); oraz kładka Kokonoe "Yume" Otsurhashi w Japonii, o rozpiętości przęsła 390 m (rys. 1.3c). Szczegółową charakterystykę

wiszących mostów ruropiętowych wraz z zarysem historycznym przedstawiono w Załączniku 1.



Rys. 1.3. Przykłady wiszących kładek dla pieszych z bocznymi cięgnami wiatrowymi:
a) kładka w pobliżu zapory Wanjiashai, Chiny {5},
b) kładka łącząca wioski Chandani i Dodhara, Nepal (fot. Kailash Thapliyal) {5},
c) kładka w Kokonoe, Japonia (fot. Tomo) {5}

Specyficzne cechy układu konstrukcyjnego wiszących mostów ruropiętowych, tj. duże zwisy cięgien nośnych i wyjątkowa smukłość całej konstrukcji skutkująca wysokim prawdopodobieństwem wystąpienia dużych przemieszczeń, znacznie komplikują analizę statyczną i dynamiczną tych konstrukcji. Przede wszystkim jednak powodują, że odpowiedzi dynamiczne wynikające z obciążenia wiatrem, lub działania innych obciążeń zmiennych w czasie, znacząco odbiegają od znanych i przebadanych w literaturze odpowiedzi mostów komunikacyjnych, gdzie przemieszczenia są relatywnie małe w porównaniu z mostami ruropiętowymi, co wynika głównie z mniej podatnego pomostu. Nie można zatem wykorzystywać w projektowaniu mostów ruropiętowych doświadczeń i intuicji inżynierskiej dotyczących mostów komunikacyjnych. Także, ze względu na dużą różnorodność rozwiązań konstrukcyjnych, nie można uogólniać wniosków wynikających z badań z pozoru podobnych do siebie mostów ruropiętowych [47], dlatego każdy nowo projektowany wiszący most ruropiętowy powinien być poddany indywidualnej analizie numerycznej bazującej na możliwie realistycznym modelu obliczeniowym.

W przypadku wiszących mostów ruropiętowych, sformułowanie wiarygodnego modelu obliczeniowego nie jest łatwe, zwłaszcza wtedy, gdy model ma być przeznaczony do analizy zagadnień dynamiki. Z jednej strony, powinien on być na tyle ogólnie sformułowany, żeby objąć jak najszerszą grupę rozwiązań konstrukcyjnych, a z drugiej na tyle szczegółowy, aby uwzględniać charakterystyczne cechy poszczególnych części składowych budowli. Te wymogi spełnia technika podstruktur, zastosowana do modelowania w niniejszej rozprawie, dająca możliwość odrębnego wyboru efektywnej metody modelowania dla każdego elementu konstrukcyjnego.

Biorąc pod uwagę fakt, że ciągną stanowią główne elementy nośne wiszących mostów rurowych, zasadniczy nacisk w modelowaniu powinien być położony na opracowanie odpowiedniego modelu ciągną. W praktycznych obliczeniach najczęściej korzysta się tu z metody elementów skończonych, ale przy budowie modeli MES ciągną o dużych zwisach wymagany jest gęsty podział na elementy skończone, w celu odpowiedniego wyprofilowania kształtu ciągną. Przy dużych rozpiętościach przęseł mostów wiszących, prowadzi to do zadania o znacznej liczbie stopni swobody, co z kolei powoduje istotne wydłużenie czasu obliczeń w zagadnieniach dynamiki, zwłaszcza w przypadku długich obserwacji drgań konstrukcji. Z tego względu, w niniejszej pracy zastosowano autorski ciągły model ciągną, prowadzący do znacznej redukcji rozmiaru zadania w porównaniu z MES, który równocześnie uwzględnia takie charakterystyczne cechy jak geometryczna nieliniowość spowodowana dużymi przemieszczeniami, ruch podpór, wstępne napięcie i duży zwis statyczny.

Także modelowanie rurowych pełniące rolę dźwigara w rurowych mostach wiszących wymaga indywidualnego podejścia. Ze względu na możliwość występowania dużych przemieszczeń, konieczne jest zastosowanie modelu geometrycznie nieliniowego. Należy też uwzględnić punktowe obciążenia wieszakami oraz ruch medium przepływającego przez rurowy. W dostępnej literaturze dotyczącej rurowych mostów wiszących autorzy traktują rurowy jako belkę i stosują na ogół klasyczne modelowanie MES z użyciem standardowych elementów belkowych typu Eulera-Bernoulliego (np. [145]). Takie podejście jest z oczywistych względów zbyt uproszczone. W związku z tym, w rozprawie zostanie zaproponowany bardziej realistyczny, zdaniem autora, model dynamiczny rurowych – bazujący na nieliniowym równaniu zginania belki Eulera-Bernoulliego [57], sformułowany metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkina.

Problem modelowania rurowych komplikuje dodatkowo zagadnienie przepływu cieczy, które z uwagi na istotę zjawiska powinno być rozważane z uwzględnieniem interakcji między cieczą i rurowym. Takie podejście bywa stosowane w przypadku analiz drgań rurowych prowadzonych poza obiektami mostowymi [142], natomiast w przypadku przepraw mostowych przyjmuje się zwykle znacznie uproszczony opis przepływu. W niniejszej rozprawie przyjęto podejście podobne do zastosowanego w pracy [145], gdzie ciecz jest balastem reprezentowanym przez półnieskończony odcinek ciągłej masy poruszającej się ze stałą prędkością. Uwzględniono zatem inercję przepływającej cieczy podczas jej ruchu wspólnego z rurowym, ale pominięto wpływ wzajemnego oddziaływania między rurowym i przepływającą cieczą, jako drugorzędny z punktu widzenia analizy

zagadnień dynamiki rozważanych w rozprawie, tj. drgań mostu spowodowanych inercyjnym obciążeniem ruchomym, reprezentującym przepływ cieczy oraz drgań spowodowanych działaniem wiatru. Należy tu podkreślić, że w dostępnej literaturze dotyczącej problemu obciążenia wiszących mostów rurociągowych przepływającym medium generalnie pomija się inercję ruchu cieczy. Na przykład w pracy [60] przepływ cieczy jest modelowany zbiorem ruchomych sił o stałych wartościach wynikających jedynie z ciężaru własnego, co jest sporym uproszczeniem. Zastosowane w tej rozprawie podejście do modelowania przepływu cieczy jest zatem znacznie bogatsze niż zazwyczaj spotykane w literaturze poświęconej rurociągowym mostom wiszącym, chociaż w aspekcie zagadnień przepływu medium w samych rurociągach może wydawać się zgrubne.

Największe efekty dynamiczne spowodowane przepływem cieczy występują w czasie jej napływu i odpływu z rurociągu, przy czym problem ten pojawia się nie tylko na początku i końcu okresu eksploatacji rurociągu, ale także podczas normalnego użytkowania, gdzie okresowo stosuje się specjalne urządzenia czyszczące rurociąg, które wypychają zanieczyszczenia na zewnątrz. Są to sytuacje, które mogą prowadzić do przekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń, z powodu niekorzystnego układu obciążeń statycznych i dodatkowych efektów dynamicznych zależnych od prędkości przepływu cieczy. Tu warto wspomnieć, że prędkość przepływu wpływa zarówno na masę jak i tłumienie oraz sztywność złożonego układu dynamicznego: ruchoma ciecz-rurociąg, co będzie wykazane w pracy. Wraz ze wzrostem prędkości maleje sztywność tego układu, zatem z poznawczego punktu widzenia interesujące może być ustalenie krytycznej prędkości przepływu, przy której konstrukcja traci stateczność. Zagadnienie prędkości krytycznej będzie rozważane w rozprawie, pomimo tego, że spodziewane wartości prędkości krytycznej będą i powinny być wielokrotnie większe od rzeczywistych prędkości przepływu cieczy w rurociągu. Wzięto bowiem pod uwagę fakt, że być może, w nieodległej przyszłości, doświadczenia budowniczych wiszących mostów rurociągowych zostaną wykorzystane na przykład do budowy mostów kolejowych o podobnej konstrukcji, położonych na liniach dużych prędkości (np. szybkich pociągów, takich jak japoński *LO Series* poruszający się prędkością ponad 600 km/h {2}). Sformułowany w rozprawie model obliczeniowy może być przydatny do analizy takich mostów, w tym do wyznaczenia prędkości krytycznej. Wówczas, odcinek ruchomej masy będzie reprezentował pociąg poruszający się z bardzo dużą prędkością wewnątrz podwieszanej belki rurowej (np. kolej typu Hyperloop), i ta prędkość wcale nie będzie tak bardzo odbiegała od prędkości krytycznej, jak prędkość przepływu cieczy w rurociągu.

Podstawowymi obciążeniami powodującymi drgania rurociągowych mostów wiszących są obciążenia aerodynamiczne. Mosty rurociągowy, ze względu na dużą rozpiętość, małą sztywność dźwigara oraz małe tłumienie, są wyjątkowo wrażliwe na działanie wiatru, a w szczególności na wzbudzenie wirowe. Jest to zjawisko dobrze rozpoznane i wyczerpująco opisane w literaturze (np. [49], [126]). Znane są też środki zaradcze, na przykład w postaci tłumików drgań, dodatkowych elementów usztywniających lub urządzeń zaburzających powstawanie wirów, które są stosowane wtedy, gdy drgania spowodowane oddziaływaniem wirów mogą zagrażać bezpieczeństwu konstrukcji. W niniejszej rozprawie zdecydowano się przeprowadzić analizę drgań spowodowanych innym oddziaływaniem wiatru, tj. wzbudzeniem turbulentnym (ang. *buffeting*). Jest to jedyne zjawisko aerodynamiczne, którego nie da się wyeliminować, można jedynie ograniczać efekty jego działania. Skutkiem tego obciążenia są uszkodzenia zmęczeniowe oraz chwilowe przekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń lub naprężeń w elementach konstrukcyjnych.

Zjawisko wzbudzenia drgań turbulencją wiatru jest z natury losowe. Pojawia się przy dużych prędkościach wiatru, a więc występuje powszechnie w rejonach lokalizacji rurociągowych mostów wiszących. Można by było zatem oczekiwać, że problem wzbudzenia turbulentnego jest dobrze rozpoznany w literaturze dotyczącej aerodynamiki tych mostów, podobnie jak problem wzbudzenia wirowego, a mimo to niewiele jest w literaturze publikacji poświęconych temu tematowi (np. [68], [146]). Z tego względu, w rozprawie podjęto badania, których głównym celem jest opracowanie metody wyznaczania wartości oczekiwanych oraz wariancji przemieszczeń podwieszono rurociągu poddanego działaniu wzbudzenia turbulentnego, a także wpływu prędkości przepływu cieczy na te charakterystyki, tj. wpływu ruchomej masy, która zmieniając charakterystyki mostu – jego masę, sztywność i tłumienie, istotnie zmienia odpowiedź dynamiczną na to obciążenie. Wyznaczenie wartości oczekiwanych oraz wariancji stochastycznej odpowiedzi mostu w stanie ustalonym pozwala zastosować znany wzór Rice'a ([108], [109]), na podstawie którego można analizować problem niezawodności konstrukcji w sensie pierwszego przekroczenia, który prowadzi do określenia podstawowych miar niezawodności, czyli średniej liczby przekroczeń w jednostce czasu oraz prawdopodobieństwa przekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń przynajmniej jeden raz. Problem ten także nie był do tej pory rozważany w literaturze w odniesieniu do rurociągowych mostów wiszących, stąd rozwiązania i analizy przedstawione w rozprawie w rozdziale 6 stanowią jeden z oryginalnych elementów rozprawy.

1.2. Cele i tezy pracy

Na podstawie obszernego przeglądu stanu wiedzy na temat problemów dynamiki rurociągowych mostów wiszących, który został krótko omówiony we wprowadzeniu motywującym podjęcie tematu rozprawy i który będzie przedstawiony szczegółowo w rozdziale 2, sformułowano następujące cele niniejszej rozprawy:

- opracowanie nieliniowego modelu obliczeniowego, przeznaczonego do analiz dynamicznych, wiszącego mostu rurociągowego, z wykorzystaniem techniki podziału na podstruktury i z zastosowaniem oryginalnego, ciągłego modelu ciężna, uwzględniającego ruch podpór, punktowe obciążenia wieszakami, wstępny naciąg, duży zwis statyczny i duże przemieszczenia;
- analiza drgań spowodowanych przepływem cieczy modelowanej jako ciągła ruchoma masa balastowa, w tym ocena efektów nieliniowych wynikających z dużych przemieszczeń;
- sformułowanie metody wyznaczania charakterystyk probabilistycznych drgań spowodowanych jednoczesnym oddziaływaniem turbulентnego wiatru i ruchem cieczy wewnątrz rurociągu, oraz ocena wpływu ruchomej masy cieczy na te charakterystyki;
- wyznaczenie średniej liczby przekroczeń w jednostce czasu oraz prawdopodobieństwa pierwszego przekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń, na podstawie wyników analiz losowych drgań konstrukcji spowodowanych turbulencją wiatru oraz ruchem masy wewnątrz rurociągu.

Osiągnięcie powyższych celów ma służyć udowodnieniu tez pracy sformułowanych następująco:

- 1. Technika podstruktur jest efektywną metodą modelowania złożonych konstrukcji belkowo-ciężnowych na potrzeby analiz drgań spowodowanych działaniem deterministycznych i losowych obciążeń zmiennych w czasie.**
- 2. Parametry dynamiczne rurociągowych mostów wiszących, a w szczególności charakterystyki drgań losowych spowodowanych turbulencją wiatru i wyznaczone na tej podstawie prawdopodobieństwo przekroczenia przemieszczeń granicznych zależą od prędkości przepływu cieczy przez rurociąg, jednak w realnym zakresie prędkości jej wpływ nie jest znaczący.**

1.3. Układ rozprawy

Rozprawa składa się z siedmiu rozdziałów. Po rozdziałach merytorycznych zamieszczono spis literatury, źródła internetowe, trzy załączniki oraz streszczenia w języku polskim i angielskim.

Rozdział 1 jest wprowadzeniem do zagadnień poruszanych w tej pracy. Przedstawiono motywację podjęcia tematyki rozprawy wskazując ogólnie na stwierdzone w literaturze niedostatki w zakresie modelowania rurociągowych mostów wiszących i analiz zagadnień dynamiki specyficznych dla tych mostów. Na tym tle sformułowano cele oraz tezy pracy.

W rozdziale 2 opisano szczegółowo główne problemy badawcze podejmowane w literaturze dotyczącej wiszących mostów rurociągowych oraz podsumowano obecny stan wiedzy. Podkreślono fakt, że dostępna literatura przedmiotu jest dość skąpa i obszernie omówiono najważniejsze prace wyszukane, mając na względzie potrzebę upowszechnienia wiedzy na temat rozważanych mostów, które są konstrukcjami nietypowymi, rzadko występującymi w Polsce i Europie. Temu celowi służy też Załącznik 1, w którym przedstawiono przegląd istniejących konstrukcji rurociągowych mostów wiszących wraz z zarysem historycznym.

Rozdział 3 jest poświęcony opracowaniu modelu obliczeniowego rurociągowego mostu wiszącego. Model ten sformułowano przy użyciu techniki podstruktur, którą zdefiniowano na początku rozdziału, na tle obszernego przeglądu różnych wariantów metody CMS (ang. *Component Mode Synthesis*) tworzących łącznie podejście znane w literaturze pod nazwą „syntezy podstruktur” (ang. *substructure synthesis*). Bazując na algorytmie techniki podstruktur podzielono model typowego rurociągowego mostu wiszącego na następujące podstruktury: rurociąg, cięgna główne i wiatrowe, wieszaki, odciągi oraz pylony. Sformułowano osobno równania ruchu każdej podstruktury, biorąc pod uwagę charakterystyczne cechy pracy powtarzalnych elementów konstrukcyjnych tworzących daną podstrukturę. W przypadku elementów cięgowych wyprowadzono równania ruchu metodą Galerkina, przyjmując za punkt wyjścia cząstkowe równania różniczkowe opisujące przestrzenne, nieliniowe drgania cięgna podpartego na końcach z uwzględnieniem ruchu podpór i punktowego obciążenia wieszakami. Rurociąg potraktowano jako belkę, której drgania giętne w płaszczyźnie pionowej i poziomej są opisane nieliniowym równaniem Eulera-Bernoulliego. Równania drgań w obu płaszczyznach przekształcono do postaci równań zwyczajnych za pomocą metody elementów skończonych w ujęciu Galerkina (ang. *GFEM*). Wieszaki potraktowano jako jednoelementowe pręty kratownicowe. Równania

ruchu pylonów sformułowano stosując standardową metodę elementów skończonych. Końcowe równanie ruchu opisujące nieliniowe drgania rurociągowego mostu wiszącego uzyskano biorąc pod uwagę warunki zgodności przemieszczeń oraz równowagi sił w miejscach połączeń podstruktur. Ogólną postać macierzy realizującej agregację podstruktur przedstawiono w Załączniku 2, a wektor sił brzegowych działających między podstrukturami w Załączniku 3. W punkcie 3.5 omówiono zagadnienia szczegółowe związane z budową modelu numerycznego rurociągowego mostu wiszącego. Zwrócono uwagę na konieczność doboru odpowiedniego naciągu wstępnego cięgien oraz zastosowania adekwatnego modelu tłumienia. Na koniec, zaproponowano do dalszych analiz numerycznych przykładowy model rurociągowego mostu wiszącego, dla którego przedstawiono wyniki rozwiązań zagadnienia własnego, prowadzące do ustalenia miarodajnej liczby funkcji aproksymacyjnych opisujących ruch cięgien oraz liczby elementów skończonych zastosowanych do dyskretyzacji rurociągu.

W rozdziale 4 sformułowano model obciążenia rurociągu płynąca cieczą, w postaci półnieskończonego odcinka ciągłej ruchomej masy. Przeprowadzono analizę zagadnienia własnego badając wpływ prędkości ruchomej masy cieczy na częstości własne rurociągowego mostu wiszącego. W celach poznawczych ustalono wartość krytyczną prędkości ruchu masy, przy której układ traci stateczność. Przedstawiono wyniki i analizy testów numerycznych obejmujących przebiegi quasi-statyczne i dynamiczne przemieszczeń pionowych rurociągu spowodowanych napływem oraz odpływem masy cieczy, w zależności od prędkości ruchu. Przeprowadzono analizę wpływu efektów nieliniowych wynikających z dużych przemieszczeń układu, na stan przemieszczenia rurociągu.

Rozdział 5 jest związany z zagadnieniem wpływu oddziaływania turbulencji wiatru na rurociągowy mosty wiszące poddane obciążeniu ruchomą masą cieczy. Sformułowano siły aerodynamiczne działające na dźwigar mostu przy założeniu, że pole wiatru jest podzielone na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu, z uwzględnieniem przestrzennej i czasowej korelacji składników obciążenia związanych z turbulencją wiatru. Przedstawiono rozwiązania w zakresie teorii korelacyjnej, tj. wyznaczono wartości oczekiwane i wariancje poziomych przemieszczeń rurociągu. Pokazano wyniki analiz numerycznych, w których szczególną uwagę zwrócono na wpływ prędkości ruchu masy wewnątrz rurociągu.

W rozdziale 6 przedstawiono rozwiązania zagadnienia niezawodności wiszących mostów rurociągowych w sensie pierwszego przekroczenia założonego stanu granicznego. Wyznaczono średnie liczby przekroczeń w jednostce czasu oraz prawdopodobieństwa przekroczenia przemieszczeń granicznych, korzystając z wyników analiz z rozdziału 5.

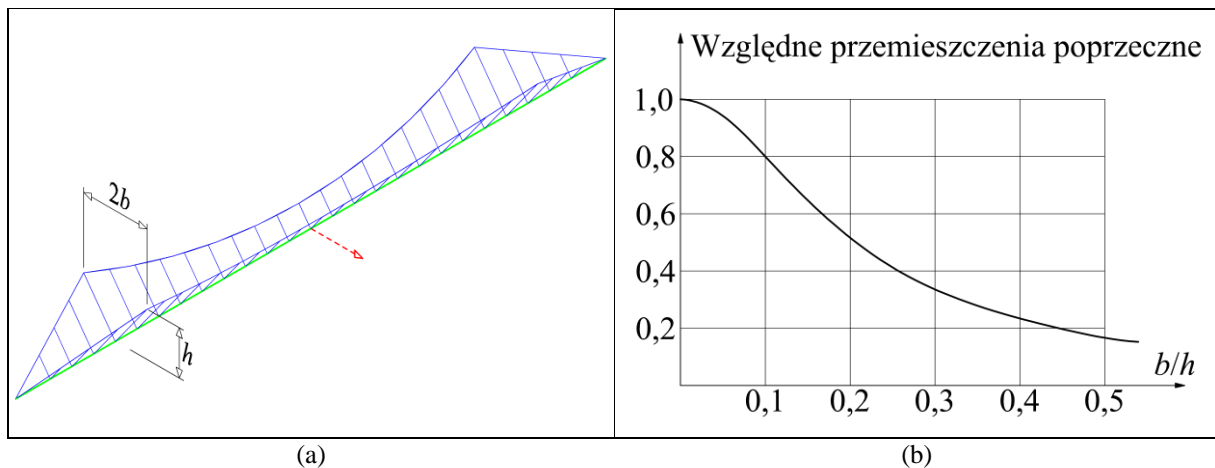
W rozdziale 7 sformułowano wnioski końcowe oraz przedstawiono potencjalne kierunki dalszych badań.

2. Przegląd problemów badawczych opisywanych w przedmiotowej literaturze

Literatura dotycząca rurociągowych mostów wiszących jest dość skromna. Na tym tle wyróżnia się cykl prac opublikowanych w latach 80 i 90-tych XX wieku przez Dusseau (od [46] do [54]), poświęconych rurociągowym mostom wiszącym w USA. Zakres problemów rozważanych w tych pracach jest bardzo szeroki: bazy danych, budowa modeli numerycznych za pomocą programów MES, wyznaczanie form i częstości własnych, wpływ sztywności podwieszenia oraz geometrii rurociągu na podatność mostów na wzbudzenie wirowe oraz zagadnienia związane z trzęsieniami ziemi. Napotkano także na kilka prac (m.in. [60], [142] oraz [145]) związanych z problemem przepływu cieczy oraz ruchu urządzeń serwisowych w rurociągu. W trzech pracach, [30], [68] i [147], poruszono zagadnienie oddziaływania turbulentnego wiatru na wiszące mosty rurociągowy oraz sposobu ograniczenia drgań spowodowanych działaniem tego obciążenia. Szczegółowe omówienie wszystkich prac wyszukanych w literaturze przedstawiono w dalszej części tego rozdziału. Prace uporządkowano według problemów badawczych. Obszerność tego omówienia jest celowa, uzasadniona zdaniem autora potrzebą upowszechnienia wiedzy na temat rozważanych mostów.

2.1. Przestrzenny układ cięgien

O problemach związanych z przestrzennym układem cięgien wspomina między innymi Gimsing [62] w swojej monografii na temat mostów podwieszonych. Przestrzenny układ cięgien, stosowany zarówno w wiszących jak i wantowych mostach rurociągowych, ma tę zaletę, że przejmuje nie tylko obciążenia pionowe, ale i poziome – poprzeczne do osi mostu. Nachylone płaszczyzny podwieszenia powodują, że cały system konstrukcyjny jest napięty i pracuje jak przestrzenna kratownica. Wpływ geometrii przestrzennego wieszara cięgnowego na pracę podwieszono rurociągu jest stosunkowo dobrze rozpoznany problemem badawczym. W monografii [62] przedstawiono zależność przemieszczeń poprzecznych w środku dźwigara od nachylenia płaszczyzn podwieszenia mierzonego proporcją b/h (rys. 2.1). Przy pionowej płaszczyźnie podwieszenia (gdy $b/h = 0$), ograniczenie przemieszczeń poprzecznych wynika tylko z efektu wahadła, natomiast przy zwiększającym się nachyleniu płaszczyzn podwieszenia (proporcji b/h) względne przemieszczenia poprzeczne dźwigara maleją.

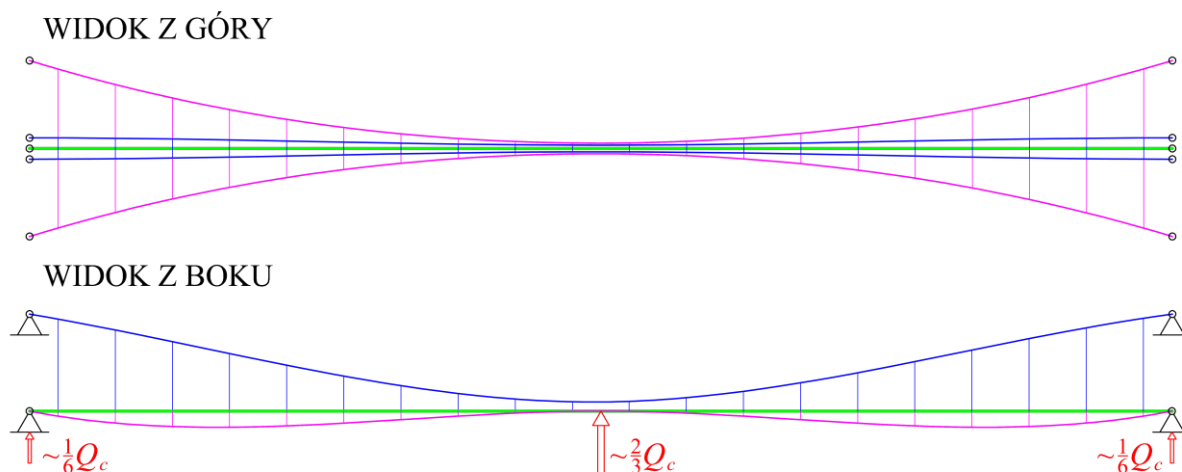


Rys. 2.1. Zależność przemieszczeń poprzecznych w środku dźwigara od nachylenia płaszczyzn podwieszenia [62]

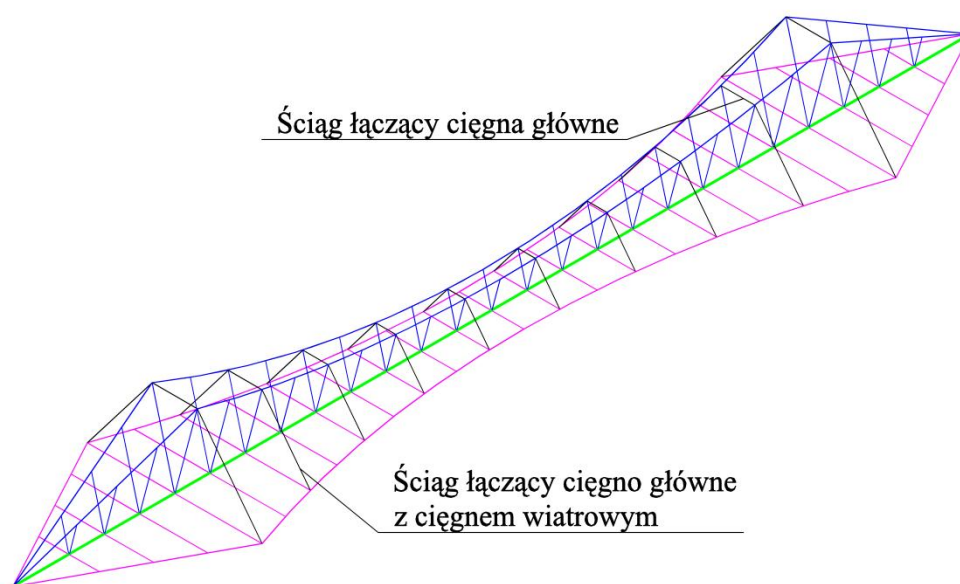
W pracy [62] zwrócono także uwagę na trudności, które pojawiają się w trakcie wznoszenia przestrzennie podwieszonych konstrukcji mostów rurociągowych. Pomimo widocznych zalet przestrzennego systemu podwieszenia, w przypadku mostów wiszących o długich przęsłach taki układ cięgien komplikuje technologię budowy oraz w pewnym zakresie utrudnia przenoszenie ciężaru własnego cięgien. Trudności związane z technologią budowy dotyczą sytuacji, gdy przy wznoszeniu mostu dokłada się kolejne liny jedna po drugiej tworząc cały przekrój ciężna. Obecne techniki budowy wymagają, aby w trakcie montażu płaszczyzny cięgien były pionowe, zatem po ukończeniu cięgien głównych należy obrócić płaszczyzny podwieszenia do pozycji nachylonej lub poziomej komplikując tym samym ułożenie lin na siodłach oraz łączenie z rurociągiem. Alternatywnym sposobem jest instalacja gotowego ciężna głównego wraz z podwieszonym rurociągiem. Jednak w tym przypadku główną trudnością jest sama instalacja ciężna oraz jego poprawne ustawienie. Wybór metody wznoszenia powinien być dobrany po rozpatrzeniu takich czynników jak: opłacalność, stateczność konstrukcji podczas jej wznoszenia, czas budowy, użyty sprzęt oraz warunki na miejscu budowy [91].

Trudności związane z przenoszeniem ciężaru własnego dotyczą cięgien wiatrowych leżących w płaszczyznach poziomych oraz w mniejszym stopniu cięgien głównych, których płaszczyzna podwieszenia jest nachylona względem płaszczyzny pionowej. Według Gimsinga [62], aby płaszczyzna ciężna wiatrowego pozostała pozioma, potrzebna by była siła przyłożona w środku rozpiętości przęsła, równa $2/3$ całego ciężaru własnego ciężna Q_c (rys. 2.2). Widać zatem, że ciężno leżące w płaszczyźnie poziomej będzie poddane działaniu siły o znaczącej wartości i to w najbardziej niekorzystnym położeniu, tj. w środku rozpiętości przęsła. Dodatkowo, pionowy zwis ciężna usytuowanego poziomo, powodujący

że ciężno będzie leżało poza płaszczyzną, prowadzi do zmniejszenia sztywności (efekt znany z mostów wantungowych, w których zastosowano długie wanty). Problem ten rozwiązuje się wykorzystując symetrię systemu podwieszenia, poprzez zastosowanie ściągów w postaci ciężien łączących ze sobą ciężna główne oraz ciężna główne z wiatrowymi (rys. 2.3).



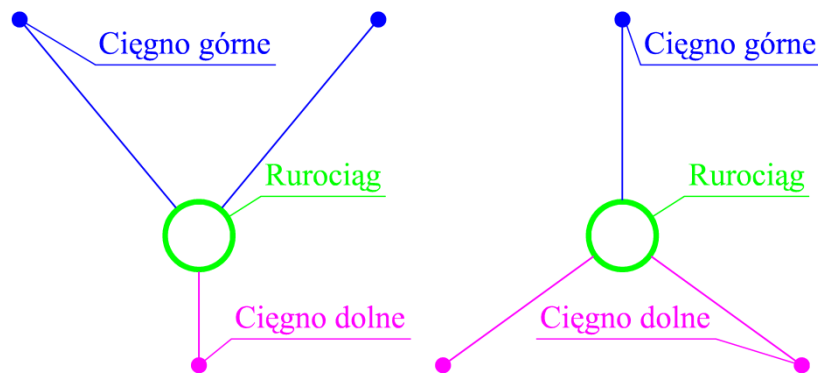
Rys. 2.2. Pionowe siły spowodowane ciężarem własnym ciężna leżącego w płaszczyźnie poziomej [62]



Rys. 2.3. Widok ściągów mających na celu równoważenie sił wynikających z ciężaru własnego ciężien

W artykule [91] przedstawiono porównanie dwóch typów podwieszenia hipotetycznego rurociągowego mostu wiszącego (rys. 2.4) – w kształcie litery Y i odwróconej litery Y. Głównym celem było znalezienie takiej konfiguracji ciężien głównych, w której deformacja rurociągu będzie najmniejsza. Rozpatrywano między innymi różne nachylenia

płaszczyzn podwieszenia, zwisy cięgien głównych, pola przekroju poprzecznego cięgien oraz wpływ uwzględnienia geometrycznej nieliniowości. Okazało się, że w przypadku ułożenia cięgien w kształcie litery Y, zwiększanie nachylenia górnych płaszczyzn podwieszenia względem płaszczyzny pionowej zmniejszało przemieszczenia poziome rurociągu, natomiast zwiększało przemieszczenia pionowe. Ponadto, im większa jest strzałka łukowa cięgien tym mniejsze są zarówno przemieszczenia pionowe jak i poziome. Przy zwiększaniu przekroju poprzecznego cięgien stwierdzono w pierwszym przypadku, że zwiększanie pola przekroju górnych cięgien powoduje wzrost sztywności poziomej podwieszono rurociągu, z kolei zwiększanie przekroju dolnych cięgien powoduje wzrost sztywności pionowej. Analiza konfiguracji cięgien w kształcie odwróconej litery Y dała inne rezultaty. Po pierwsze nie zauważono wpływu strzałki łukowej trasy dolnych cięgien na sztywność poziomą. Zatem o sztywności pionowej podwieszono rurociągu decyduje strzałka zwisu górnego cięgna, a o sztywności poziomej decyduje nachylenie płaszczyzn podwieszenia dolnych cięgien względem płaszczyzny pionowej. Po drugie, zwiększanie pola przekroju cięgien przyniosło rezultaty odwrotne niż w przypadku konfiguracji w kształcie litery Y, co było zgodne z oczekiwaniami. Ponadto, w przypadku obu konfiguracji zauważono, że pominięcie geometrycznej nieliniowości zaniża szacowaną sztywność rurociągu.



Rys. 2.4. Przekroje poprzeczne możliwych systemów przestrzennego podwieszenia rurociągu

2.2. Badania eksperymentalne na modelach

Badania eksperymentalne wykonywane na modelach istniejących rurociągowych mostów wiszących lub mostów planowanych dotyczą najczęściej sytuacji, gdy: a) ze względu na charakter odpowiedzi i rodzaj wymuszenia badania na rzeczywistym obiekcie byłyby niemożliwe lub symulacja numeryczna odpowiedzi konstrukcji byłaby trudna do przeprowadzenia, b) porównuje się wyniki otrzymane numerycznie metodą elementów

skończonych z wynikami eksperymentu, c) wyznaczenie parametrów fizycznych konstrukcji jest możliwe tylko na drodze eksperymentalnej.

Pierwszej z wymienionych sytuacji dotyczą badania opisane w pracy [144]. Głównym celem autorów tej pracy było zaprezentowanie wyników badań eksperymentalnych przeprowadzonych na modelu wzorowanym na rzeczywistym obiekcie – rurociągowym moście wiszącym, znajdującym się na polu naftowym Changqing. Autorzy przeanalizowali wpływ trzech czynników na deformację rurociągu, tj. przepływu medium w rurociągu, obciążenia skupionego oraz uszkodzenia ciągów. Stwierdzono, że w badanym zakresie prędkość przepływu cieczy nie miała większego wpływu na przemieszczenia rurociągu. Zauważono natomiast wyraźny wzrost przemieszczeń w przypadku przyłożenia obciążenia skupionego, przy czym największe przemieszczenia zaobserwowano w miejscu obciążenia. Obciążenie równomiernie rozłożone na całej długości rurociągu spowodowało zakrzywienie profilu rurociągu z największymi przemieszczeniami w środku rozpiętości. Na koniec obserwowano deformacje rurociągu przy stopniowym odpinaniu kolejnych par wieszaków, co miało symulować zniszczenie tych ciągów. Ostatecznie okazało się, że odpięcie pięciu grup wieszaków nie spowodowało przekroczenia założonego poziomu przemieszczeń granicznych.

Autorzy kolejnej pracy [141], zwracają uwagę na niedostateczną liczbę badań eksperymentalnych dotyczących oddziaływania przejazdu urządzeń czyszczących na odpowiedź rurociągowego mostu wiszącego. Na potrzeby analiz zbudowano model mostu w skali 1:25, który był wzorowany na moście Nujiang o rozpiętości przęsła głównego 320 m. W celu dopasowania modelu sprawdzano następujące kryteria podobieństwa: geometryczne, materiałowe, statyczne, oraz dynamiczne. Do symulacji przejazdu urządzenia czyszczącego zastosowano gumową piłkę, a nieczystości zebrane podczas czyszczenia zostały potraktowane jako kolumna wody o różnej długości. Badania skupiały się na wyznaczeniu drgań rurociągu podczas przepływu cieczy z różnymi prędkościami.

W dwóch pracach poświęconych badaniom eksperymentalnym, [134] i [135], omawiany jest problem budowy modelu wiszącego mostu rurociągowego. Model ten, wzorowany na istniejącym moście o dwóch pionowych płaszczyznach podwieszenia, wykonano w skali 1:8. Równolegle opracowano trójwymiarowy model numeryczny badanego mostu w programie ANSYS. Do modelowania ciągów użyto prętów kratownicowych, natomiast do modelowania rurociągu zastosowano standardowe elementy belkowe typu Eulera-Bernoulliego. Wykonane badania eksperymentalne oraz numeryczne polegały na wyznaczeniu przyspieszeń oraz przemieszczeń w różnych punktach mostu poddanego działaniu obciążenia symulującego trzęsienie ziemi.

Jednym z niezbędnych etapów analizy aerodynamicznej mostów wiszących jest wyznaczenie krytycznej prędkości flatteru oraz współczynników oporu aerodynamicznego. Wielkości te silnie zależą od kształtu dźwigara mostu, są zatem wyznaczone indywidualnie dla każdego mostu, poprzez eksperymenty w tunelu aerodynamicznym lub numerycznie za pomocą programów CFD (ang. *Computational Fluid Dynamics*). W artykule [128] omówiono metodę budowy laboratoryjnego modelu odcinka dźwigara o długości 10 m, w skali 1:12,5, który wykorzystano do badań eksperymentalnych mających na celu wyznaczenie charakterystyk aerodynamicznych potrzebnych do przeprowadzenia analiz aerodynamicznych rurociągowego mostu wiszącego o budowie jak na rysunku Z1.10. W pracy przedstawiono zagadnienia związane z zastosowaniem teorii podobieństwa, co w praktyce wiąże się ze spełnieniem warunków podobieństwa geometrycznego, kinematycznego oraz dynamicznego.

Głównym celem badań przedstawionych w pracy [147] było wyznaczenie przemieszczeń aerostaticznych oraz przemieszczeń wynikających z oddziaływania buffetingu na rurociągowy most wiszący. Przeprowadzono badania eksperymentalne w tunelu aerodynamicznym na modelu mostu w skali 1:25. W celu spełnienia warunku podobieństwa porównano częstości własne otrzymane z programu ANSYS dla rzeczywistego rurociągowego mostu wiszącego o rozpiętości przęsła 320 m z częstościami otrzymanymi eksperymentalnie dla modelu mostu. Podkreślono skuteczność zastosowania pomiędzy sekcjami modelu sprężystych łączników w kształcie litery U, które miały za zadanie symulować sztywność giętną i skrętną dźwigara mostu.

Problem gromadzenia się lodu na elementach konstrukcyjnych wiszących mostów rurociągowych został poddany analizie w dwóch artykułach [143] oraz [146]. W pierwszej z wymienionych prac, na podstawie badań eksperymentalnych wykonanych w laboratorium na cylindrach o różnych średnicach oraz trzech modelach pomostów wykonanych w skali 1:5 i 1:6, skupiono się na zaproponowaniu geometrycznych modeli przyrostu lodu na rurociągach, ciągach głównych i wiatrowych, wieszakach oraz pomostach mostów rurociągowych. Ponadto, w tunelu aerodynamicznym zbadano wpływ kształtu wybranych modeli oblodzenia pomostów na wartości współczynników sił aerodynamicznych. Stwierdzono, że analizowane współczynniki były znacznie większe w przypadku pomostów oblodzonych niż dla pomostów bez lodu. W drugim artykule, opierając się na modelach oblodzenia zaproponowanych w pracy [143], badano odpowiedź aerodynamiczną modelu rurociągowego mostu wiszącego wykonanego w skali 1:25. Wykonane doświadczenia w tunelu aerodynamicznym były ukierunkowane na wyznaczenie formuł analitycznych określających pionowe i poziome przemieszczenia wynikające z oddziaływania wiatru na oblodzony rurociągowy most

wiszący. Uwzględniono wpływ kąta natarcia wiatru, kształtu oblodzenia, średnicy rurociągu oraz intensywności turbulencji.

Badania eksperymentalne na modelu sekcji rurociągu będącego częścią wiszącego mostu rurociągowego były także przedmiotem analiz omówionych w pracy [3]. Badania dźwigara w tunelu aerodynamicznym wykonano w celu dobrania efektywnych urządzeń zakłócających tworzenie się wirów Bernarda-Karmana.

2.3. Bazy danych

Bazy danych zawierające parametry projektowe istniejących wiszących mostów rurociągowych są skutecznym narzędziem ułatwiającym zarówno proces projektowania nowych mostów jak i utrzymania już wybudowanych. Potencjalne aplikacje informacji zawartych w takiej bazie są następujące: a) dokładne szacowanie kosztów napraw lub wymiany całej konstrukcji wiszących mostów rurociągowych, nie tylko na podstawie rozpiętości, ale również wykorzystując szczegółowe dane elementów konstrukcyjnych, b) budowa modeli numerycznych opartych na metodzie elementów skończonych, które mogą służyć do oceny wpływu obciążeń dynamicznych takich jak wiatr lub trzęsienia ziemi na niezawodność konstrukcji, c) ocena parametrów istniejących mostów na potrzeby ewentualnego wzmocnienia konstrukcji ze względu na oddziaływanie wiatru lub trzęsienia ziemi, d) wspomaganie procesu projektowania nowych mostów przez porównanie z obiektami istniejącymi, e) ekstrapolacja wyników analiz dynamicznych, zarówno numerycznych jak eksperymentalnych, wykonanych na jednym obiekcie na inne mosty.

Powyższe cele przyświecały Dusseau przy tworzeniu bazy danych, obejmującej parametry rurociągowych mostów wiszących powstałych na terenie Stanów Zjednoczonych. Przygotowanie danych do bazy oraz sam jej opis przedstawiono w dwóch artykułach: [53] i [52]. W pierwszej pracy przedstawiono w formie tabelarycznej oraz graficznej parametry projektowe czternastu wiszących mostów rurociągowych, takie jak: rozpiętość głównego przęsła, parametry fizyczne rurociągu, rozstaw wieszaków oraz parametry fizyczne cięgien (głównych, wiatrowych, diagonalnych oraz wieszaków). W drugiej pracy omówiono stworzoną przez autorów bazę danych, zawierającą informacje o kilkunastu najważniejszych mostach rurociągowych wybudowanych w Stanach Zjednoczonych. Baza zawiera 52 pola dla każdego ze skatalogowanych mostów. Autorzy planowali objęcie tą bazą wszystkich mostów rurociągowych na terenie USA.

2.4. Inspekcja i utrzymanie

Literatura dotycząca oceny stanu technicznego rurociągowych mostów wiszących skupia się przede wszystkim na zagadnieniach związanych z: a) metodami wykrywania wszelkiego rodzaju uszkodzeń konstrukcji i opisem tych uszkodzeń, b) sposobami przeciwdziałania i naprawy skutków korozji, zarówno rurociągu jak i cięgien, c) oceną możliwości instalacji dodatkowych urządzeń na istniejącym moście.

W pracy [32] przedstawiono procedurę inspekcji wiszącego mostu rurociągowego nad rzeką Tanana na Alasce. Ze względu na trudności związane z położeniem mostu (znaczna część mostu znajduje się nad rzeką), zaproponowano cztery różne sposoby inspekcji w zależności od dostępności. Pierwszym było użycie drabiny do badania stanu zakotwień oraz odcinków cięgien wiatrowych, które były dostępne z brzegu. Drugim sposobem inspekcji była instalacja ruchomego rusztowania wzdłuż rurociągu, które posłużyło do oceny rurociągu oraz połączeń cięgien z konstrukcją wsporczą, na której spoczywał rurociąg. Do pylonów mostu oraz odcinków cięgien głównych i wiatrowych położonych w pewnej odległości od brzegu, uzyskano dostęp przy użyciu wysokich dźwigów z zainstalowanym koszem dla dwóch pracowników. Ostatnim sposobem inspekcji pozostałej części mostu znajdującej się nad rzeką było zastosowanie ruchomej platformy wiszącej na połączonych linach dwóch dźwigów, które zostały zakotwione na przeciwnych brzegach.

Autorzy artykułu [92] opisują metodę oceny stanu technicznego dwóch istniejących wiszących mostów rurociągowych na Alasce – nad rzeką Tazlina oraz Tanana. Zwrócono uwagę na fakt, iż konwencjonalne metody inspekcji opierające się na metodach wizualnych są w stanie wykryć tylko widoczne ślady zużycia, które zazwyczaj są już tak zaawansowane, że wymagają natychmiastowej naprawy. Pomiar sił w cięgnach, a co za tym idzie oszacowanie na tej podstawie naprężeń w rurociągu i innych elementach konstrukcyjnych, umożliwiłoby wczesne wykrycie takich uszkodzeń, jednak takie pomiary nie zawsze są możliwe. Dlatego, do oszacowania sił w cięgnach zaproponowano użycie technik laserowych, które mają tę przewagę, że mogą być wykonywane bez wchodzenia na most oraz dają możliwość pomiaru w punktach znacznie oddalonych od stanowiska pomiarowego.

W kilku publikacjach zwrócono uwagę na problem korozji elementów konstrukcyjnych badanych mostów. W pracy [1] przeanalizowano wpływ korozji ścianki rurociągu na stan wyężenia rurociągowego mostu wiszącego nad kanałem Cal Sag w USA. W tym celu zbudowano numeryczny model tego mostu w programie ABAQUS, uwzględniający różne grubości ścianki rurociągu, zgodne z pomiarami skorodowanych

odcinków na rzeczywistym obiekcie. Następnie wyznaczono naprężenia w rurociągu obciążonym siłami grawitacji, ciśnieniem wewnętrznym oraz wiatrem. W wyniku badań okazało się, że w niektórych miejscach rurociągu w wyniku korozji następuje znaczne przekroczenie naprężeń dopuszczalnych. Na podstawie tych analiz sporządzono zalecenia dotyczące naprawy rurociągu.

W artykule [113] uwagę skupiono na korozji cięgien w rurociągowych mostach wiszących. Przedstawiono metodologię prac ekspertyzowych oraz tok postępowania w analizie statyczno-wytrzymałościowej konstrukcji cięgowych metodą stanów granicznych. Artykuł zawiera także dyskusję nad rodzajami zabezpieczeń antykorozyjnych lin konstrukcji cięgowych oraz opisuje sporządzone zabezpieczenia mostów rurociągowych we Wrocławiu i Brzegu Dolnym.

Korozja cięgien jest także przedmiotem rozważań autorów artykułu [13]. Przedstawiono w nim wyniki inspekcji dwóch wiszących mostów rurociągowych nad rzekami Brazos oraz Colorado. Stwierdzono znaczącą korozję cięgien głównych w okolicach siodła na pylonach, powodującą zmniejszenie siły zrywającej cięgien o 25% w przypadku mostu nad rzeką Brazos oraz o 30% w przypadku mostu nad rzeką Colorado. Następnie zaproponowano kilka wariantów metod rehabilitacji, m.in.: wzmocnienie cięgna poprzez splecenie z nowym cięgnem na długości zniszczonego odcinka, wprowadzenie dodatkowego cięgna głównego wzdłuż osi rurociągu, dodanie dodatkowych cięgien obok istniejących oraz wymiana cięgien. Najbardziej ekonomicznym rozwiązaniem z punktu widzenia kryteriów projektowych, które zakładały eksploatację mostu przez następne 50 lat, okazała się całkowita wymiana cięgien. Symulację każdego etapu wymiany cięgien sporządzono w programie metody elementów skończonych LARSA. Omówiono także problemy związane z redystrybucją sił przy procesie wymianie cięgien.

Opis przebudowy konstrukcji nośnej rurociągowego mostu wiszącego nad Wartą w Poznaniu przedstawiono w artykule [124]. Koncepcja naprawy mostu obejmowała wymianę lin nośnych na nowe, z ich zakotwieniem w istniejących blokach oporowych, lecz bez wcześniejszego demontażu lin dotychczasowych, aby uniknąć stosowania podpór dodatkowych na czas robót.

2.5. Przepływ medium w rurociągu

Istotnym punktem podczas projektowania mostów rurociągowych jest uwzględnienie wpływu transportowanego medium na statykę oraz dynamikę mostu. Oprócz podstawowych obciążeń takich jak ciężar własny, temperatura oraz ciśnienie medium należy wziąć pod

uwagę efekty dynamiczne wynikające z przepływu medium wewnątrz rurociągu z określoną prędkością. Ponadto czynności takie jak: napełnianie/oprózniczenie rurociągu oraz przejazd tzw. świnki – pigging (ang. *pigging*), czyli urządzenia służącego do różnych prac konserwacyjnych (na przykład inspekcji lub czyszczenia rurociągu) mogą doprowadzić do bardzo niekorzystnego układu obciążeń, prowadzącego do przekroczenia założonego poziomu naprężeń lub przemieszczeń, a w skrajnych przypadkach nawet do katastrofy mostu.

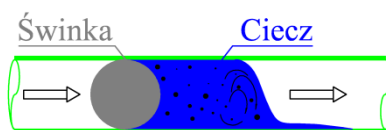
Problem drgań rurociągów wzbudzanych przepływem cieczy jest tematem wielu książek i artykułów. Jedną z najważniejszych monografii dotyczących tego zagadnienia jest książka Païdoussis'a [101]. Warto także wspomnieć o bardzo obszernym artykule tego samego autora [102] z 2008 roku, prezentującym obecny stan wiedzy. Należy tu podkreślić, że już rozwiązanie równań ruchu samej cieczy jest zagadnieniem trudnym. Równania ruchu płynu Newtonowskiego wynikają z równań ciągłości (zachowania masy) oraz równań Naviera-Stokesa (zachowania pędu). Te równania wraz z warunkami brzegowymi (zawierającymi informacje na przykład o ruchu rurociągu) stanowią podstawę do rozwiązania większości zagadnień związanych z przepływem cieczy. Równania w większości przypadków są nieliniowe, a rozwiązanie uproszczonych równań liniowych nie jest trywialne i ograniczone do przypadków szczególnych. Przez rozwiązanie równań ruchu cieczy rozumie się wyznaczenie pola prędkości oraz ciśnienia. W przypadku zagadnień interakcji cieczy-konstrukcja, gdzie głównym celem jest znalezienie sił działających na konstrukcję, wyznacza się tensor naprężenia wynikający z lepkości oraz ciśnienia cieczy. Tego typu rozwiązania są znane w literaturze, ale dotyczą tylko rurociągów podpartych na obu końcach lub wspornikowych, z różnymi modyfikacjami polegającymi na dodaniu więzi sprężystych, mas skupionych lub tłumików wiskotycznych [102]. Według wiedzy autora niniejszej rozprawy, nie ma w literaturze prac, w których to podejście byłoby stosowane do analizy drgań rurociągu stanowiącego część rurociągowego mostu wiszącego.

W przypadku analizy drgań mostów komunikacyjnych z podwieszonymi rurociągami, proponuje się korzystanie z uproszczonych modeli przepływu medium wewnątrz rurociągu, w których pomija się interakcję między przepływającym płynem i rurociągiem. Na przykład w artykule [145], gdzie analizowany jest kolejowy most wiszący z zamocowanym do niego rurociągiem, a obciążenie przepływającą cieczą jest modelowane ruchomą, równomiernie rozłożoną masą balastową. Warto tu przypomnieć, że podobne obciążenie ruchome rozpatrywali m.in. Langer [83] i Fryba [59] analizując drgania belki swobodnie podpartej spowodowanej najazdem półnieskończonego odcinka rozłożonej masy balastowej. W zamierzeniu autorów, obciążenie równomiernie rozłożoną, ruchomą masą miało służyć

przede wszystkim do idealizacji przejazdu długiego pociągu przez most. Można je wykorzystać również do modelowania przepływu cieczy przez rurociąg, przy założeniach, że transportowane medium jest idealne, pomija się ciśnienie, przyjmuje stałą gęstość, a rozkład prędkości jest stały w przekroju rurociągu. Pomysł ten zastosowano we wcześniej wspomnianej pracy [145]. Model pociągu założono w postaci serii jednakowych sił skupionych rozstawionych w równych odstępach. Przyjęto płaski model jednoprzęsłowego mostu wiszącego o klasycznej budowie, w którym swobodnie podparta belka w postaci rurociągu sztywno połączonego z dźwigarem jest podwieszona za pomocą wieszaków do pary cięgien głównych. Założono, że wieszaki są gęsto rozstawione i nieodkształcalne, pylony potraktowano jako sztywne podpory, a odciaży pominięto w obliczeniach. Naciąg wstępny cięgien głównych dobrano tak, aby ciężar dźwigara oraz pustego rurociągu był w całości przenoszony przez cięgna główne. Następnie, zakładając duże przemieszczenia sformułowano nieliniowe całkowo-różniczkowe równanie ruchu podwieszanej belki obciążonej ruchem pociągów oraz przepływającej masy. Równanie to rozwiązano za pomocą metody Galerkina, przyjmując aproksymację stanu przemieszczenia belki funkcjami trygonometrycznymi. Otrzymane w ten sposób nieliniowe równanie ruchu zapisane w bazie współrzędnych uogólnionych rozwiązano zaproponowaną w pracy procedurą przyrostowo-iteracyjną. Obserwowano przebiegi pionowych przyspieszeń w 1/4 oraz w 1/2 rozpiętości mostu, spowodowanych przejazdem pociągu z prędkością krytyczną powodującą rezonans konstrukcji, przy założeniu różnych wariantów przepływu wody transportowanej przez rurociąg (najazd pociągu, gdy rurociąg jest pusty, jednoczesny napływ cieczy z różnymi prędkościami i najazd pociągu, najazd pociągu z różnymi prędkościami przy rurociągu wypełnionym ruchomą cieczą). W wyniku badań stwierdzono, że przy prędkościach cieczy mniejszych od prędkości powodujących rezonans efekty wynikające z ruchu napływającej masy zmniejszają maksymalne przyspieszenia wynikające z przejazdu pociągu z prędkością krytyczną. Stwierdzono, że napływ cieczy z bardzo dużą prędkością (większą niż 28 m/s), bez równoczesnego obciążenia przejazdem pociągu, powoduje efekt podobny do przyłożenia obciążenia impulsowego. Ponadto, pionowe przyspieszenia belki spowodowane przejazdem pociągu były znacznie mniejsze, gdy ciecz w całości wypełniała rurociąg, w porównaniu z przyspieszeniami zaobserwowanymi podczas jednoczesnego napływu cieczy. Dodatkowo podkreślono, że maksymalne przyspieszenia rosną wraz ze wzrostem prędkości cieczy.

Opierając się na wyprowadzonym w publikacji [145] równaniu drgań podwieszanej belki, poddanej jednoczesnemu działaniu płynącej cieczy oraz przejazdowi pociągu, autorzy pracy [60] analizowali różne warianty przejazdu świnki czyszczącej rurociąg. Biorąc pod

uwagę fakt, że podczas czyszczenia rurociągu przed świnką zbiera się woda oraz inne zanieczyszczenia (rys. 2.5), które mogą w znaczący sposób zagrozić bezpieczeństwu użytkowania konstrukcji, przeprowadzono analizy mające na celu ustalenie niebezpiecznych dla konstrukcji prędkości poruszania się świnki oraz długości kolumny cieczy przed świnką. Modyfikacje modelu przedstawionego w [145] były następujące: belkę stanowi pojedynczy rurociąg, świnkę oraz ciecz przed świnką potraktowano jako ciąg sił skupionych rozstawionych w równych odstępach, a składnik wynikający z najazdu ciągłej masy pominięto w równaniu ruchu. Na podstawie badań numerycznych stwierdzono, że im wyższa prędkość świnki, tym większe przyspieszenia pionowych przemieszczeń belki, a w badanym zakresie prędkości poruszania się świnki (0,5-5,0 m/s) zaobserwowano lokalny wzrost przyspieszeń przy prędkościach 2 m/s oraz 4 m/s. Oprócz tego, przy badaniu przejazdu świnki wzdłuż pustego rurociągu odnotowano znacznie większe przyspieszenia, niż podczas przejazdu świnki wzdłuż rurociągu napełnionego nieruchomą cieczą. Ponadto zauważono, że im dłuższa jest kolumna wody przed świnką, tym mniejsze są efekty wynikające z najazdu świnki na most.



Rys. 2.5. Czyszczenie rurociągu świnką

Problem przejazdu świnki przez rurociągowy most wiszący był także przedmiotem badań opisanych w artykule [136]. Na potrzeby analizy przepływu świnki przez rurociąg stworzono trójwymiarowy model wiszącego mostu rurociągowego w programie ABAQUS. Model mostu składał się z dwóch ciągłych głównych oraz dwóch wiatrowych wraz z wieszakami, kratownicowego pomostu oraz rurociągu leżącego na pomoście. W analizie pominięto pylony, a w miejscu połączenia pylonów z ciągłymi zastosowano odpowiednie podpory – przesuwne w kierunku osi mostu, nieprzesuwne w pozostałych kierunkach. Do budowy modelu rurociągu oraz świnki zastosowano elementy prostopadłościenne. Analizowano przejazd świnki z zadaną prędkością wewnątrz rurociągu, przy założeniu tarcia między świnką i rurociągiem oraz z uwzględnieniem nacisku świnki na ścianki rurociągu. Siła nacisku (sprężystości) wynika ze ściskania elastycznej piankowej świnki, które z kolei jest następstwem różnicy ciśnień przed i za świnką. Siła tarcia jest efektem siły grawitacji oraz oddziaływania świnki na rurociąg podczas piggingu. Wyznaczono przyspieszenia pionowych

i poziomych (wzdłużnych i poprzecznych) drgań rurociągu, spowodowanych przejazdem świnki. Maksymalne przyspieszenia wypadkowe wynosiły 2,2g.

Przedstawiony w pracy [141] model rurociągowego mostu wiszącego w skali 1:25 był podstawą badań eksperymentalnych, ukierunkowanych na analizę drgań mostu podczas czyszczenia rurociągu przy użyciu gumowej świnki. Świnka, której prędkość regulowano w zakresie najczęściej spotykanym w rzeczywistych warunkach (3-5 m/s), miała za zadanie przepchać przez rurociąg kolumnę wody o trzech różnych objętościach (30/60/100% objętości rurociągu). W obserwowanych punktach (1/4, 1/2, 3/4 rozpiętości mostu) mierzono przemieszczenie pionowe oraz przyspieszenie pionowych drgań rurociągu. Stwierdzono, że przemieszczenia pionowe osiągają największą wartość w momencie, gdy czoło cieczy znajduje się w pobliżu analizowanego punktu, przy czym największa wartość przemieszczeń była obserwowana w połowie rozpiętości. Zaobserwowano także, że amplitudy drgań pionowych są bardzo małe w porównaniu do przemieszczeń wywołanych przez ciężar świnki oraz cieczy. Podkreślono znaczący wzrost przemieszczeń wraz ze wzrostem prędkości świnki oraz objętości kolumny cieczy. W kolejnym etapie prac, na podstawie wyników badań eksperymentalnych, podjęto próbę analitycznego opisanie osi odkształconej rurociągu za pomocą krzywej Gaussa, której parametry uzależniono od objętości kolumny cieczy, pola przekroju rurociągu, oraz prędkości świnki.

W pracy [142] przedstawiono aktualny stan wiedzy wraz z wyczerpującym przeglądem literatury na temat problemów związanych z dynamiką rurociągowych mostów wiszących, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnienia przejazdu świnki wewnątrz rurociągu. Zwrócono uwagę na niedostatki w trzech obszarach. Po pierwsze, eksperymenty przeprowadzane na modelach wiszących mostów rurociągowych mają zazwyczaj bardzo ograniczony zakres, ze względu na duże koszty budowy modeli oraz złożoność badanych zjawisk. Równocześnie, bardzo rzadkie są badania konstrukcji pełnowymiarowych, obejmujące realne warunki obciążenia podczas piggingu. Badania eksperymentalne nie są zatem wystarczające dla pełnego zrozumienia procesu przejazdu świnki przez rurociąg, dlatego powinny być uzupełnione odpowiednimi symulacjami numerycznymi. Po drugie, w literaturze istnieje wiele prac prezentujących wyniki symulacji numerycznych samego procesu piggingu i obciążenia wynikającego z ruchu świnki, ale w większości z nich są stosowane modele obliczeniowe odnoszące się do rurociągów podziemnych, gdzie podłoże uniemożliwia osiągnięcie dużych przemieszczeń i w znaczącym stopniu tłumi drgania, lub do krótkich rurociągów sztywno zamocowanych na brzegach. Z powodu wymienionych ograniczeń, nie można zastosować wniosków z tych badań bezpośrednio do rurociągowych

mostów wiszących, ponieważ duże przemieszczenia statyczne i drgania tych konstrukcji w znaczący sposób wpływają na obciążenia wynikające z przejazdu świnki. Po trzecie, w literaturze można znaleźć wyniki symulacji odpowiedzi dynamicznych rurociągowych mostów wiszących na przejazd świnki poprzedzonej kolumną przesuwającą się cieczy, ale w większości przypadków obciążenie wynikające z ruchu świnki jest modelowane siłą skupioną o stałej wartości, poruszającą się ze stałą prędkością, pomija się zatem wpływ drgań rurociągu na ruch świnki. Dodatkowo, kolumna cieczy przed świnką, modelowana także siłami skupionymi, ma stałą długość, która nie zmienia się przez cały proces piggingu, co jest sprzeczne z fizyką zjawiska. Takie modelowanie zupełnie pomija sprzężenie pomiędzy cieczą i rurociągiem, a stąd ewentualne wzmocnienie drgań lub rezonans wynikający z tego sprzężenia nie mogą być uchwycone w takich badaniach.

W artykule [34] podjęto problem stateczności rurociągowych mostów wiszących podczas napływu cieczy do rurociągu. Analizowano statyczne zagadnienie stateczności dwóch wieloprzęsłowych mostów wiszących (trójprzęsłowy i czteroprzęsłowy) z dodatkowymi cięgnami górnymi (rys. Z1.7). Inspiracją do przedstawionej analizy były katastrofy podobnych mostów, do których doszło w trakcie procesu napełniania rurociągu. Aby rurociąg był w całości wypełniony cieczą stosuje się podczas napełniania specjalny rodzaj świnek, które pchane przez ciecz jednocześnie wypychają powietrze z rurociągu. Taka sytuacja powoduje bardzo niekorzystny, nierównomierny układ obciążeń, który może doprowadzić do utraty stateczności mostu. Stosując metodę elementów skończonych sformułowano geometrycznie nieliniowy płaski model mostu, w którym: pominięto sztywność giętną rurociągu ze względu na bardzo niewielki wpływ na sztywność całego mostu, pylony potraktowano jako pojedynczy pręt kratownicowy, a cięgna główne jako układ kilku prętów kratownicowych połączonych w miejscach, gdzie założono wieszaki. Rozstaw wieszaków przyjęto znacznie rzadszy niż w rzeczywistości, natomiast uwzględniono ich odkształcalność przyjmując, że każdy wieszak jest reprezentowany przez jeden pręt kratownicowy. Cięgna górne oraz odciągi także zamodelowano za pomocą kilku połączonych prętów kratownicowych, natomiast masy poszczególnych elementów konstrukcyjnych zgranulowano w węzłach modelu. Pierwszym etapem analizy było wyznaczenie stanu równowagi konstrukcji pod wpływem ciężaru własnego. W celu rozwiązania tego zagadnienia zastosowano procedurę przyrostowo-iteracyjną. Pylony oprócz ciężaru własnego obciążono dodatkową pionową siłą skupioną. Siła ta wynika z zastosowania odciągów łączących szczyt pylonu z ramionami wiatrowymi, które wspierają cięgna wiatrowe. Okazało się, że warunki równowagi statycznej w stanie obciążenia ciężarem własnym nie są spełnione w obu

rozważanych modelach mostu (trójprzęsłowym i czteroprzęsłowym). Obserwacja ścieżki równowagi statycznej jednego z pylonów wykazała osiągnięcie punktu bifurkacyjnego. W celu przejścia przez punkt krytyczny zastosowano tymczasowe dodatkowe podpory poziome na szczycie pylonu, a następnie podczas zwiększania obciążenia obserwowano wartość reakcji podpór. Po przejściu przez punkt bifurkacyjny, czyli kiedy reakcja zmalała do zera, zwolniono podporę otrzymując stan równowagi mostu. Drugim etapem analizy była obserwacja ścieżki równowagi obu pylonów w sytuacji napełniania rurociągu cieczą. Najazd kolumny cieczy na most wyrażono poprzez odpowiednie zwiększanie obciążenia ciężna głównego w punktach połączenia z wieszakami. Zaobserwowano, że most trójprzęsłowy osiągnął punkt krytyczny, gdy czoło cieczy znajdowało się w połowie pierwszego przęsła. W przypadku mostu czteroprzęsłowego nie doszło do wyboczenia podczas całego procesu przepływu cieczy. We wnioskach zwrócono uwagę na dużą zależność siły naciągu ciężien górnych od poziomych przemieszczeń szczytu pylonu.

2.6. Zagadnienie własne

Rozwiązanie zagadnienia własnego jest zazwyczaj tylko jednym z pierwszych etapów analiz dynamicznych wiszących mostów rurociągowych. Wyznaczone częstości i formy własne, jako podstawowe parametry dynamiczne układu służą najczęściej do: a) ograniczenia liczby dynamicznych stopni swobody poprzez aproksymację stanu przemieszczenia konstrukcji określoną liczbą funkcji własnych, b) weryfikacji modelu numerycznego konstrukcji przez porównanie obliczonych częstości i form własnych z wyznaczonymi eksperymentalnie, c) badania możliwości wystąpienia niekorzystnych efektów spowodowanych zjawiskami aerodynamicznymi, takimi jak flatter lub wzbudzenie wirowe, d) oceny podatności konstrukcji na trzęsienia ziemi.

W pracy [82] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia własnego dotyczące hipotetycznego, rurociągowego mostu wiszącego. Model mostu składał się z czterech nachylonych płaszczyzn podwieszenia oraz jednoprzewodowego rurociągu. Na podstawie warunków równowagi sił w bieżącej konfiguracji obiektu wyprowadzono równania ruchu z uwzględnieniem efektów drugiego rzędu. Następnie, przy wykorzystaniu bilansu energetycznego sformułowano macierzowe równanie zagadnienie własnego. Na podstawie wyników w postaci form i częstości własnych stwierdzono, że pominięcie efektów drugiego rzędu prowadzi do wyników z niedomiarem, zatem rzeczywista sztywność konstrukcji jest większa od sztywności określonej w ramach zasady zeszywnienia.

W kilku pracach ([46], [47], [48], [50], [51]) autorstwa Dusseau i jego współpracowników można znaleźć wyniki rozwiązania zagadnienia własnego czterech różnych mostów. Przeprowadzono analizy dwóch „nowoczesnych” wiszących mostów ruropięgowych: Patterson Loop Aerial Crossing o rozpiętości 259 m i Avalon Extension Aerial Crossing o rozpiętości 307 m (oba mosty nad jeziorem Wax Lake Outlet w pobliżu Patterson w Louisianie) oraz dwóch „klasycznych” wiszących mostów ruropięgowych: Missouri River Pipeline Bridge w Plattsmouth w Nebrasce, o rozpiętości przęsła głównego 457 m i Mississippi River Pipeline Bridge w Grand Tower w stanie Illinois, o rozpiętości ponad 655 m. Rozróżnienie systemów konstrukcyjnych na „nowoczesne” i „klasyczne” jest opisane w Załączniku 1. Analizę zagadnienia własnego przeprowadzono w programie metody elementów skończonych ANSYS, według następującej procedury: budowa modelu numerycznego mostu bez uwzględnienia ciężaru własnego, obciążenie modelu ciężarem własnym, aktualizacja macierzy sztywności uwzględniająca zmianę geometrii konstrukcji pod wpływem obciążeń stałych oraz statycznych sił napinających cięgna, rozwiązanie zagadnienia własnego dla zaktualizowanej macierzy sztywności. Cięgna modelowano stosując elementy kratownicowe, natomiast ruropięga przy użyciu elementów belkowych. W obu „klasycznych” mostach nie uwzględniono w modelu kratownicowych pylonów, ponieważ duża różnica między sztywnością pylonów i cięgien prowadziła do niestabilnej struktury macierzy sztywności. W miejscach, gdzie cięgna główne i wiatrowe są mocowane do pylonów zastosowano odpowiednie podpory: przesuwne w kierunku podłużnym ze względu na stosunkowo małą sztywność pylonów przy zginaniu w płaszczyźnie pionowej – podłużnej, nieprzesuwne w dwóch pozostałych kierunkach, tj. pionowym i poprzecznym, z uwagi na dużą sztywność pylonów. Pomimo dużej sztywności pylonów skrzynkowych w kształcie odwróconej litery Y, modele mostów „nowoczesnych” nie wymagały modyfikacji w postaci usunięcia pylonów, ponieważ macierz sztywności okazała się stabilna. W celu zmniejszenia liczby dynamicznych stopni swobody zgranulowano masy elementów w wybranych węzłach na długości ruropięgu oraz cięgien głównych/wiatrowych. Wyniki rozwiązania zagadnienia własnego analizowanych mostów były wykorzystywane w dalszej części wymienionych artykułów do analiz dynamicznej reakcji mostów na działanie aerodynamicznego wzbudzenia wirowego oraz wzbudzenia sejsmicznego.

Rozwiązanie zagadnienia własnego przedstawione w pracy [128] było pierwszym etapem analizy aerodynamicznej wiszącego mostu ruropięgowego o budowie analogicznej jak na rysunku Z1.10 i rozpiętości przęsła głównego 100 m. W celu określenia poszukiwanych częstości własnych zbudowano trójwymiarowy model mostu w programie metody elementów

skończonych SAP IV. Do modelowania rurociągu, trójkątnych ramek stabilizujących oraz pylonów zastosowano elementy belkowe, natomiast cięgna modelowano używając prętów kratownicowych. Otrzymane numerycznie częstości własne porównano z wynikami uzyskanymi z pomiarów na rzeczywistym obiekcie. Aby wyznaczyć częstości własne na podstawie pomiarów, wzbudzano drgania zainstalowanymi na moście pulsacyjnymi silnikami rakietowymi. Ze względu na ukształtowanie dźwigara mostu możliwe było tylko wymuszenie drgań w płaszczyźnie pionowej. Poprzez odpowiednie usytuowanie silników udało się wzbudzić drgania według pierwszej i drugiej formy własnej. Różnica między częstościami otrzymanymi eksperymentalnie i wyznaczonymi numerycznie okazała się mniejsza od 3%, co zdaniem autorów było wystarczające, aby sformułowany model obiektu uznać za poprawny i przydatny do dalszych analiz planowanych przez autorów.

W pracy [68] zaproponowano metodę badania odpowiedzi mostu na turbulентne oddziaływanie wiatru, gdzie jednym z ważnych etapów była analiza zagadnienia własnego. W celu przeprowadzenia analiz według zaproponowanej metody, opracowano w programie ANSYS numeryczny model przykładowego rurociągowego mostu wiszącego o rozpiętości głównego przęsła 270 m. Konstrukcja tego mostu jest analogiczna jak obiektu przedstawionego na rysunku Z1.5. Most składał się z ułożonych blisko siebie dwóch cięgien głównych tworzących wraz z wieszakami pionowe płaszczyzny podwieszenia, dwóch cięgien wiatrowych ułożonych wraz z wieszakami w płaszczyźnie poziomej, dwóch pylonów o budowie kratowej oraz rurociągu. Do obliczeń zastosowano procedurę podobną do zaproponowanej we wspomnianych wcześniej pracach Dusseau, tzn. w pierwszej kolejności wykonano wstępne obliczenia statyczne mostu obciążonego tylko ciężarem własnym, a następnie zmodyfikowano naciągi wstępne cięgien tak, aby rurociąg nie był zginany. Po rozwiązaniu zagadnienia własnego stwierdzono, że kilkanaście pierwszych częstości było położonych w widmie własnym bardzo blisko siebie, a podstawowa częstość własna wynosiła 0,19 Hz. W przypadku pierwszych sześciu częstości dominował ruch w płaszczyźnie poziomej lub pionowej, forma skrętna pojawiła się jako siódma, natomiast dwie następne to lokalne formy drgań cięgien. Wynika z tego, że w przypadku rurociągowych mostów wiszących takiego typu, jak most analizowany w pracy [68], sztywność skrętna jest większa niż sztywność w kierunku poziomym i pionowym.

2.7. Trzęsienia ziemi

Mosty rurociągowy znajdujące się w strefach wzmożonej aktywności sejsmicznej powinny być zaprojektowane tak, aby w przypadku wystąpienia trzęsienia ziemi maksymalnie

naprężenia w poszczególnych elementach konstrukcyjnych nie osiągnęły wartości naprężeń dopuszczalnych. Najbardziej krytycznym elementem jest oczywiście podwieszony rurociąg. Nałożenie się naprężeń wynikających z ciężaru własnego, ciśnienia wewnętrznego oraz obciążenia sejsmicznego, które często charakteryzuje się zmianami kierunków działania, może doprowadzić do przerwania rurociągu. Jeżeli rurociągiem transportowany jest gaz lub inna substancja łatwopalna, takie zniszczenie może z kolei spowodować wybuch lub pożar powodujący znacznie większe szkody niż katastrofa samego mostu. Dlatego niezbędnym elementem każdej analizy sejsmicznej jest wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń oraz naprężeń w najbardziej narażonych elementach konstrukcyjnych mostu.

Tego typu analizę drgań wiszącego mostu rurociągowego o „klasycznym” systemie konstrukcyjnym, zaprezentowano w artykule [148]. W celu budowy przestrzennego, numerycznego modelu mostu zastosowano procedurę metody elementów skończonych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej ciągnowych elementów konstrukcyjnych. Do modelowania ciągów głównych/wiatrowych, odciągów oraz wieszaków zastosowano w tej pracy elementy prętowe, dla których przy definiowaniu macierzy sztywności wprowadza się dodatkową macierz geometryczną wynikającą z dużych przemieszczeń. Do modelowania rurociągu wykorzystano standardowe elementy belkowe, natomiast do modelowania pylonów użyto nieliniowych elementów kratownicowych. Następnie przeprowadzono procedurę obciążania modelu mostu ciężarem własnym w celu wyznaczenia statycznie zrównoważonego stanu odniesienia. W kolejnym etapie obliczeń wprowadzono za pomocą funkcji krokowych 15-sekundowy przebieg trzęsienia ziemi El Centro. Rozwiązanie przeprowadzono dla dwóch modeli: modelu liniowego, którego stan przemieszczenia jest aproksymowany przez osiem pierwszych form własnych oraz pełnego modelu nieliniowego, dla którego równanie ruchu rozwiązano przy użyciu metody stałego przyspieszenia z iteracją w każdym kroku numerycznego całkowania równań. Założono tłumienie równe 2% tłumienia krytycznego. W wyniku obliczeń stwierdzono, że przemieszczenia poziome – podłużne i poprzeczne otrzymane z obu modeli są do siebie zbliżone, natomiast przemieszczenia pionowe wyznaczone z użyciem modelu nieliniowego są prawie dwukrotnie większe od tych obliczonych dla modelu liniowego. Oznacza to, że zastosowanie teorii liniowej jest nieodpowiednie w przypadku konstrukcji ciągnowych wykazujących dużą nieliniowość geometryczną, takich jak wiszące mosty rurociągowo.

W pracach [134] i [135] przedstawiono eksperymentalny model wiszącego mostu rurociągowego, który posłużył do analizy drgań mostu spowodowanych ruchem podpór wymuszonym trzęsieniem ziemi El Centro. Model mostu, wzorowany na istniejącym moście

o dwóch pionowych płaszczyznach podwieszenia wykonano w skali 1:8. Otrzymane wyniki z eksperymentu porównano z wynikami uzyskanymi numerycznie za pomocą programu ANSYS. W pierwszej z wymienionych prac analizowano różne warianty uszkodzeń mostu (poprzez odpinanie wieszaków) oraz ich wpływ na odpowiedź konstrukcji. W drugim artykule skupiono uwagę na wyznaczeniu maksymalnych przyspieszeń mierzonych w różnych punktach na długości mostu. Największe przyspieszenia zaobserwowano w przypadku drgań wierzchołka pylonu oraz całego rurociągu, zachodzących w kierunku podłużnym.

Wyniki analiz sejsmicznych przedstawiono także w trzech artykułach autorstwa Dusseau ([48], [50], [51]), dotyczących dwóch „nowoczesnych” wiszących mostów rurociągowych: Patterson Loop Aerial Crossing i Avalon Extension Aerial Crossing, oraz dwóch mostów „klasycznych”: Missouri River Pipeline Bridge w Plattsmouth, Nebraska i Mississippi River Pipeline Bridge w Grand Tower, Illinois. Modele obliczeniowe wspomnianych mostów stworzono w programie ANSYS według procedury opisanej w punkcie 2.6, przy czym ze względu na czasochłonność analiz sejsmicznych ograniczono liczbę stopni swobody modeli mostów „klasycznych”, wykorzystując ich symetrię. W pierwszych dwóch pracach autorzy przedstawili wyniki analizy spektralnej drgań wspomnianych mostów. Do obliczeń przyjęto projektowe widma trzęsienia ziemi zalecane w USA przez NRC (ang. *Nuclear Regulatory Commission*) dotyczące poziomych i pionowych przyspieszeń gruntu, przy założeniu tłumienia krytycznego na poziomie 0,5%. Widmo poziomych przyspieszeń zastosowano do obciążenia kinematycznego mostów w trzech kierunkach poziomych: wzdłuż, prostopadle oraz pod kątem 45° do osi rurociągu, z równoczesnym uwzględnieniem wymuszenia sejsmicznego w kierunku pionowym i zastosowaniem projektowego widma pionowych przyspieszeń gruntu. Dla każdego elementu konstrukcyjnego wyznaczono stosunek naprężeń maksymalnych do naprężeń powodujących uplastycznienie materiału oraz maksymalne przemieszczenia rurociągu. Stwierdzono, że w przypadku trzęsienia ziemi o maksymalnym przyspieszeniu gruntu równym $0,5g$ najbardziej narażonymi elementami konstrukcyjnymi obu mostów „klasycznych” są końce podwieszzonego rurociągu (tj. miejsca w których rurociąg jest załamany w celu zejścia do poziomu gruntu), przy czym dotyczy to sytuacji, gdy obciążenie działa wzdłuż osi rurociągu. Natomiast w przypadku badanych mostów „nowoczesnych”, krytycznymi elementami okazały się skrzynkowe pylony, także w sytuacji obciążenia działającego wzdłuż osi rurociągu. Ze względu na fakt, iż mosty o budowie „nowoczesnej” (Patterson Loop Aerial Crossing i Avalon Extension Aerial Crossing) leżą w strefie o niskim zagrożeniu

sejsmicznym (maksymalne przyspieszenia poniżej 0,09g) nie zalecono żadnych dodatkowych działań. Jednak w przypadku mostów Missouri River Pipeline Bridge i Mississippi River Pipeline Bridge, które znajdują się w strefach o wysokim zagrożeniu sejsmicznym (maksymalne przyspieszenia 0,5g) przeprowadzono dokładniejsze analizy, których wyniki przedstawiono w trzeciej pracy, czyli w artykule [51]. Przedmiotem obszernych analiz w tej pracy były przebiegi czasowe odpowiedzi mostów poddanych obciążeniu trzęsieniem ziemi El Centro z 1940 roku oraz San Fernando z 1971 roku. W obu przypadkach wzięto pod uwagę dwa zapisy czasowe w dwóch prostopadłych kierunkach. Otrzymane w ten sposób cztery różne warianty ruchu gruntu zastosowano do obu podpór mostów w kierunku osi rurociągu, z trzema różnymi opóźnieniami czasowymi: 0 s/km (obciążenie symultaniczne), 0,5 s/km oraz 1,0 s/km (obciążenie przesunięte w czasie). Do obliczeń przyjęto tłumienie równe 0,5% tłumienia krytycznego. Wyniki badań przebiegów czasowych odpowiedzi dwóch mostów na różne warianty obciążeń sejsmicznych potwierdziły wcześniejsze rezultaty, tj. w przypadku wystąpienia rozpatrywanych trzęsień ziemi, naprężenia na końcach podwieszzonego rurociągu przekroczyłyby naprężenia powodujące uplastycznienie materiału. Gdyby doszło do trzęsienia ziemi o dwukrotnie większej intensywności niż analizowane w powyższej pracy, uszkodzeniu uległyby także cięgna wiatrowe, jednakże ich zerwanie nie spowodowałoby katastrofy mostu tylko zmniejszyłoby ogólną sztywność w kierunku poprzecznym do osi rurociągu. Na podstawie powyższych wniosków autorzy artykułu zaproponowali zamontowanie urządzeń mających na celu ograniczenie przemieszczeń podłużnych rurociągu. Według autorów, takie urządzenia należałoby zamontować na końcach rurociągu lub na pylonach, przy czym powinny one uaktywniać się tylko w przypadku znacznego trzęsienia ziemi tak, aby pozostawić swobodę odkształceń podłużnych spowodowanych temperaturą oraz ciśnieniem wewnątrz rurociągu.

Temat wzbudzania sejsmicznego rurociągowych mostów wiszących podjęto też w artykule [151]. Przedmiotem badań autorów był wiszący most rurociągowy o budowie „klasycznej” i rozpiętości między kratownicowymi pylonami 360 m. Dwa cięgna główne leżące w płaszczyźnie pionowej wspierają dźwigar kratownicowy przenoszący dwa przewody rurociągu usytuowane jeden nad drugim, natomiast dwa cięgna wiatrowe usztywniają dźwigar w płaszczyźnie poziomej. W celu przeprowadzenia numerycznych symulacji drgań mostu stworzono model w programie ANSYS, bazujący na metodzie elementów skończonych. Do modelowania cięgien zastosowano elementy kratownicowe, do pylonów oraz dźwigara użyto elementów belkowych, natomiast do idealizacji rurociągu posłużono się belkowymi elementami rurowymi. Podpory pylonów obciążono w kierunku osi rurociągu wprowadzając

40-sekundowy przebieg trzęsienia ziemi, które wystąpiło wcześniej w danym rejonie. Poszukiwane przebiegi sił wewnętrznych oraz przemieszczeń pionowych w wybranych punktach na długości dźwigara wyznaczono przyjmując trzy różne liczby tłumienia: 0,05, 0,02 oraz 0,002. We wnioskach stwierdzono, że im mniejsze jest tłumienie tym większe są naprężenia maksymalne w elementach systemu podwieszenia. Ponadto zauważono, że w przypadku przyjętego przebiegu trzęsienia ziemi nie doszło do przekroczenia dopuszczalnych naprężeń w analizowanym moście. Zwrócono jednak uwagę na różnicę deformacji rurociągu oraz kratowego dźwigara, która mogłaby spowodować podczas trzęsienia ziemi wypadnięcie rurociągu z podpierających go kołysek.

2.8. Oddziaływanie wiatru

Wiszące mosty rurociągowy ze względu na duże rozpiętości, złożony system podwieszenia, dużą smukłość oraz małą masę dźwigara i małe tłumienie mechaniczne mogą pod wpływem różnych obciążeń aerodynamicznych doznawać drgań o amplitudach przekraczających dopuszczalne wartości. Drgania globalne, tzn. obejmujące cały system podwieszenia, rurociąg oraz pylony są powodowane najczęściej siłami aerodynamicznymi działającymi na rurociąg. Przy czym należy zauważyć, że charakterystyczna geometria mostu oraz kształt elementów składowych mają bardzo duży wpływ na rozkład i charakter sił aerodynamicznych. Zatem odpowiedź wiszącego mostu rurociągowego, w którym rolę dźwigara usztywniającego pełni zazwyczaj tylko rurociąg (najczęściej jednoprzewodowy o szerokości nieprzekraczającej 1 m i niewielkiej sztywności zarówno w kierunku poziomym jak i pionowym) istotnie różni się od odpowiedzi typowego, komunikacyjnego mostu wiszącego, gdzie występuje masywny dźwigar o znaczącej sztywności i dużej szerokości. Na to zróżnicowanie wpływa także charakterystyczny dla wiszących mostów rurociągowych przestrzenny system podwieszenia, który w porównaniu z klasycznym (pionowym) systemem ciągien nie tylko ma za zadanie przenosić ciężar własny, ale także przeciwdziałać poziomym oddziaływaniom wiatru.

Niezbędnym etapem projektowania mostów wiszących dużych rozpiętości, w tym mostów rurociągowych jest wyznaczenie krytycznej prędkości wiatru, przy której może dojść do utraty stateczności aerodynamicznej w wyniku zjawiska znanego jako flutter. Charakterystyczne dla flatteru jako drgań samowzbudnych jest to, że konstrukcja poprzez ruch czerpie energię z wiejącego wiatru wskutek interakcji z przepływającym powietrzem. Krytyczną prędkość flatteru definiuje się jako prędkość, przy której energia dostarczana do układu jest równa energii rozpraszanej przez tłumienie, a drgania są ustalone [55], [118].

Obliczona prędkość krytyczna flatteru prawidłowo zaprojektowanego mostu powinna być większa od największej prędkości wiatru, jaka może kiedykolwiek wystąpić w danym rejonie. W przeciwnym razie konstrukcja będzie narażona na zniszczenie w wyniku utraty stateczności aerodynamicznej.

Według wiedzy autora jedyną pracą, w której podjęto temat wyznaczania krytycznej prędkości flatteru wiszącego mostu rurociągowego jest artykuł [128] z 1984 roku, w którym przedmiotem analiz jest most o przekroju jak na rysunku Z1.10b. W artykule opisano badania eksperymentalne przeprowadzone na modelu odcinka dźwigara o długości 10 m, wykonanym w skali 1:12,5. Sztywno zamocowany model sekcji dźwigara badano w tunelu aerodynamicznym w celu wyznaczenia współczynników oporu aerodynamicznego w kierunku siły unoszącej, ciągnącej oraz momentu odchylającego, w funkcji kąta natarcia wiatru. Współczynniki te wyznaczono w dwóch przypadkach: dźwigar z zainstalowanymi turbulizatorami oraz bez turbulizatorów. Na podstawie wyznaczonych współczynników obliczono krytyczną prędkość flatteru dla dźwigara z turbulizatorami, która wyniosła 76,4 m/s. W przypadku dźwigara bez turbulizatorów stwierdzono, że zjawisko flatteru nie wystąpi.

Warto tutaj zaznaczyć, że teoretycznie flatter nie może wystąpić w sytuacji, gdy wiszący most rurociągowy przenosi jednoprzewodowy rurociąg bez dźwigara usztywniającego (rurociąg jest wtedy mocowany do wieszaków za pomocą specjalnych obejm). Nie jest wtedy generowana pionowa siła unosząca (ang. *nonlifting flow* [118]) oraz nie jest generowany moment skręcający ze względu na charakterystyczne właściwości aerodynamiczne przekroju kołowego (tj. symetrię osiową dźwigara). Siły aerodynamiczne pojawiające się pod wpływem działania wiatru można wówczas ograniczyć do poziomej siły o kierunku zgodnym z kierunkiem wiatru.

Z teoretycznego punktu widzenia, ustroje o przekroju kołowym są niewrażliwe także na galopowanie [118]. Galopowanie (ang. *galloping*) jest terminem określającym drgania konstrukcji w kierunku prawie prostopadłym do działającego wiatru, jeżeli są one spowodowane głównie ujemnym tłumieniem aerodynamicznym [55]. Jednym z podstawowych warunków wystąpienia drgań galopujących jest mała sztywność ustroju, dlatego najczęściej występują one w przypadku przewodów elektroenergetycznych oraz cięgien mostów wiszących i podwieszonych. Nie można jednak wykluczyć możliwości wystąpienia zjawiska galopowania podwieszonych rurociągów będących częścią wiszących mostów rurociągowych, ponieważ wzbudzenie drgań może nastąpić, gdy zmieni się kształt przekroju rurowego w wyniku oblodzenia lub opadów deszczu. Prowadzi to do zmiany

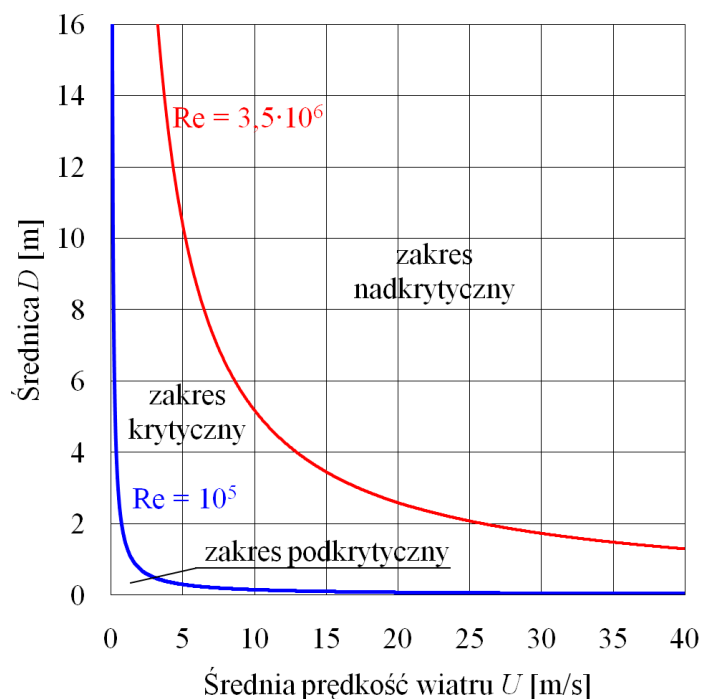
charakterystyk aerodynamicznych przekroju i w konsekwencji do modyfikacji rozkładu obciążeń spowodowanych opływem powietrza. Możliwość wystąpienia drgań typu galopowania można określić na podstawie kryterium sformułowanego przez Den Hartoga [44].

Problem galopowania był jednym z etapów badań przedstawionych we wcześniej omówionym artykule [128], gdzie wyznaczono współczynniki aerodynamiczne sekcji dźwigara wiszącego mostu rurociągowego (rys. Z1.10b). W wyniku przeprowadzonych obliczeń, których celem było sprawdzenie kryterium Den Hartoga, stwierdzono, że galopowanie nie wystąpi w przypadku badanego mostu, ponieważ kryterium Den Hartoga jest spełnione zarówno wtedy, gdy dźwigar jest wyposażony w turbulizatory jak i bez nich.

Kolejnym obciążeniem aerodynamicznym, które może w przypadku wiszących mostów rurociągowych prowadzić do drgań o dużych amplitudach jest wzbudzanie wirowe (ang. *vortex-shedding*). Przy pewnej prędkości wiatru działającego na dźwigar mostu, w wyniku odrywania się warstwy przyściennej strumienia powietrza tworzą się wiry, które oddziałują naprzemiennie na górną i dolną powierzchnię dźwigara. Gdy wir tworzy się po jednej stronie konstrukcji, zwiększa się prędkość wiatru po drugiej stronie, powodując ruch konstrukcji w kierunku prostopadłym do kierunku działania wiatru. Odrywające się naprzemiennie wiry powodują wzbudzanie drgań pionowych o takiej samej częstotliwości, jak częstość tworzenia się wirów. Drgania te są ograniczone i powrotnie maleją, gdy zmieni się prędkość wiatru. Amplitudy drgań spowodowanych wzbudzeniem wirowym są na ogół małe, jednak znacznie wzrastają przy pewnej krytycznej prędkości przepływu, gdy częstość odrywania się wirów zbliża się do częstości własnej drgań poprzecznych konstrukcji. Ruch konstrukcji wpływa wtedy znacząco na wymiar i intensywność wirów oraz częstość ich odrywania się. Występuje wtedy dodatnie sprzężenie zwrotne między działaniem poprzecznym generowanym przez wiry, a drganiami poprzecznymi struktury. Moc wirów jest zwiększona w wyniku nałożenia się wirów Bernada-Kàrmàna i wirów wzbudzonych ruchem struktury. Zjawisko to jest w literaturze nazywane synchronizacją (ang. *lock-in*) [118], a częstość odrywania się wirów można określić przy użyciu liczby Strouhala [58].

Wiszące mosty rurociągowie są szczególnie narażone na działanie wzbudzania wirowego ze względu na kształty dźwigarów złożonych z przekrojów rurowych sprzyjających powstawaniu wirów. Na rysunku 2.6 przedstawiono obszary poszczególnych zakresów liczby Reynoldsa, w zależności od prędkości wiatru działającego na przekrój i średnicy walca kołowego. Z analizy rysunku można wywnioskować, że w przypadku typowych średnic

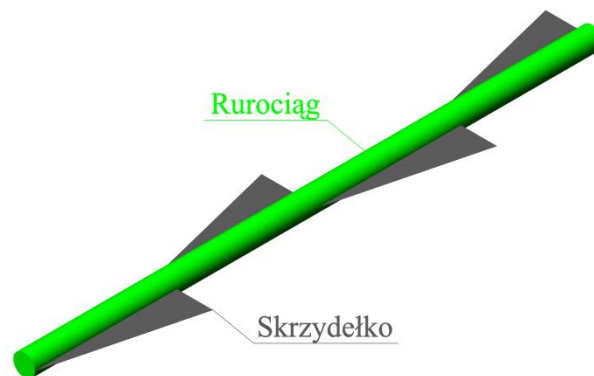
rurociągów (tj. nieprzekraczających 1 m) średnia prędkość wiatru w zakresie podkrytycznym liczby Reynoldsa, w którym następuje regularne odrywanie wirów, mieści się w granicach od 0 do około 5 m/s, co oznacza, że wzbudzenie wirowe drgań rurociągowych mostów wiszących może wystąpić nawet przy słabym wietrze.



Rys. 2.6. Zakresy liczby Reynoldsa w zależności od średnicy walca kołowego oraz średniej prędkości wiatru [55]

Jeden z pierwszych przykładów występujących w praktyce drgań rurociągowych mostów wiszących, wzbudzanych wirami Bernarda-Kàrmàna, przedstawił szczegółowo Baird [3] w 1955 roku, wraz z propozycją sposobów redukcji drgań. Przykład dotyczy mostu o budowie „klasycznej” i rozpiętości przęsła głównego 311 m, wzniesionego nad rzeką Colorado w Blythe, California, przenoszącego jeden rurociąg o średnicy 76 cm. Krótko po wybudowaniu mostu w 1947 roku zaobserwowano bardzo duże drgania rurociągu, o amplitudzie sięgającej 91 cm, które pojawiały się przy lekkim wietrze. Baird [3] opisał metodologię badań mających na celu znalezienie źródła tych drgań. Wcześniejsze próby wyjaśnienia tego zjawiska prowadziły do wielu błędnych teorii na temat źródła drgań, takich jak wpływ oddziaływania słońca po jednej stronie rurociągu lub skoki ciśnienia gazu na końcach rurociągu. Zainstalowane na moście instrumenty meteorologiczne wykazały, że drgania o dużej amplitudzie pojawiają się w zakresie prędkości wiatru od 1,8 do 2,7 m/s. Po badaniach w tunelu aerodynamicznym odcinka rurociągu wykonanego w skali 1:100 okazało się, że nadmierne amplitudy drgań były spowodowane wirami Bernarda-Kàrmàna.

Rozważano trzy możliwe sposoby ograniczenia drgań spowodowanych wzbudzeniem wirowym: a) zamocowanie w kilku punktach na długości rurociągu dodatkowych lin zakotwionych w dnie rzeki, mających na celu zmniejszenie pionowych przemieszczeń, b) zastosowanie mechanicznych tłumików drgań, które zwiększyłyby tłumienie konstrukcyjne rurociągu, c) instalacja paneli wiatrowych w kształcie trójkątów, których zadaniem byłoby zakłócanie mechanizmu tworzenia się wirów Bernarda-Kàrmàna. Pierwsze rozwiązanie odrzucono ze względów praktycznych (liny utrudniałyby żeglugę na rzece), natomiast drugie okazałoby się zbyt kosztowne ze względu na utrzymanie. Ostatecznie zdecydowano się zastosować trójkątne skrzydełka wiatrowe na całej długości rurociągu (rys. 2.7). To samo rozwiązanie zastosowano w moście o niemal identycznej budowie, położonym nad rzeką Gila [18].



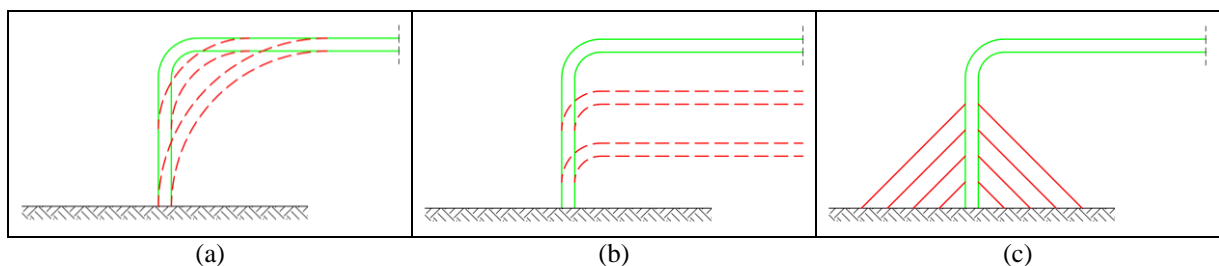
Rys. 2.7. Skrzydełka wiatrowe przeciwdziałające powstawaniu wirów Bernarda-Kàrmàna

Inny przykład wzbudzenia wirowego przedstawił Steinman [126] w 1952 roku, opisując przypadek wiszącego mostu rurociągowego na rzece Coosa (rys. Z1.2a), o rozpiętości 210 m, w którym po podwieszeniu rurociągu zaobserwowano drgania o amplitudach sięgających 90 cm. Podobnie jak w przypadku mostu nad rzeką Colorado, próbowano wyjaśnić źródło nadmiernych drgań formułując różne błędne teorie takie jak nagromadzenie naprężeń, które w trakcie drgań były uwalniane lub brak kompensatorów temperatury w środku rozpiętości rurociągu. Krótko po ukończeniu budowy zainstalowano drugi rurociąg, podwieszony pod rurociągiem głównym, który miał za zadanie zwiększyć sztywność dźwigara i jednocześnie służyć jako zapasowy w przypadku uszkodzenia głównej linii. Dodatkowo, w celu zmniejszenia amplitud drgań zainstalowano mechaniczny tłumik drgań w środku rozpiętości przęsła. Jednak zabiegi te zredukowały amplitudy drgań do 30 cm, co w dalszym ciągu zagrażało bezpieczeństwu konstrukcji ze względu na zmęczenie. Po badaniach odcinka dźwigara w tunelu aerodynamicznym okazało się, że nadmierne drgania są

spowodowane wzbudzeniem wirowym, a wyznaczony zakres prędkości krytycznych, dla których występowało zjawisko sprzężenia zwrotnego wynosił od 3,1 do 7,6 m/s. Steinman, opierając się na wprowadzonych przez siebie w pracy [125] współczynnikach sztywności oraz tłumienia mechanicznego, zaproponował zastosowanie lekkich cięgien łączących diagonalnie ciężna główne oraz rurociąg, tworząc układ analogiczny jak w kratownicy. Według obliczeń Steinmana, diagonalne ciężna zwiększyły sztywność dźwigara o 41%, a tłumienie mechaniczne wzrosło o 59%. Amplitudy drgań pionowych rurociągu po wykonaniu wzmocnienia zostały zredukowane do 1 cm. Koszt wykonania tych cięgien był o 2/3 mniejszy niż alternatywne rozwiązanie w postaci zastosowania skrzydełek wiatrowych.

Pod koniec lat 80. XX wieku, Dusseau i in. opublikowali trzy prace: [46], [47] i [49], w których przedstawili interesujące wyniki badań problemu drgań wzbudzanych wirami. Badania te dotyczyły dwóch mostów: Calumet Loop Aerial Crossing o rozpiętości 245 m oraz Patterson Loop Aerial Crossing o długości przęsła 259 m, wybranych z grupy ośmiu „nowoczesnych” mostów rurociągowych wybudowanych wzdłuż Wax Lake Outlet w pobliżu St. Mary Parrish w Louisianie. Wybrane dwa mosty, krótko po ukończeniu budowy, przy lekkim wietrze w zakresie prędkości od 2,2 do 3,6 m/s zaczęły wykazywać zagrażające bezpieczeństwu konstrukcji pionowe drgania rurociągu, charakteryzujące się powtarzalnym kształtem mającym postać 1,5 fali sinusoidalnej. Amplitudy tych drgań znacznie zmniejszono poprzez zastosowanie diagonalnych cięgien łączących ciężna główne i rurociąg, jednak należało wyjaśnić, dlaczego spośród ośmiu mostów o bardzo podobnej konstrukcji i rozpiętości tylko te dwa wykazywały niekorzystne cechy aerodynamiczne. Dusseau i jego współpracownicy podjęli badania mające na celu wyjaśnienie tego problemu. W pracy [46] wyznaczyli częstotliwości odrywania się wirów, korzystając z zależności wykorzystującej liczbę Strouhala. Następnie zaprezentowali wyniki analiz modalnych przeprowadzonych w programie ANSYS dla trzech różnych modeli numerycznych mostu Patterson Loop Aerial Crossing (z mniejszą liczbą wieszaków, z projektową liczbą wieszaków oraz z dodatkowymi cięgnami diagonalnymi). Procedurę opracowania tego modelu numerycznego omówiono w punkcie 2.6. Porównanie częstotliwości własnej charakteryzującej odpowiednią formę własną (1,5 fali sinusoidalnej) z obliczoną częstotliwością odrywania się wirów potwierdziło wcześniejsze przypuszczenia o pokrywaniu się tych wartości. Jednocześnie autorzy zauważyli, że zastosowanie cięgien diagonalnych przesunęło częstotliwość rozważanej formy poza zakres wystąpienia zjawiska sprzężenia zwrotnego (*lock-in*). W kolejnej pracy współautorstwa Dusseau [47] poddano analizie współczynniki sztywności i tłumienia mechanicznego, obliczone według formuł

zaproponowanych przez Steinmana [125]. Porównano wyniki obliczeń przeprowadzonych dla dwóch mostów rurociągowych: mostu Patterson Loop Aerial Crossing oraz mostu Avalon Extension Aerial Crossing o rozpiętości 307 m, który nigdy nie wykazywał pionowych drgań o dużych amplitudach pomimo analogicznej struktury i oddalenia od pierwszego mostu tylko o niecały kilometr. Ze względu na bardzo podobny system podwieszenia, porównanie ograniczono do współczynników sztywności samych rurociągów, przy czym porównano współczynniki odpowiadające drganiom według formy własnej o kształcie 1,5 fali sinusoidalnej. Sztywność rurociągu Avalon Extension Aerial Crossing okazała się znacznie większa niż mostu Patterson Loop Aerial Crossing, co autorzy powiązali ze sposobem ukształtowania końców rurociągu. W moście Avalon Extension Aerial Crossing zastosowano bowiem prawie prosty profil rurociągu z łagodnym zakrzywieniem (o dużym promieniu) na końcach oraz bardzo krótkie odcinki pionowe w miejscach, gdzie rurociąg schodzi do gruntu. Zaobserwowany efekt zbadano dokładniej w trzeciej pracy [49], gdzie rozważano różne promienie zaokrąglenia rurociągu na końcach (rys. 2.8a), różne długości odcinków pionowych (rys. 2.8b) oraz wpływ zastosowania dodatkowych podpór wspierających odcinki pionowe (rys. 2.8c) na wartość współczynnika sztywności oraz tłumienia mechanicznego. Stwierdzono, że spośród rozważanych profili największą sztywność posiada rurociąg, w którym nie występują odcinki pionowe.



Rys. 2.8. Badane sposoby zwiększenia współczynnika sztywności rurociągu:
a) zmiana promienia zaokrąglenia na końcach,
b) zmiana długości odcinka pionowego,
c) zastosowanie dodatkowych podpór

Problem wzbudzenia wirowego był także analizowany w pracy [20], gdzie przedstawiono możliwość instalacji aktywnego systemu tłumienia w celu redukcji drgań „klasycznego” wiszącego mostu rurociągowego. Rozważano możliwość wystąpienia drgań pionowych spowodowanych wzbudzeniem wirowym oraz drgań skrętnych. Omówione zostały różne warianty sposobu realizacji aktywnego systemu tłumienia oraz porównanie efektywności i kosztów utrzymania urządzeń.

Rurociągowy mosty wiszące, niezależnie od sposobu rozwiązania dźwigara, są wyjątkowo podatne na oddziaływanie turbulencji wiatru, m.in. ze względu na małe tłumienie i niskie częstotliwości własne w porównaniu z typowymi, komunikacyjnymi obiektami mostowymi. Obciążenie aerodynamiczne wynikające z turbulencji wiatru jest nazywane w literaturze wzbudzeniem turbulentnym (ang. *buffeting*). Jest to obciążenie losowe, ponieważ fluktuacje prędkości wiatru są spowodowane wieloma czynnikami i mają w dużej mierze charakter przypadkowy. Analiza drgań spowodowanych buffetingiem jest ważna z kilku powodów. Po pierwsze, w przypadku mostów komunikacyjnych drgania te, pomimo, że nie prowadzą do utraty stateczności aerodynamicznej, mogą być przyczyną dyskomfortu użytkowników. Po drugie, kumulacja uszkodzeń spowodowanych tymi oscylacjami może być przyczyną zmęczenia różnych elementów konstrukcyjnych, zmuszając zarządców do zamknięcia mostu i przeprowadzenia kosztownych remontów [62]. Po trzecie, wiotkie konstrukcje o niskich częstotliwościach własnych, takich jak konstrukcje cięgnowe, a w szczególności wiszące mosty rurociągowy mogą wykazywać efekty wzmocnienia rezonansowego [118], które skutkują pojawieniem się oscylacji o dużych amplitudach, stanowiących zagrożenie bezpieczeństwa użytkownika konstrukcji.

Z turbulentnym wzbudzeniem drgań mamy do czynienia w sytuacji, gdy na konstrukcję działa silny porywisty wiatr, czyli wiatr o losowo zmiennej prędkości i zmiennym kierunku, charakteryzujący się dużą prędkością średnią. Należy przyjąć, że jest to typowe obciążenie aerodynamiczne wielu wiszących mostów rurociągowych, którego nie da się uniknąć ze względu na specyficzną lokalizację tych mostów, zwykle w strefach działania silnego wiatru. Mimo to, problem drgań spowodowanych buffetingiem jest rzadko podejmowany w literaturze naukowej poświęconej rurociągowym mostom wiszącym, a w istniejących pracach autorzy nie stosują na ogół jednolitego, stochastycznego podejścia do analizy i prognozy tych drgań. Przykładem jest praca [30], w której autorzy zaproponowali zastosowanie tłumików drgań w celu ograniczenia odpowiedzi mostu na wzbudzenie turbulentne i przedstawili wyniki badań numerycznych służących analizie skuteczności tłumików aktywnych i pasywnych. Pierwszym etapem opisanych badań była budowa modelu mostu w programie ANSYS. Analizowany most, o budowie analogicznej jak na rysunku Z1.5, składał się z dwóch, ułożonych blisko siebie cięgien głównych, tworzących wraz z wieszakami pionowe płaszczyzny podwieszenia, dwóch cięgien wiatrowych ułożonych wraz z wieszakami w płaszczyźnie poziomej, dwóch pylonów o budowie kratowej oraz dwóch przewodów rurociągu ułożonych jeden nad drugim. Do modelowania cięgien zastosowano pręty kratownicowe, do pylonów użyto elementów belkowych, natomiast

w przypadku rurociągów posłużono się elementami rurowymi. Otrzymane w ten sposób macierze sztywności i bezwładności przeniesiono do programu MATLAB w celu symulacji odpowiedzi na wzbudzenie turbulентne. Przebieg fluktuacji składowej poziomej pola prędkości wiatru oraz składowej pionowej wyznaczono metodą symulacyjną w 126 punktach na długości dźwigara, stosując metodę WAWS (ang. *Weighted Amplitude Wave Superposition*). Następnie porównywano 40-sekundowe przebiegi przemieszczeń poziomych oraz kątów skręcenia dźwigara w środku rozpiętości mostu, rozważając trzy sytuacje: most bez tłumików drgań oraz most z dwoma różnymi typami tłumików – tłumikami aktywnymi i tłumikami pasywnymi (strojonymi). W analizowanym w pracy [30] przypadku drgań spowodowanych buffetingiem, aktywne tłumiki drgań okazały się skuteczniejsze od pasywnych, ponieważ były mniej zależne od zestrojonej częstotliwości, co było korzystne ze względu na fakt, iż symulowane pole wiatru zawierało szeroki zakres częstotliwości.

W kolejnym artykule [68] dotyczącym oddziaływania buffetingu na wiszące mosty rurociągowe autorzy skupili uwagę na wyznaczeniu wartości oczekiwanych drgań rurociągu. Całą procedurę wyznaczania wartości oczekiwanych przeprowadzono w programie ANSYS, przy czym przyjęto model mostu według opisu przedstawionego w punkcie 2.6. Do analizy odpowiedzi mostu na wzbudzenie turbulентne zastosowano metodę PEM (ang. *Pseudo Excitation Method*). W tej metodzie wzbudzenie turbulентne, które działa jednocześnie w wielu punktach na długości dźwigara rozkłada się na wzbudzenia w pojedynczych punktach. W każdym punkcie, na podstawie znajomości macierzy gęstości widmowych sił wzbudzających, formułuje się wektor wzbudzenia. W wyniku obliczeń otrzymuje się macierz gęstości widmowej odpowiedzi, a następnie oblicza się średnią wartość odpowiedzi. Na podstawie otrzymanych wartości oczekiwanych przemieszczeń oraz kątów skręcenia dźwigara stwierdzono, że maksymalne przemieszczenia poziome wynoszące 0,21 m występują w połowie rozpiętości mostu, natomiast w przypadku przemieszczeń pionowych i kąta skręcenia największe wartości, odpowiednio 0,37 m oraz 0,026 rad, uzyskano w 1/4 oraz 3/4 rozpiętości mostu.

Wyniki badań eksperymentalnych rurociągowego mostu wiszącego, przeprowadzonych w tunelu aerodynamicznym na modelu wykonanym w skali 1:25, przedstawiono w artykule [147]. Stwierdzono, że w analizowanym zakresie średniej prędkości wiatru aerostatyczne przemieszczenia poziome i skrętne są istotne, natomiast pionowe okazały się bardzo małe. Zauważono ponadto, że przemieszczenia pionowe wynikające z oddziaływania buffetingu, które są pomijalne w przypadku mostów drogowych, dla badanego rurociągowego mostu wiszącego były znaczące. Odpowiedź mostu zarówno na

wiatr o stałej prędkości jak i buffeting była silnie powiązana z kątem natarcia wiatru, średnicą rurociągu, liczbą rurociągów oraz intensywnością turbulencji.

2.9. Podsumowanie oraz wnioski wynikające z przeglądu literatury

Publikacje na temat wiszących mostów rurociągowych, obok prac związanych z utrzymaniem tych obiektów ([1], [13], [32], [91], [113] oraz [124]), skupiają się przede wszystkim na zagadnieniach związanych z działaniem obciążeń dynamicznych takich jak: trzęsienia ziemi, przepływ cieczy w rurociągu i przejazd tzw. świnki oraz efekty działania wiatru.

W pracach poświęconych oddziaływaniu trzęsienia ziemi na mosty rurociągowie zwraca się uwagę między innymi na konieczność uwzględnienia nieliniowości geometrycznej cięgien w numerycznych modelach mostów [148]. Ponadto, z obserwacji przebiegów drgań wymuszonych działaniem obciążenia sejsmicznego wynika, że najbardziej newralgicznymi miejscami są końce rurociągu, ze względu na duże przemieszczenia podłużne ([48], [50], [51]), oraz połączenie rurociągu z pomostem, z uwagi na różnicę przemieszczeń rurociągu i pomostu, która mogłaby spowodować wypadnięcie rurociągu z kołysek [151].

Jednym z podstawowych problemów analizowanych w przypadku rurociągowych mostów wiszących jest zagadnienie przepływu cieczy, łączące się między innymi ze statecznością konstrukcji. Z przedstawionej literatury wynika, że jest to problem ważny nie tylko podczas uruchamiania i okresowego zamykania rurociągu, kiedy procesy napełniania lub opróżniania powodują nierównomierne jego obciążenie [34], ale także podczas regularnej eksploatacji, gdzie przejazd świnki używanej do prac konserwacyjnych może spowodować niekorzystny układ obciążeń statycznych [60], [136]. W badaniach eksperymentalnych [141], które symulowały przejazd świnki wraz z zanieczyszczeniami w postaci kolumny cieczy stwierdzono, że w praktycznym zakresie prędkości poruszania się świnki, tj. do 5 m/s, efekty dynamiczne są pomijalne. Zwrócono także uwagę na problem przepływu cieczy w rurociągu podwieszonym do mostu kolejowego, w aspekcie jego wpływu na drgania spowodowane przejazdem pociągu [145]. Przedstawione w literaturze analizy drgań spowodowanych ruchem cieczy i przejazdem świnki często bazują na płaskich, uproszczonych modelach mostu i przepływającej cieczy ([34], [60] i [145]). W niektórych pracach ciecz modelowano nawet jako zbiór sił skupionych (np. [60]). Jeżeli stosowano przestrzenny model mostu, to zakres przedstawionych wyników analiz dynamicznych był bardzo ograniczony [136]. Z kolei problem stateczności wiszących mostów rurociągowych rozważano jedynie w ujęciu statycznym [34], głównie w kontekście utraty stateczności pylonów w trakcie napływu cieczy

do rurociągu. Ponadto, podkreśla się, że w dalszym ciągu potrzebne są zarówno badania eksperymentalne jak i numeryczne dotyczące wpływu przepływu cieczy lub gazu oraz przejazdu świnki na stan przemieszczenia rurociągu będącego częścią wiszącego mostu rurociągowego [142].

Widać zatem, że opublikowane do tej pory przez różnych autorów wyniki analiz dynamicznych nie wyczerpują dostatecznie problemu. Przede wszystkim brakuje badań uwzględniających fakt, że przy przepływie cieczy przez rurociąg zmienia się nie tylko masa mostu, ale także jego sztywność i tłumienie. Te charakterystyki mostu silnie zależą od prędkości cieczy. Jak pokazano w pracy autora niniejszej rozprawy [103], przy określonej prędkości krytycznej przepływu, z teoretycznego punktu widzenia sztywność konstrukcji mostu maleje do zera, co jest równoznaczne z globalną utratą stateczności. Co więcej, większość przedstawionych w literaturze analiz numerycznych bazuje na modelach liniowych, brak jest zatem publikacji (poza pracą autora [104]) poświęconych analizie wpływu nieliniowości geometrycznej ciągien i rurociągu na drgania mostu spowodowane przepływem cieczy.

Zdecydowanie najwięcej artykułów na temat dynamiki rurociągowych mostów wiszących dotyczy oddziaływania wiatru. Ze względu na kształty dźwigarów złożonych z przekrojów rurowych, mosty rurociągowie są szczególnie narażone na działanie wzbudzenia wirowego. Jeżeli drgania spowodowane oddziaływaniem wirów przekraczają dopuszczalne wartości normowe, stosuje się różne metody ograniczania drgań, zarówno mechaniczne jak i aerodynamiczne. Jednym z podstawowych rozwiązań tego problemu jest zwiększenie sztywności oraz tłumienia konstrukcyjnego poprzez zastosowanie ciągien diagonalnych, tj. ukośnych odciągów łączących ciągną główną z rurociągiem [46], [126]. Zwiększenie sztywności rurociągu można także osiągnąć poprzez modyfikację kształtu profilu rurociągu [47], [49]. Kolejnym sposobem redukcji drgań wywołanych wzbudzeniem wirowym jest zastosowanie tzw. turbulizatorów w formie skrzydełek [3], a także spiralnych pasków lub płytek, płaszczy perforowanych, pierścieni, nakładek, tulei, itp. [58], które modyfikują przepływ powietrza wokół konstrukcji i zaburzają regularność tworzenia się wirów. Ostatnim z możliwych środków zaradczych są różnego rodzaju tłumiki drgań rozpraszające energię mechaniczną układu [20].

Inną grupę efektów wiatrowych stanowią flutter i galopowanie, które wpływają na stateczność aerodynamiczną mostu. Z rozważań przedstawionych w pracy [128] wynika, że wyznaczona w tunelu aerodynamicznym prędkość krytyczna flatteru typowego dźwigara mostu rurociągowego jest zwykle bardzo duża, co praktycznie wyklucza możliwość

wystąpienia tego zjawiska, a w przypadku rurociągu jedнопrzewodowego flutter w ogóle nie jest możliwy. Podobnie stwierdzono w przypadku galopowania, konkludując, że zjawisko galopowania dźwigara rurowego nie występuje, poza sytuacją, gdy kształt przekroju ulega zmianie, np. wskutek oblodzenia. Jedynie w trzech pracach [30], [68], [147] podjęto temat oddziaływania wzbudzenia turbulentnego na mosty rurociągowy. W pierwszym artykule zbadano efektywność zastosowania pasywnych i aktywnych tłumików mających na celu zmniejszenie drgań, które mogłyby doprowadzić do zmęczenia elementów konstrukcyjnych rurociągowego obiektu mostowego. W drugiej pracy skupiono uwagę na wyznaczeniu wartości oczekiwanych przemieszczeń rurociągu. Natomiast w ostatniej ze wspomnianych prac przedstawiono wyniki badań w tunelu aerodynamicznym, gdzie obserwowano odpowiedź modelu mostu na turbulentne oddziaływanie wiatru o różnych parametrach.

Jak wynika z przeglądu literatury, analiza efektów oddziaływania wiatru powinna być niezbędnym elementem każdego projektu wiszącego mostu rurociągowego. Wyznaczone prędkości krytyczne flutteru i galopowania powinny być wyższe od największej prędkości wiatru, jaka może wystąpić podczas czasu życia konstrukcji. Jeżeli niemożliwe jest zwiększenie projektowej prędkości krytycznej poza ten zakres, poprzez modyfikację kształtu, sztywności lub masy konstrukcji, należy stosować urządzenia zwiększające tłumienie mechaniczne konstrukcji. Powinny być też instalowane turbulizatory zakłócające proces wzbudzenia wirowego, przy czym trzeba pamiętać, że urządzenia te mogą powodować zmianę projektowych prędkości krytycznych flutteru i galopowania, a w przypadku jedнопrzewodowych rurociągów powodują, że dźwigar wcześniej niewrażliwy na flutter i galopowanie, po modyfikacji przekroju może podlegać tym zjawiskom.

Zabezpieczenie mostu przed wspomnianymi efektami aerodynamicznymi nie wyklucza jednak możliwości wystąpienia drgań spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym. Wyeliminowanie tych drgań nie jest możliwe [62], można jedynie zredukować ich amplitudy poprzez zastosowanie tłumików i usztywnienie konstrukcji, przy czym ocena skuteczności tych zabiegów wymaga szczegółowej analizy dynamicznej przy użyciu metod analizy stochastycznej. Zatem wzbudzenie turbulentne jest jedynym zjawiskiem aerodynamicznym, gdzie niemożliwe jest usunięcie źródła wzbudzenia, a możliwe tylko ograniczone zmniejszenie odpowiedzi. Buffeting jest obciążeniem rzeczywistym, działającym na konstrukcję w realnym zakresie prędkości wiatru oraz wpływającym na stan jej wytężenia, a nieliczne publikacje na ten temat (np. [147]), dotyczące rurociągowych mostów wiszących wskazują, że jest to ważny i aktualny temat z punktu widzenia analizy efektów

zmęczeniowych, a także analizy ewentualnych przekroczeń dopuszczalnych wartości przemieszczeń lub naprężeń w elementach konstrukcyjnych.

Projektowanie rurociągowych mostów wiszących z uwzględnieniem obciążeń dynamicznych wymaga numerycznej analizy odpowiedzi mostu, przy użyciu dobrze dobranego modelu obliczeniowego, możliwie najlepiej odwzorowującego obiekt rzeczywisty. Równocześnie, przyjęty model obliczeniowy musi umożliwiać wykonywanie wielu symulacji drgań w akceptowalnym czasie obliczeń. W prawie wszystkich publikacjach opisanych w rozeznaniu literaturowym, modele obliczeniowe tworzono w programach MES. Bardzo rzadko stosowano inne sformułowania modelu, z uwagi na konieczność wielu uproszczeń takich jak na przykład założenie płaskiego modelu mostu [60], [145]. We wszystkich opisanych pracach, cięgna modelowano w programach MES przy użyciu prętów kratownicowych, co należy uznać za zbyt daleko idące uproszczenie w sytuacji, gdy cięgna charakteryzują się dużym zwisem, naciągami wstępnymi i dużymi przemieszczeniami. Należy też zauważyć, że w przypadku takich konstrukcji, jak mosty rurociągowy, wymagany jest gęsty podział cięgien na elementy skończone, co przy dużych rozpiętościach przęsła prowadzi do bardzo dużej liczby elementów skończonych. W efekcie otrzymuje się zadanie czasochłonne obliczeniowo w zagadnieniach dynamiki, zwłaszcza w przypadku symulacji długich przebiegów czasowych drgań. Aby zmniejszyć nakłady obliczeniowe, w omawianych pracach generowano przebiegi czasowe przyjmując różne uproszczenia zmniejszające liczbę dynamicznych stopni swobody, takie jak wykorzystanie symetrii układu konstrukcyjnego [51] lub zastąpienie pylonów odpowiednio dobranymi podporami [49], [51]. Ponadto, we wszystkich pracach oprócz [148], nie brano pod uwagę wpływu nieliniowości geometrycznej wynikającej z dużych przemieszczeń cięgien i rurociągu.

Należy zatem stwierdzić, że stosowane do tej pory modele obliczeniowe MES rurociągowych mostów wiszących wymagają co najmniej modyfikacji mającej na celu wprowadzenie dokładniejszego sposobu modelowania cięgien. W modelach służących do analizy efektów aerodynamicznych powinien być natomiast uwzględniony wpływ przepływającej cieczy na charakterystyki mostu – jego masę, sztywność i tłumienie, ponieważ ciecz przepływająca przez rurociąg z określoną prędkością może istotnie zmienić odpowiedź dynamiczną mostu.

3. Model obliczeniowy wiszącego mostu rurociągowego

3.1. Technika podstruktur

Niewątpliwie najpopularniejszą obecnie metodą modelowania złożonych systemów konstrukcyjnych jest metoda elementów skończonych. Jednak w przypadku skomplikowanej geometrii konstrukcji konieczny jest gęsty podział na elementy skończone, aby odwzorować tę geometrię, a w przypadku zagadnień dynamiki, gęsty podział jest wymagany także w celu zminimalizowania błędów wynikających z dyskretyzacji. Należy też zwrócić uwagę na fakt, że liczba elementów rośnie wraz rozmiarami konstrukcji, jest zatem szczególnie duża, gdy budowane są modele MES złożonych konstrukcji mostowych o dużych rozpiętościach, takich jak rurociągowy mosty wiszące. Bardzo duża liczba elementów skończonych, a stąd bardzo duża liczba stopni swobody stanowi istotną przeszkodę obliczeniową w przypadku analiz układów dynamicznych o zmiennym w czasie rozkładzie masy, z czym mamy do czynienia w zagadnieniach inercyjnych obciążeń ruchomych [83]. Duża liczba stopni swobody powoduje bowiem trudności obliczeniowe przy symulacjach długich przebiegów drgań układu, związane z koniecznością rozwiązywania dużego układu równań kolokacyjnych w każdym kroku numerycznego całkowania równań ruchu.

Jedną z podstawowych metod, która daje możliwość zredukowania liczby dynamicznych stopni swobody jest metoda superpozycji modalnej, możliwa do stosowania w przypadku zagadnień liniowych. Jednak wymaga ona wcześniejszego wyznaczenia częstości i form własnych dla całej złożonej konstrukcji, co także może okazać się problematyczne w przypadku dużego zadania. Innym alternatywnym podejściem jest CMS (ang. *Component Mode Synthesis*). W metodzie tej traktuje się złożoną konstrukcję jako zespół podstruktur, przy czym ruch każdej podstruktury jest reprezentowany przez skończony zbiór form składowych (ang. *component modes*). Formy składowe rozumie się tutaj jako klasę funkcji aproksymacyjnych Ritza lub form założonych (ang. *assumed modes*) opisujących przemieszczenia punktów wewnątrz danej podstruktury [40]. Przyjęcie zbioru form niezależnie dla każdej podstruktury może wynikać z przeprowadzonych rozważań analitycznych, badań eksperymentalnych, lub mogą zostać one założone „a priori” [75]. Od opublikowania pierwszych prac na ten temat w latach sześćdziesiątych XX wieku roku przez Hurty [69], [70], metoda ta była rozwijana i modyfikowana głównie w zakresie wyboru form składowych oraz definiowania wzajemnej interakcji podukładów. Równoległe z Hurty, podobną koncepcję budowy modeli dynamicznych złożonych z podstruktur zaproponował

Gladwell [63], jednak jego sformułowanie nie zyskało takiej popularności jak CMS. Początkowo metodę CMS stosowano do układów nietłumionych, jednak w późniejszych latach przedstawiono jej zastosowanie także do układów tłumionych [38], [140]. Pomimo znacznego rozwoju technik modelowania przy użyciu MES i wzrostu mocy obliczeniowej komputerów, CMS jest wciąż popularną i rozwijaną metodą, o czym świadczy na przykład praca z 2003 roku [2], gdzie zaproponowano stochastyczne ujęcie CMS. Porównanie wariantów tej metody można znaleźć w wielu artykułach, na przykład [39], [95], oraz w monografiach Craiga [36], Maia i Silvy [90] lub Meirovitcha [93].

Podstruktury będące częściami większej konstrukcji mogą być wydzielone na podstawie różnic np. mechanicznych lub geometrycznych, ale podział może też być czysto arbitralny i może odbywać się wewnątrz elementu o tych samych parametrach. Widać zatem, że metoda CMS jest szczególnie efektywna w przypadku, gdy konstrukcja składa się z dużej liczby takich samych podstruktur, ponieważ jakakolwiek modyfikacja parametrów na etapie projektowania będzie wymagać obliczeń tylko dla jednej podstruktury [11]. Należy tutaj wspomnieć, że metoda CMS jest szczególnie popularna w analizach dynamicznych, gdzie łączone są podstruktury, których charakterystyki dynamiczne wyznaczono we współrzędnych modalnych na podstawie badań eksperymentalnych, z podstrukturami, których modele opisano za pomocą metod analitycznych we współrzędnych fizycznych, na przykład MES. Pierwszą pracą, w której zaproponowano takie ujęcie CMS był artykuł Klostermana [78].

Procedura CMS składa się z dwóch podstawowych kroków: definicji zbiorów form składowych oraz syntezy poszczególnych podstruktur tworzących daną konstrukcję złożoną. Zgodnie z aproksymacją Rayleigha-Ritza, fizyczne, lokalne stopnie swobody danej podstruktury przedstawia się za pomocą uogólnionych stopni swobody podstruktury, przy użyciu macierzy form składowych (ang. *component mode matrix*) zawierającej wybrane formy założone. Na tym etapie trzeba podjąć decyzję o wyborze typu form założonych dla każdej podstruktury oraz o liczbie założonych form poszczególnych typów, co z kolei ma wpływ na rozmiar danego zadania. W klasycznym ujęciu metody CMS najczęściej stosuje się następujące typy form założonych [40], [95]:

- formy reprezentujące ruch ciała sztywnego, które wyrażają przemieszczenia podstruktury bez deformacji (ang. *rigid-body-modes*);
- formy wynikające z wymuszenia jednostkowego przemieszczenia w wybranym punkcie połączenia podstruktur, przy założeniu sztywnych połączeń w pozostałych punktach (ang. *constraint modes*);

- formy wynikające z przyłożenia jednostkowej siły w wybranym punkcie połączenia, przy założeniu pozostałych punktów połączeń nieobciążonych (ang. *attachment modes*);
- formy własne wyznaczone z rozwiązania zagadnienia własnego przeprowadzanego dla danej podstruktury, przy założeniu różnych wariantów warunków brzegowych w miejscach połączeń z przyległymi podstrukturami (ang. *normal modes*), tj. brzegów: sztywnych (ang. *fixed-interface*), swobodnych (ang. *free-interface*), mieszanych (ang. *hybrid-interface*), innych (np. brzegi z pokrywającymi się elementami (ang. *interface with overlapping elements*), brzegi z obciążeniem w punktach połączeń w postaci zgranulowanych mas i/lub więzi sprężystych (ang. *loaded-interface*));
- formy zwiększające dokładność aproksymacji, które przyjmuje się w postaci form statycznych, quasi-statycznych lub pseudo-statycznych reprezentujących wpływy wysokich (lub niskich) form własnych, które zostały pominięte w celu redukcji rozmiaru zadania (ang. *residual-flexibility modes*).

Wybór zbioru form założonych jest najbardziej krytycznym krokiem metody CMS. Jak przedstawiono powyżej, najczęściej stosuje się zbiór form własnych (analogicznie jak w metodzie superpozycji modalnej), który jest uzupełniany o formy mające zapewnić spełnienie warunków brzegowych w miejscach połączeń podstruktur oraz o formy zmniejszające błędy wynikające z obciążenia wyższych form własnych. Selekcja form własnych zależy najczęściej od zakresu częstotliwości, w którym poszukiwane jest rozwiązanie danego zagadnienia dynamicznego, przy czym przeważnie są to formy z niskiego spektrum częstości, które mają największy wpływ na ruch konstrukcji. Oczywiście, im więcej form tym rozwiązanie jest dokładniejsze, co jednak z drugiej strony prowadzi do powiększenia zadania i wydłużenia czasu obliczeń. Zatem w tej metodzie, podobnie jak w innych metodach przybliżonych, wymagany jest kompromis między dokładnością, a nakładem obliczeniowym [75]. Należy tutaj podkreślić, że formy własne wyznacza się dla danej podstruktury dowolną metodą – eksperymentalnie w przypadku, gdy łatwiej jest zbudować model eksperymentalny niż numeryczny, natomiast w pozostałych przypadkach dominują metody Rayleigha-Ritza oraz MES. W niektórych pracach, zamiast obcinania wyższych form stosuje się metodę kondensacji dynamicznej [64]. Kondensację przeprowadza się na poziomie całej konstrukcji lub w obrębie danej podstruktury [84], [119]. Metoda polega na podziale liczby stopni swobody na nadrzędne (ang. *master*) oraz podrzędne (ang. *slave*). Liczbę stopni swobody typu *slave* dobiera się znacznie większą od liczby stopni swobody *master*. Następnie stopnie swobody *slave* są eliminowane w czasie procesu obliczeniowego, w celu redukcji

liczby równań modelu, w wyniku czego zagadnienie własne dla danej podstruktury jest rozwiązywane tylko dla stopni swobody typu *master*.

W pracy Hale i Meirovitcha [67] podkreśla się, że skoro metodę CMS wraz z jej wszystkimi wariantami zalicza się do metody Rayleigha-Ritza, to aproksymację można przedstawić ogólnie za pomocą zbioru funkcji dopuszczalnych (ang. *admissible functions*) spełniających kinematyczne warunki brzegowe, a wszystkie metody w których dokonuje się podziału na podstruktury można określić jedną nazwą „synteza podstruktur” (ang. *substructure synthesis*). Zwraca się także uwagę na fakt, że formy własne przy odpowiednio dużej bazie dają bardzo dobre wyniki, jednak z drugiej strony stanowią tylko podzbiór znacznie większej przestrzeni funkcji dopuszczalnych. Dlatego zasugerowano zastosowanie ciągłych funkcji obejmujących całą podstrukturę, które byłyby wydajne numerycznie (łatwość różniczkowania/całkowania), na przykład w postaci wielomianów dla podstruktur jednowymiarowych. Jen, Johnson i Dubois [75] stwierdzili, że w przypadku podstruktur dwuwymiarowych dobre wyniki uzyskuje się stosując różne kombinacje funkcji potęgowych. Morales [94] zauważył natomiast, że użycie tylko jednej „rodziny” funkcji dopuszczalnych może w niektórych przypadkach stwarzać problemy ze spełnieniem warunków brzegowych, dlatego w swojej pracy zaproponował zastosowanie liniowej kombinacji różnych typów funkcji dopuszczalnych. W literaturze przedstawiono także szereg rozwiązań metodą CMS, gdzie zamiast form własnych zastosowano m.in.: wektory Lanczosa [88], wektory Ritza [137] oraz wektory Kryłowa [37]. Pozycja literaturowa [65] zawiera szczegółowe porównanie zastosowania wektorów Kryłowa i Lanczosa z formami własnymi, wraz z analizą błędów. Przedstawiono przykładowe zadanie, gdzie przy użyciu wektorów Kryłowa zredukowano rozmiar zadania z 78000 do 1400 stopni swobody bez zauważalnej różnicy w otrzymanych wartościach częstości własnych.

Drugim ważnym krokiem następującym po wyborze zbioru funkcji założonych jest złożenie (synteza) podstruktur. Polega ona na redukcji nadmiarowych stopni swobody na styku podstruktur przy wykorzystaniu warunków ciągłości przemieszczeń oraz warunków równowagi sił w punktach połączeń podukładów. W celu wyznaczenia macierzy redukcji najczęściej stosuje się metodę mnożników Lagrange’a lub rozkład według wartości szczególnych (ang. *singular value decomposition*) [75]. W późniejszych latach stwierdzono, że w przypadku, gdy podstruktury są połączone w skończonej liczbie punktów, w celu uzyskania transformacji współrzędnych wystarczy zastosować procedurę agregacji znaną z algorytmu MES [116]. W przypadku, gdy liczba punktów na styku połączeń między podstrukturami jest znacząca w stosunku do rozmiaru całego zadania, stosowane są różne

metody redukcji brzegowych stopni swobody, na przykład przy użyciu metody kondensacji dynamicznej [12] lub operatora Poincaré-Steklova [11]. Jednak, gdy łączone są ze sobą podstruktury opisane ciągłymi funkcjami w przestrzeni dwu- lub trójwymiarowej, gdzie połączenia stanowią linie lub powierzchnie, liczba punktów połączeń jest nieskończona. Oczywistym postępowaniem jest wtedy nałożenie warunków ciągłości w skończonej liczbie punktów, przy czym rozwiązanie będzie tylko przybliżone. Hale i Meirovitch [67] zaproponowali zatem wprowadzenie dodatkowych funkcji wagowych pomiędzy łączonymi brzegami, które przy odpowiednim doborze typów tych funkcji oraz ich liczby będą spełniać warunki ciągłości w wybranych punktach z założonym błędem. Zastosowanie metody ważonych residuów do warunków ciągłości przedstawiono także w pracy [56], gdzie łączono podstruktury z niekompatybilnymi brzegami. Natomiast Biondi i Muscolino [7] zaprezentowali sposób postępowania w przypadku, gdy łączone są podstruktury opisane ciągłymi funkcjami z podstrukturami zdyskretyzowanymi metodą elementów skończonych. W kolejnym artykule Biondi, Muscolino i Sofi [8] wykorzystali ten algorytm do modelowania i analizowania interakcji pomiędzy ruchomym taborem kolejowym, torami i mostem wiszącym. Warto także wspomnieć o pracy [87], gdzie autorzy zaproponowali zastosowanie między brzegami łączonych podstruktur więzi odkształcalnych, których parametry sztywności i tłumienia można dostosować tak, aby uzyskać żadaną odpowiedź dynamiczną całego układu.

Pomimo, że Meirovitch wprowadził ogólniejszy termin „synteza podstruktur”, określający wszystkie metody, w których dokonuje się podziału na podstruktury, nie wszyscy autorzy prac w tym temacie przejęli ten termin. Może to wynikać z faktu, iż jak stwierdził Sotiropoulos [122], zarówno wszystkie warianty CMS, jak i synteza podstruktur oraz metoda kondensacji dynamicznej są metodami tożsamymi w sensie zapisu całego algorytmu. Klerk i in. [77] zaproponowali jeszcze ogólniejszą nazwę – „*dynamic substructuring*”, wraz ze szczegółową klasyfikacją metod podziału na podstruktury. Na potrzeby niniejszej pracy wprowadzono termin ogólny „technika podstruktur”, rozumiany jako procedura o następujących krokach:

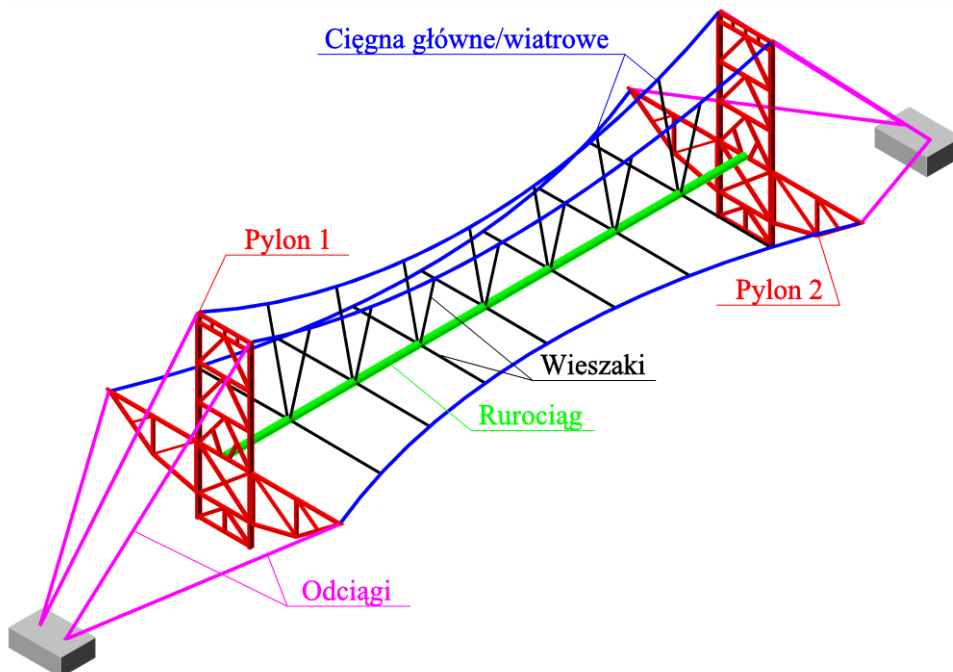
- ustalenie podziału złożonej konstrukcji na podstruktury na podstawie różnic fizycznych, geometrycznych lub arbitralnie wyznaczonych granic;
- wybór układów odniesienia oraz współrzędnych lokalnych opisujących ruch poszczególnych podstruktur;
- wybór zbioru funkcji bazowych opisujących ruch danej podstruktury, które powinny spełniać następujące kryteria [99]: liniowa niezależność i kompletność, niski nakład

obliczeniowy, dobre właściwości aproksymacyjne dostosowane do danej podstruktury, możliwość uwzględnienia indywidualnych cech specyficznych dla rozważanej podstruktury, łatwość złożenia/uzyskania równań ruchu całego układu;

- wyprowadzenie równań ruchu niezależnie dla każdej wydzielonej podstruktury;
- sformułowanie globalnego równania ruchu konstrukcji przy wykorzystaniu warunków ciągłości przemieszczeń i równowagi sił w punktach połączeń podstruktur.

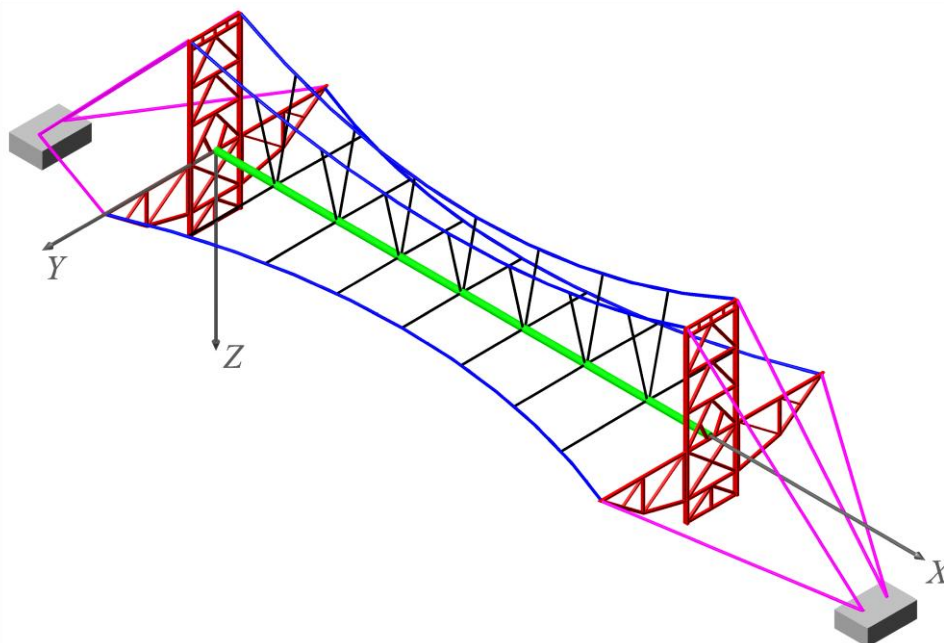
3.2. Główne założenia modelu obliczeniowego i podział na podstruktury

W niniejszej pracy zastosowano technikę podstruktur do opracowania ogólnej procedury, która umożliwia zbudowanie numerycznego modelu wiszącego mostu rurociągowego o praktycznie dowolnym systemie podwieszenia. Na potrzeby dalszych rozważań, nie tracąc przy tym ogólności prezentowanego algorytmu przyjęto, że analizowanym mostem jest jednoprzęsłowy wiszący most rurociągowy o schemacie przedstawionym na rysunku 3.1, gdzie jednoprzewodowy rurociąg jest bezpośrednio podwieszony do cięgien, tzn. nie spoczywa na pomoście, który zwiększałby sztywność całej konstrukcji. Zgodnie z ideą techniki podstruktur, system konstrukcyjny mostu podzielono na następujące podukłady będące grupami podobnych elementów konstrukcyjnych: cięgna główne i wiatrowe, odciągi, wieszaki, rurociąg oraz pylony. W modelu pominięto drugorzędne elementy konstrukcyjne, takie jak cięgna diagonalne oraz ściągi.



Rys. 3.1. Widok rozważanego wiszącego mostu rurociągowego

Przyjęto, że liczba płaszczyzn podwieszenia rurociągu N_p jest dowolna. W skład jednej płaszczyzny podwieszenia $J = I, II, \dots, N_p$ wchodzi jedno cięgno główne/wiatrowe, zestaw komplanarnych wieszaków oraz dwa odciaży. Założono, że płaszczyzny, w których leżą cięgna główne i wiatrowe są usytuowane koncentrycznie względem podłużnej osi rurociągu i mogą być nachylone pod dowolnym kątem względem płaszczyzny pionowej (por. rys. 3.7 – kąt φ_0^J). Odciaży są niezależnie połączone z pylonem, oraz generalnie nie są komplanarne z cięgnami głównymi i wieszakami. Wieszaki są rozstawione równomiernie na długości mostu, jednakowo we wszystkich płaszczyznach podwieszenia. Osie wieszaków są prostopadłe do osi rurociągu oraz przechodzą przez środek ciężkości jego przekroju. Dodatkowo przyjęto, że pylony „1” oraz „2” mają taką samą wysokość i są posadowione na tym samym poziomie, stąd cięciwy cięgien głównych/wiatrowych są poziome. Założono także, że oś podłużna rurociągu jest pozioma, co jest równoznaczne z pominięciem jej ewentualnego zakrzywienia, które można uznać za pomijalnie małe, jeśli strzałka trasy łukowej rurociągu jest dostatecznie mała wobec rozpiętości przęsła.



Rys. 3.2. Globalny układ współrzędnych zewnętrznych XYZ

Stan przemieszczenia mostu jest opisany względem stanu odniesienia, którego geometria jest określona w globalnym prostokątnym układzie współrzędnych zewnętrznych XYZ (rys. 3.2), pokrywającym się z lokalnym układem osi rurociągu x_b, y_b, z_b , oraz w lokalnych układach współrzędnych x, y, z cięgien głównych i odciaży, oznaczonych dalej indeksami

dolnymi zgodnie z numerem płaszczyzny podwieszenia oraz typem cięgna. Jako stan odniesienia przyjęto stan równowagi statycznej mostu, w którym rurociąg jest pusty, a jego ciężar własny jest w całości przekazywany przez wieszaki na wstępnie napięte cięgna główne i wiatrowe. Naciągi wstępne cięgien są tak dobrane, aby rurociąg w stanie odniesienia nie był zginany.

Przyjęto, że materiał wszystkich elementów konstrukcyjnych mostu jest liniowo-sprężysty, tj. podlega prawu Hooke'a. Pominięto ewentualne wpływy temperaturowe. Założono, że cięgna oraz odciały są przegubowo połączone z pylonami. Natomiast w przypadku rurociągu, w celu uogólnienia modelu, założono dowolne połączenie z pylonami. Możliwy jest także przypadek braku połączenia z pylonem i podparcie na osobnych fundamentach.

Na etapie formułowania modelu obliczeniowego założono, że rozważany most jest poddany działaniu dowolnie zdefiniowanych obciążeń zewnętrznych, zmiennych w czasie, przy czym za istotne uznano tylko obciążenia działające na rurociąg i pylony oraz cięgna główne i wiatrowe. W dalszych rozdziałach pracy, dotyczących wybranych zagadnień dynamiki, obciążenia zewnętrzne zostaną zdefiniowane szczegółowo, w tym obciążenie użytkowe (przepływ cieczy w rurociągu) i środowiskowe (oddziaływanie wiatru na rurociąg). Nie będą rozpatrywane obciążenia zewnętrzne działające na cięgna i pylony.

Założenia precyzujące poszczególne podstruktury modelu obliczeniowego oraz oznaczenia będą wprowadzane sukcesywnie w kolejnych punktach niniejszego rozdziału, gdzie zostaną sformułowane równania ruchu, niezależnie dla każdej podstruktury, przy użyciu indywidualnie dobranej metody, którą uznano za efektywną z punktu widzenia opisu drgań danego podukładu. W tej pracy uznano za celowe wykorzystanie MES z zastosowaniem standardowych elementów prętowych do modelowania pylonów, ze względu na dużą różnorodność zastosowanych rozwiązań konstrukcyjnych. W przypadku rurociągu, gdzie ze względu na jego dużą smukłość konieczne jest uwzględnienie dużych przemieszczeń skutkujących nieliniowością geometryczną, równania ruchu zostaną sformułowane przy użyciu MES w ujęciu Galerkina. Metoda ta będzie zastosowana do przekształcenia nieliniowych, cząstkowych równań różniczkowych opisujących drgania giętne rurociągu w dwóch płaszczyznach, do postaci równań zapisanych w dziedzinie czasu. Do opisu drgań cięgien zostanie sformułowany ciągły, nieliniowy model wstępnie napiętego cięgna o dowolnie nachylonej cięciwie, obciążony punktowo reakcjami wieszaków. Pierwowzór modelu przedstawiono w pracach Bryji, Prokopowicza i Woszczyzny ([15] oraz [139]), a jego uogólnienie w pracy Knawy-Hawryszków, Prokopowicza i Bryji [81]. Model ten uwzględni

dowolny zwis statyczny spowodowany rozłożonym ciężarem własnym oraz wpływ dużych przemieszczeń. Bardzo ważną cechą opracowanego modelu ciężna jest uwzględnienie kinematycznego wymuszenia drgań, spowodowanego ruchem punktów połączeń ciężna z innymi elementami konstrukcji. Taki opis ciężna dobrze wpisuje się w technikę podstruktur, a dodatkowo, ze względu na ogólnie postawione założenia dotyczące geometrii, może być zastosowany nie tylko do ciężien będących elementami mostów wiszących, ale także want mostów podwieszonych, odciągów masztów, dachów oraz innych konstrukcji ciężnowych. Możliwe jest także rozszerzenie modelu na wieloprzęsłowe konstrukcje ciężnowe. Przykładami takich prac są artykuły Knawy-Hawryszków i Bryji [79], [80], dotyczące dynamiki ciężna nośnego kolejki linowej. Wieszaki są modelowane jako odkształcalne, nieważkie pręty kratownicowe z pominięciem efektów drugiego rzędu.

3.3. Równania ruchu podstruktur

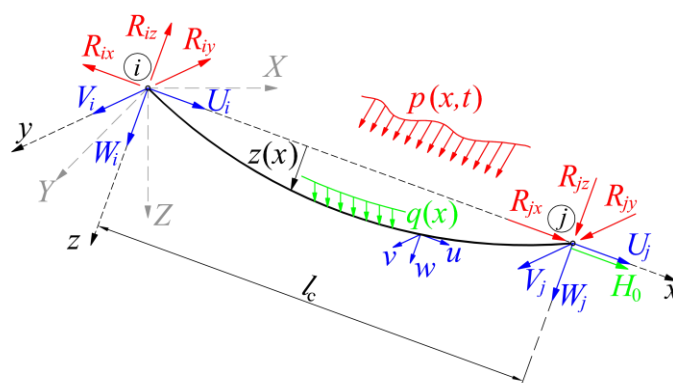
3.3.1. Elementy ciężnowe

Literatura poświęcona dynamice ciężna jest bardzo bogata. Wciąż jednak powstają nowe opracowania, ponieważ ciężna są powszechnie używane jako elementy nośne wielu różnych konstrukcji, a zagadnienie drgań ciężna, zwłaszcza gdy brana jest pod uwagę nieliniowość, jest w dalszym ciągu problemem ważnym i trudnym. Jedno z pierwszych analitycznych rozwiązań przestrzennych drgań ciężna zostało zaprezentowane przez Irvina i Caugheya w pracy z 1974 roku [71]. Analizowano w niej jednak uproszczony, liniowy model ciężna poziomego. Irvin w swojej książce [72] przedstawił później rozwiązania zagadnienia własnego dla ciężna nachylonego z małym oraz dużym zwisem. Ponadto zaprezentował także równania drgań ciężna z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej, jednak bez ich rozwiązywania. W późniejszych latach skupiono uwagę przede wszystkim na opracowaniu modelu nieliniowego. Z przykładowych prac warto wymienić artykuły: Takahashi i Konishi [132], [133], Benedettini i Regi [5], Ni, Lou oraz Ko [97], Desai i Punde [45], Zhao et al. [149], oraz Berlioza i Lamarque [6]. Szczególnie ciekawy jest przestrzenny model ciężna zaprezentowany przez Desai i Punde w 2001 roku, gdzie głównym celem autorów było uzyskanie poprawnej odpowiedzi dynamicznej nachylonego ciężna przy użyciu jak najmniejszej liczby stopni swobody. W tym celu stan przemieszczenia ciężna opisano za pomocą liniowej kombinacji wybranych form własnych w postaci funkcji trygonometrycznych, z uwzględnieniem przemieszczeń punktów podparcia ciężna. Zwrócono uwagę, że taki model ciężna można łatwo połączyć z innymi elementami konstrukcyjnymi

modelowanymi za pomocą MES. Podobne podejście zastosowano w niniejszej pracy do opisu drgań cięgien głównych i wiatrowych oraz odciągów.

W dalszych rozważaniach, w pierwszej kolejności wyprowadzone zostaną ogólne równania ruchu cięgna, następnie będą wprowadzone dodatkowe założenia szczegółowe w celu sformułowania równań ruchu cięgien głównych/wiatrowych oraz odciągów składających się na płaszczyznę podwieszenia o numerze „ J ” w rurociągowym moście wiszącym.

Ogólny model cięgna



Rys. 3.3. Schemat ogólnego modelu cięgna

Główne założenia modelu cięgna oraz podstawowe oznaczenia (rys. 3.3) są następujące:

- cięgno jest idealnie wiotkie, podparte na brzegach „ i ” oraz „ j ”;
- cięciwa cięgna o długości l_c jest nachylona pod dowolnym kątem względem osi globalnego układu współrzędnych XYZ i wyznacza kierunek osi lokalnej x ;
- w stanie równowagi statycznej, przyjętym za stan odniesienia:
 - cięgno jest obciążone ciężarem własnym $q(x)$ rozłożonym wzdłuż krzywoliniowej osi cięgna;
 - cięgno jest obciążone dowolnie rozłożonym i nachylonym, stałym obciążeniem zewnętrznym o intensywności $p_0(x)$ mierzonyj na jednostkę długości cięciwy;
 - cięgno jest wstępnie napięte siłą stałą H_0 działającą wzdłuż cięciwy i przyłożoną w węzle „ j ”;
 - statyczna trasa cięgna, opisana funkcją $z(x)$, leży w płaszczyźnie xz nachylonej pod dowolnym kątem względem płaszczyzny pionowej;

- pod wpływem działania obciążeń statycznych $q(x)$ i $p_0(x)$ oraz wstępnego napięcia H_0 w cięgnie występuje siła osiowa $N_0(x)$ oraz reakcje podporowe R_{0i} i R_{0j} ;
- w stanie odkształconym:
 - cięgno jest obciążone dodatkowo dowolnie rozłożonym i nachylonym obciążeniem zmiennym w czasie o intensywności $\Delta p(x,t)$ mierzonej na jednostkę długości cięciwy;
 - występuje ruch podpór określony przemieszczeniami $U_i(t)$, $V_i(t)$, $W_i(t)$ oraz $U_j(t)$, $V_j(t)$, $W_j(t)$;
 - pod wpływem działania obciążenia zmiennego $\Delta p(x,t)$ oraz ruchu podpór cięgno doznaje przemieszczeń zmiennych w czasie mierzonych względem statycznie zrównoważonej konfiguracji odniesienia, które są opisane poprzez trzy składowe $u(x,t)$, $v(x,t)$ oraz $w(x,t)$ o kierunkach zgodnych z osiami lokalnego układu współrzędnych, odpowiednio x , y oraz z ;
 - przemieszczeniom cięgna towarzyszy przyrost siły osiowej $\Delta N(x,t)$, oraz przyrost wartości reakcji podpór $\Delta R_i(t)$ i $\Delta R_j(t)$.

Składowe całkowitego obciążenia zewnętrznego są sumami odpowiednich składowych obciążeń stałych (z indeksem „0”) oraz obciążeń dynamicznych (poprzedzonych symbolem „ Δ ”), tj. $p_{-}(x,t) = p_{0-}(x) + \Delta p_{-}(x,t)$, gdzie indeks dolny „ $-$ ” oznacza odpowiednio x , y lub z . Analogicznie można zapisać składowe reakcji podpór „ i ” oraz „ j ”, tj. $R_{i-}(t) = R_{0i-} + \Delta R_{i-}(t)$, $R_{j-}(t) = R_{0j-} + \Delta R_{j-}(t)$. Całkowita siła osiowa w cięgnie jest sumą wstępnej siły statycznej oraz dynamicznego przyrostu i wyraża się wzorem $N(x,t) = N_0(x) + \Delta N(x,t)$.

Równania równowagi dynamicznej, wyprowadzone na podstawie analizy stanu równowagi elementu cięgna w konfiguracji bieżącej (odkształconej), czyli z uwzględnieniem efektów drugiego rzędu wynikających z odrzucenia zasady zeszywnienia, mają postać:

$$\begin{aligned}
 -[N \cos \alpha]' + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{u} &= q_x (\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0x} + \Delta p_x, \\
 -[N \cos \beta]' + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{v} &= q_y (\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0y} + \Delta p_y, \\
 -[N \cos \gamma]' + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{w} &= q_z (\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0z} + \Delta p_z.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Szczegółową analizę odkształconego stanu cięgna wraz z wyprowadzeniem tych równań przedstawiono w pracach [15], [81] oraz [139]. Symbol m_c oznacza masę cięgna na jednostkę jego długości, $\alpha_0 = \alpha_0(x)$ jest kątem kierunkowym stycznej do trasy cięgna w konfiguracji odniesienia i spełnia zależność $\cos \alpha_0 = (1+z'^2)^{-1/2}$, natomiast $\alpha = \alpha(x,t)$, $\beta = \beta(x,t)$ oraz

$\gamma = \gamma(x,t)$ są kątami kierunkowymi stycznej do trasy cięgna w konfiguracji odkształconej, ponadto $(\cdot)' = \partial/\partial x$, $(\cdot)' = \partial/\partial t$.

Uwzględniając, że $\cos\alpha = \cos\alpha_0(1+u')$, $\cos\beta = \cos\alpha_0 v'$, $\cos\gamma = \cos\alpha_0(z'+w')$ [66] oraz podstawiając wyrażenie określające całkowitą siłę osiową w cięgnie, równania (3.1) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} -[(N_0 + \Delta N) \cos \alpha_0(1 + u')] + m_c(\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{u} &= q_x(\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0x} + \Delta p_x, \\ -[(N_0 + \Delta N) \cos \alpha_0 v'] + m_c(\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{v} &= q_y(\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0y} + \Delta p_y, \\ -[(N_0 + \Delta N) \cos \alpha_0(z' + w')] + m_c(\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{w} &= q_z(\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0z} + \Delta p_z. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dynamiczny przyrost siły w cięgnie $\Delta N(x,t)$ z materiału liniowo-sprężystego wynika z prawa Hooke'a, wtedy $\Delta N(x,t) = \varepsilon E_c A_c$, gdzie $E_c A_c$ jest sztywnością osiową cięgna. Odkształcenie podłużne $\varepsilon(x,t)$ obliczone względem statycznej wartości odkształcenia wyraża się wzorem $\varepsilon(x,t) = \cos^2 \alpha_0(u' + z'w' + u'^2/2 + v'^2/2 + w'^2/2)$ (odkształcenie względne Green'a-Langrange'a). W przypadku małych przemieszczeń człony nieliniowe mogą być pominięte, jednak ze względu na spodziewane duże przemieszczenia równania ruchu zostaną wyprowadzone z uwzględnieniem nieliniowych składników odkształcenia.

W konfiguracji odniesienia człony związane z dynamiką (zależne od czasu) w równaniu (3.2) są równe zero, tj. $\Delta p(x,t) = 0$, wtedy $u(x,t) = 0$, $v(x,t) = 0$, $w(x,t) = 0$ i wówczas $\Delta N(x,t) = 0$. W efekcie otrzymuje się równania równowagi statycznej:

$$\begin{aligned} -(N_0 \cos \alpha_0)' &= q_x(\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0x}, \\ 0 &= q_y(\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0y}, \\ -(z' N_0 \cos \alpha_0)' &= q_z(\cos \alpha_0)^{-1} + p_{0z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Z równań (3.3)₁ oraz (3.3)₃ wyznacza się odpowiednio – wymagany wstępny naciąg H_0 oraz krzywą zwisu statycznego $z(x)$. Z równania (3.3)₂ wynika, że składowa ciężaru $q_y(x)$ musi być kompensowana przez odpowiednie dobranie obciążenia zewnętrznego $p_{0y}(x)$. W praktyce oznacza to zastosowanie drugorzędnych elementów konstrukcyjnych (ściągów i cięgien diagonalnych) przenoszących ten dodatkowy ciężar. Po wyeliminowaniu z równań (3.2) równań równowagi statycznej (3.3) otrzymuje się układ nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych opisujących przestrzenne drgania cięgna. Mają one postać:

$$\begin{aligned}
& -[N_0 \cos \alpha_0 u' + \Delta N \cos \alpha_0 (1 + u')] + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{u} = \Delta p_x, \\
& -[N_0 \cos \alpha_0 v' + \Delta N \cos \alpha_0 v'] + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{v} = \Delta p_y, \\
& -[N_0 \cos \alpha_0 w' + \Delta N \cos \alpha_0 (z' + w')] + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{w} = \Delta p_z.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Korzystając z zależności na dynamiczne przyrosty składowych siły osiowej w trzech kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych:

$$\begin{aligned}
\Delta N_x(x,t) &= N_x(x,t) - N_{0x}(x) = (N_0 + \Delta N) \cos \alpha - N_{0x} = \\
&= (N_0 + \Delta N) \cos \alpha_0 (1 + u') - N_0 \cos \alpha_0 = N_0 \cos \alpha_0 u' + \Delta N \cos \alpha_0 (1 + u'), \\
\Delta N_y(x,t) &= N_y(x,t) - N_{0y}(x) = (N_0 + \Delta N) \cos \beta - N_{0y} = \\
&= (N_0 + \Delta N) \cos \alpha_0 v' - 0 = N_0 \cos \alpha_0 v' + \Delta N \cos \alpha_0 v', \\
\Delta N_z(x,t) &= N_z(x,t) - N_{0z}(x) = (N_0 + \Delta N) \cos \gamma - N_{0z} = \\
&= (N_0 + \Delta N) \cos \alpha_0 (z' + w') - N_0 \cos \alpha_0 z' = N_0 \cos \alpha_0 w' + \Delta N \cos \alpha_0 (z' + w'),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

równania (3.4) można zapisać w prostszej postaci:

$$\begin{aligned}
& -\Delta N_x' + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{u} = \Delta p_x, \\
& -\Delta N_y' + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{v} = \Delta p_y, \\
& -\Delta N_z' + m_c (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{w} = \Delta p_z.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Podstawiając dynamiczny przyrost siły w ciągnie wynikający z prawa Hooke'a do wzorów (3.5) oraz porządkując poszczególne wyrazy otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\Delta N_x &= N_0 \cos \alpha_0 u' + E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (u' + z'w') + 1/2 E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{u'^2 + v'^2 + w'^2}) + \\
&+ E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{u'^2 + z'u'w'}) + 1/2 E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{u'^3 + u'v'^2 + u'w'^2}), \\
\Delta N_y &= N_0 \cos \alpha_0 v' + E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (u'v' + z'v'w') + 1/2 E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{u'^2v' + v'^3 + v'w'^2}), \\
\Delta N_z &= N_0 \cos \alpha_0 w' + E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (z'u' + z'^2w') + 1/2 E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{z'u'^2 + z'v'^2 + z'w'^2}) + \\
&+ E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{u'w' + z'w'^2}) + 1/2 E_c A_c (\cos \alpha_0)^3 (\underline{u'^2w' + v'^2w' + w'^3}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Wraz z pominięciem składników nieliniowych (zawierających podkreślone czynniki) zadanie redukuje się do zagadnienia liniowego. W przypadku zagadnienia nieliniowego na ogół pomija się składniki wyższego rzędu niż drugi (jako małe wyższego rzędu), zatem w dalszych rozważaniach pominięto w (3.7) składniki z podwójnym podkreśleniem.

W celu przekształcenia układu cząstkowych równań różniczkowych (3.6) do układu równań różniczkowych zwyczajnych w dziedzinie czasu zastosowano standardową procedurę Galerkiną, gdzie dyskretyzację względem zmiennej przestrzennej x przeprowadza się

wprowadzając kinematycznie i kinetycznie dopuszczalną aproksymację stanu przemieszczenia. Jeśli uwzględnimy dalej, że $\Delta N(0,t) = \Delta R_i(t)$ i $\Delta N(l_c,t) = \Delta R_j(t)$, to w rozważanym przypadku wystarczające jest spełnienie kinematycznych warunków brzegowych: $u(0,t) = U_i(t)$, $v(0,t) = V_i(t)$, $w(0,t) = W_i(t)$, $u(l_c,t) = U_j(t)$, $v(l_c,t) = V_j(t)$, $w(l_c,t) = W_j(t)$, które wynikają z warunków ciągłości przemieszczeń w punktach połączenia ciągła z konstrukcją. Przyjęto następującą aproksymację przemieszczeń, spełniającą powyższe warunki:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left(1 - \frac{x}{l_c}\right) U_i(t) + \frac{x}{l_c} U_j(t) + \sum_{k=1}^{n_c} \sin \frac{k\pi x}{l_c} q_{uk}(t), \\ v(x,t) &= \left(1 - \frac{x}{l_c}\right) V_i(t) + \frac{x}{l_c} V_j(t) + \sum_{k=1}^{n_c} \sin \frac{k\pi x}{l_c} q_{vk}(t), \\ w(x,t) &= \left(1 - \frac{x}{l_c}\right) W_i(t) + \frac{x}{l_c} W_j(t) + \sum_{k=1}^{n_c} \sin \frac{k\pi x}{l_c} q_{wk}(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Wprowadzając wektor zbiorczy współrzędnych $\mathbf{q}_c = \text{col}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{q}_u, \mathbf{q}_v, \mathbf{q}_w)$, na który składają się wektory przemieszczeń brzegowych $\mathbf{r}_i = \text{col}(U_i, V_i, W_i)$, $\mathbf{r}_j = \text{col}(U_j, V_j, W_j)$ oraz wektory współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_v, \mathbf{q}_w$ (każdy o wymiarze $n_c \times 1$), relacje (3.8) można zapisać w poniższej kompaktowej postaci:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (1-\zeta)\mathbf{e}_u^T \mathbf{r}_i(t) + \zeta \mathbf{e}_u^T \mathbf{r}_j(t) + \mathbf{s}^T(\zeta) \mathbf{q}_u(t) = \mathbf{f}_u^T \mathbf{q}_c, \\ v(x,t) &= (1-\zeta)\mathbf{e}_v^T \mathbf{r}_i(t) + \zeta \mathbf{e}_v^T \mathbf{r}_j(t) + \mathbf{s}^T(\zeta) \mathbf{q}_v(t) = \mathbf{f}_v^T \mathbf{q}_c, \\ w(x,t) &= (1-\zeta)\mathbf{e}_w^T \mathbf{r}_i(t) + \zeta \mathbf{e}_w^T \mathbf{r}_j(t) + \mathbf{s}^T(\zeta) \mathbf{q}_w(t) = \mathbf{f}_w^T \mathbf{q}_c. \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie $\mathbf{f}_u = \text{col}((1-\zeta)\mathbf{e}_u, \zeta \mathbf{e}_u, \mathbf{s}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{f}_v = \text{col}((1-\zeta)\mathbf{e}_v, \zeta \mathbf{e}_v, \mathbf{0}, \mathbf{s}, \mathbf{0})$, $\mathbf{f}_w = \text{col}((1-\zeta)\mathbf{e}_w, \zeta \mathbf{e}_w, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{s})$ są wektorami funkcji aproksymacyjnych, poszerzonymi do zbiorczej bazy \mathbf{q}_c , oraz $\mathbf{e}_u = \text{col}(1,0,0)$, $\mathbf{e}_v = \text{col}(0,1,0)$, $\mathbf{e}_w = \text{col}(0,0,1)$, $\mathbf{s} = \text{col}(\sin\pi\zeta, \sin2\pi\zeta, \dots, \sin n_c \pi \zeta)$, $\zeta = x/l_c$, $(\)^T$ oznacza operację transpozycji macierzowej, a symbol „col” macierz kolumnową.

Dalsza procedura, dla ustalenia uwagi, zostanie opisana na przykładzie równania (3.6)₁. Mnożąc to równanie lewostronnie przez \mathbf{f}_u oraz całkując obustronnie w granicach od 0 do l_c otrzymuje się

$$-\int_0^{l_c} \mathbf{f}_u^T \Delta N_x' dx + m_c \int_0^{l_c} \mathbf{f}_u^T (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{u} dx = \int_0^{l_c} \mathbf{f}_u^T \Delta p_x dx, \quad (3.10)$$

a po wykonaniu na pierwszym składniku całkowania przez części

$$-\mathbf{f}_u \Delta N_x(l_c, t) + \mathbf{f}_u \Delta N_x(0, t) + \int_0^{l_c} \mathbf{f}'_u \Delta N_x dx + m_c \int_0^{l_c} \mathbf{f}_u (\cos \alpha_0)^{-1} \ddot{u} dx = \int_0^{l_c} \mathbf{f}_u \Delta p_x dx. \quad (3.11)$$

Uwzględnienie (3.7)₁ w powyższym równaniu, z podstawioną aproksymacją (3.9) oraz ograniczeniem składników nieliniowych do rzędu drugiego, daje wynik

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_c} \mathbf{f}'_u (N_0 \cos \alpha_0 \mathbf{f}'_u{}^T) dx \mathbf{q}_c + E_c A_c \int_0^{l_c} \mathbf{f}'_u [(\cos \alpha_0)^3 (\mathbf{f}'_u{}^T + z' \mathbf{f}'_w{}^T)] dx \mathbf{q}_c + \\ & + \frac{1}{2} E_c A_c \int_0^{l_c} \mathbf{f}'_u \mathbf{q}_c^T [(\cos \alpha_0)^3 (\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + \mathbf{f}'_v \mathbf{f}'_v{}^T + \mathbf{f}'_w \mathbf{f}'_w{}^T)] dx \mathbf{q}_c + \\ & + E_c A_c \int_0^{l_c} \mathbf{f}'_u \mathbf{q}_c^T [(\cos \alpha_0)^3 (\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + z' \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_w{}^T)] dx \mathbf{q}_c + \\ & + m_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^{-1} \mathbf{f}_u \mathbf{f}_u^T dx \ddot{\mathbf{q}}_c = \int_0^{l_c} \mathbf{f}_u \Delta p_x dx + \mathbf{f}_u \Delta N_x(l_c, t) - \mathbf{f}_u \Delta N_x(0, t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu, że $\Delta N_x(0, t) = \Delta R_{ix}(t)$ i $\Delta N_x(l_c, t) = \Delta R_{jx}(t)$, otrzymuje się układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu, który zapisany w notacji macierzowej ma postać

$$\mathbf{B}_{cu} \ddot{\mathbf{q}}_{cu} + [\mathbf{K}_{cu} + \mathbf{K}_{cu}^{nl}(\mathbf{q}_c)] \mathbf{q}_c = \mathbf{F}_{cu} + \mathbf{R}_{ciu} + \mathbf{R}_{cju}, \quad (3.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{cu} &= m_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^{-1} \mathbf{f}_u \mathbf{f}_u^T dx, \\ \mathbf{K}_{cu} &= \int_0^{l_c} N_0 \cos \alpha_0 \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T dx + E_c A_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^3 (\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + z' \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_w{}^T) dx, \\ \mathbf{K}_{cu}^{nl}(\mathbf{q}_c) &= \frac{1}{2} E_c A_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^3 \mathbf{f}'_u \mathbf{q}_c^T (\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + \mathbf{f}'_v \mathbf{f}'_v{}^T + \mathbf{f}'_w \mathbf{f}'_w{}^T) dx + \\ & + E_c A_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^3 \mathbf{f}'_u \mathbf{q}_c^T (\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + z' \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_w{}^T) dx, \\ \mathbf{F}_{cu} &= \int_0^{l_c} \mathbf{f}_u \Delta p_x dx, \\ \mathbf{R}_{ciu} &= -\mathbf{f}_u(0) \Delta R_{ix}(t), \\ \mathbf{R}_{cju} &= \mathbf{f}_u(l_c) \Delta R_{jx}(t). \end{aligned}$$

Powtarzając procedurę w analogiczny sposób dla dwóch pozostałych równań: (3.6)₂ oraz (3.6)₃, otrzymuje się trzy równania typu (3.13), które po uwzględnieniu tłumienia drgań można zapisać łącznie w następującej postaci

$$\mathbf{B}_c \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{q}}_c + [\mathbf{K}_c + \mathbf{K}_c^{nl}(\mathbf{q}_c)] \mathbf{q}_c = \mathbf{F}_c + \mathbf{R}_{ci} + \mathbf{R}_{cj}, \quad (3.14)$$

gdzie macierze bezwładności \mathbf{B}_c , sztywności w zakresie liniowym \mathbf{K}_c i sztywności w zakresie nieliniowym $\mathbf{K}_c^{nl}(\mathbf{q}_c)$, oraz wektory obciążeń uogólnionych \mathbf{F}_c i oddziaływań w punktach podparcia \mathbf{R}_{ci} , \mathbf{R}_{cj} są sumami odpowiednich macierzy opisanych wzorami typu (3.13). Przykładowo, macierz bezwładności jest wyrażona wzorem $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_{cu} + \mathbf{B}_{cv} + \mathbf{B}_{cw}$. Macierz \mathbf{C}_c jest macierzą tłumienia obliczoną na podstawie wybranego modelu tłumienia wiskotycznego. Poszczególne macierze łączne są opisane następującymi wzorami:

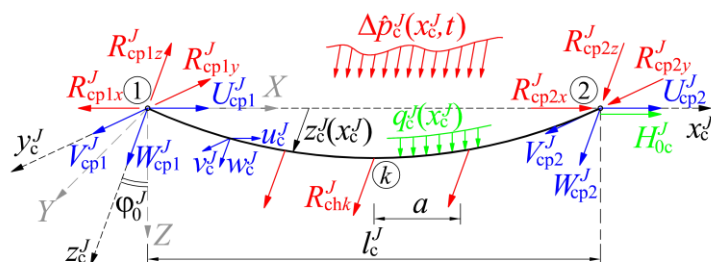
$$\begin{aligned} \mathbf{B}_c &= m_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^{-1} (\mathbf{f}_u \mathbf{f}_u^T + \mathbf{f}_v \mathbf{f}_v^T + \mathbf{f}_w \mathbf{f}_w^T) dx, \\ \mathbf{K}_c &= \int_0^{l_c} \cos \alpha_0 N_0 \mathbf{E} dx + E_c A_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^3 (\mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + z' \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_w{}^T + z' \mathbf{f}'_w \mathbf{f}'_u{}^T + z'^2 \mathbf{f}'_w \mathbf{f}'_w{}^T) dx, \\ \mathbf{K}_c^{nl} &= \frac{1}{2} E_c A_c \int_0^{l_c} (\cos \alpha_0)^3 [(\mathbf{Q}\mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{Q}^T) + \lambda \mathbf{E}] dx, \\ \mathbf{F}_c &= \int_0^{l_c} (\mathbf{f}_u \Delta p_x + \mathbf{f}_v \Delta p_y + \mathbf{f}_w \Delta p_z) dx, \\ \mathbf{R}_{ci} &= -[\mathbf{f}_u(0) \Delta R_{ix} + \mathbf{f}_v(0) \Delta R_{iy} + \mathbf{f}_w(0) \Delta R_{iz}], \\ \mathbf{R}_{cj} &= \mathbf{f}_u(l_c) \Delta R_{jx} + \mathbf{f}_v(l_c) \Delta R_{jy} + \mathbf{f}_w(l_c) \Delta R_{jz}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{E} = \mathbf{f}'_u \mathbf{f}'_u{}^T + \mathbf{f}'_v \mathbf{f}'_v{}^T + \mathbf{f}'_w \mathbf{f}'_w{}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{f}'_u \mathbf{q}_c^T + z' \mathbf{f}'_w \mathbf{q}_c^T$, $\lambda = \mathbf{q}_c^T \mathbf{f}'_u + z' \mathbf{q}_c^T \mathbf{f}'_w$. Wektory \mathbf{R}_{ci} oraz \mathbf{R}_{cj} zawierają składowe przyrostów uogólnionych reakcji na podporach, które są dynamicznymi oddziaływaniami konstrukcji na ciągnio.

Model cięgien głównych i wiatrowych oraz odciągów

Przedstawiony ogólny model ciągnia posłużył jako punkt wyjścia w celu sformułowania równań ruchu dla cięgien głównych i wiatrowych (rys. 3.4) oraz odciągów (rys. 3.5ab) wchodzących w skład płaszczyzny podwieszenia „J”. W celu odróżnienia równań cięgien głównych od odciągów wszystkie wielkości związane z ciągnem głównym i wiatrowym oznaczono indeksem „c”, natomiast w przypadku odciągów stosowane będzie

oznaczenie „s” wraz z numerem pylonu („1” lub „2”) do którego są zamocowane. Symbol „h” będzie oznaczeniem wyrażeń dotyczących wieszaków, a „k” numerem wieszaka w danej płaszczyźnie podwieszenia. Pylony „1” oraz „2” oznaczono symbolami „p1” oraz „p2”. Wielkości związane z rurociągiem opatrzone indeksem „b”. Dodatkowo, w przypadku wielkości pojawiających się w miejscach połączeń podukładów, wprowadzono drugi indeks związany z przylegającą podstrukturą.



Rys. 3.4. Schemat modelu cięgna głównego/wiatrowego w płaszczyźnie podwieszenia „J”

Dla cięgien głównych i wiatrowych przyjęto następujące dodatkowe założenia w odniesieniu do ogólnego modelu cięgna:

- cięciwa cięgna jest pozioma ($\cos(X, x_c^J) = 1$, wtedy $q_{cx}^J = 0$);
- cięgno jest połączone na brzegach z pylonami „p1” oraz „p2”;
- wieszaki są rozłożone równomiernie na długości cięgna, jednakowo we wszystkich płaszczyznach podwieszenia, w stałym rozstawie $a^J = a$;
- w stanie równowagi statycznej:
 - cięgno wstępnie napięte siłą H_{0c}^J jest obciążone tylko ciężarem własnym i stałymi reakcjami wieszaków R_{0chk}^J ;
 - statyczna trasa cięgna leży w płaszczyźnie $x_c^J z_c^J$ nachylonej względem płaszczyzny pionowej pod kątem φ_0^J ($\cos(Z, z_c^J) = \cos \varphi_0^J$, zatem $q_{cy}^J = m_c^J g \sin \varphi_0^J$, $q_{cz}^J = m_c^J g \cos \varphi_0^J$);
 - paraboliczny przebieg trasy cięgna jest wymuszony odpowiednio gęsto rozstawionymi wieszakami i opisany funkcją $z_c^J(x_c^J) = 4f_c^J x_c^J (l_c^J - x_c^J) / (l_c^J)^2$, gdzie f_c^J jest strzałką zwisu;
- w stanie odkształconym:

- o ciągnie jest obciążone dodatkowo dowolnym obciążeniem zmiennym w czasie $\Delta\hat{p}_c^J(x_c^J, t)$ mierzonym na jednostkę długości cięciwy oraz dynamicznymi przyrostami reakcji wieszaków $\Delta R_{ch k}^J(t)$.

Składowe stałego obciążenia zewnętrznego w stanie odniesienia można obliczyć ze wzorów $p_{0cx}^J = 0$, $p_{0cz}^J = \sum_{k=1}^{n_h} R_{0chk}^J \delta(x_c^J - x_{ck}^J)$, gdzie $\delta(x)$ oznacza funkcję delta Diraca, a x_{ck}^J jest współrzędną punktu połączenia cięgna w płaszczyźnie „J” z wieszakiem o numerze $k = 1, 2, \dots, n_h$ gdzie n_h oznacza tutaj przyjętą liczbę wieszaków w jednej płaszczyźnie podwieszenia. Składowa obciążenia p_{0cy}^J , wynikająca z zastosowania drugorzędnych lin konstrukcyjnych, które są łącznikami pomiędzy cięgnami głównymi, równowazy składową ciężaru własnego w kierunku osi y, co można opisać relacją $p_{0cy}^J = -q_{cy}^J (\cos \alpha_{0c}^J)^{-1}$. Dodatkowo, dynamiczne obciążenie cięgna w konfiguracji bieżącej wynosi $\Delta p_{cx}^J = \Delta \hat{p}_{cx}^J$, $\Delta p_{cy}^J = \Delta \hat{p}_{cy}^J$, $\Delta p_{cz}^J = \Delta \hat{p}_{cz}^J + \sum_{k=1}^{n_h} \Delta R_{ch k}^J \delta(x_c^J - x_{ck}^J)$ i jest sumą składowej dowolnego obciążenia zmiennego w czasie i dynamicznych przyrostów sił przekazywanych przez wieszaki.

Mając na uwadze powyższe założenia, równania równowagi statycznej (3.3) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} -(N_{0c}^J \cos \alpha_{0c}^J)' = 0 &\Rightarrow N_{0c}^J \cos \alpha_{0c}^J = H_{0c}^J = \text{const}, \\ q_{cy}^J (\cos \alpha_{0c}^J)^{-1} + p_{0cy}^J &\equiv 0, \\ -(z_c^J)'' H_{0c}^J = q_{cz}^J (\cos \alpha_{0c}^J)^{-1} + \sum_{k=1}^{n_h} R_{0chk}^J \delta(x_c^J - x_{ck}^J). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Z równania (3.15)₁ wynika, że składowa siły osiowej zrzutowanej na kierunek cięciwy jest stała na długości cięgna i równa wstępnemu naciągowi statycznemu H_{0c}^J . Ponadto, aby trasa cięgna była paraboliczna, należy obciążenia stałe cięgna reprezentowane przez prawą stronę równania (3.15)₃ zastąpić obciążeniem uśrednionym, rozłożonym równomiernie na długości cięciwy l_c^J

$$\tilde{q}_{cz}^J = \frac{1}{l_c^J} \int_0^{l_c^J} [q_{cz}^J (\cos \alpha_{0c}^J)^{-1} + \sum_{k=1}^{n_h} R_{0chk}^J \delta(x_c^J - x_{ck}^J)] dx = \frac{1}{l_c^J} (q_{cz}^J L_c^J + \sum_{k=1}^{n_h} R_{0chk}^J), \quad (3.16)$$

gdzie $L_c^J = \int_0^{l_c^J} (\cos \alpha_{0c}^J)^{-1} dx$ jest długością cięgną. Wówczas, po uwzględnieniu zależności $(z_c^J)'' = -8f_c^J / (l_c^J)^2$, równanie (3.15)₃ przekształca się do wzoru na minimalny, statyczny naciąg cięgną w płaszczyźnie podwieszenia „J”, wymagany do przeniesienia ciężaru własnego konstrukcji

$$H_{0c}^J = \tilde{q}_{cz}^J (l_c^J)^2 / 8f_c^J. \quad (3.17)$$

W płaszczyźnie podwieszenia „J” składowe przemieszczenia dowolnego punktu na długości cięgną głównego/wiatrowego oblicza się według relacji $u_c^J(x_c^J, t) = (\mathbf{f}_{cu}^J)^T \mathbf{q}_c^J$, $v_c^J(x_c^J, t) = (\mathbf{f}_{cv}^J)^T \mathbf{q}_c^J$, $w_c^J(x_c^J, t) = (\mathbf{f}_{cw}^J)^T \mathbf{q}_c^J$, gdzie $\mathbf{q}_c^J = \text{col}(\mathbf{r}_{cp1}^J, \mathbf{r}_{cp2}^J, \mathbf{q}_{cu}^J, \mathbf{q}_{cv}^J, \mathbf{q}_{cw}^J)$ to wektor zbiorczy, na który składają się wektory przemieszczeń brzegowych w punktach połączenia z pylonem „p1” oraz „p2”, odpowiednio $\mathbf{r}_{cp1}^J = \text{col}(U_{cp1}^J, V_{cp1}^J, W_{cp1}^J)$, $\mathbf{r}_{cp2}^J = \text{col}(U_{cp2}^J, V_{cp2}^J, W_{cp2}^J)$ oraz wektory współrzędnych uogólnionych \mathbf{q}_{cu}^J , \mathbf{q}_{cv}^J , \mathbf{q}_{cw}^J . Natomiast funkcje bazowe mają postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{cu}^J &= \text{col}((1 - \zeta_c^J) \mathbf{e}_u, \zeta_c^J \mathbf{e}_u, \mathbf{s}_c^J, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{f}_{cv}^J &= \text{col}((1 - \zeta_c^J) \mathbf{e}_v, \zeta_c^J \mathbf{e}_v, \mathbf{0}, \mathbf{s}_c^J, \mathbf{0}), \\ \mathbf{f}_{cw}^J &= \text{col}((1 - \zeta_c^J) \mathbf{e}_w, \zeta_c^J \mathbf{e}_w, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{s}_c^J), \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie $\zeta_c^J = x_c^J / l_c^J$, $\mathbf{s}_c^J = \text{col}(\sin \pi \zeta_c^J, \sin 2 \pi \zeta_c^J, \dots, \sin n_c^J \pi \zeta_c^J)$, $\mathbf{e}_u = \text{col}(1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_v = \text{col}(0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_w = \text{col}(0, 0, 1)$.

Dalsza procedura jest analogiczna jak w przypadku ogólnego modelu cięgną. Formuły obliczania poszczególnych macierzy równania ruchu także pozostają bez zmian, przy czym wektor uogólnionych obciążeń zewnętrznych można zapisać w częściowo jawnej postaci

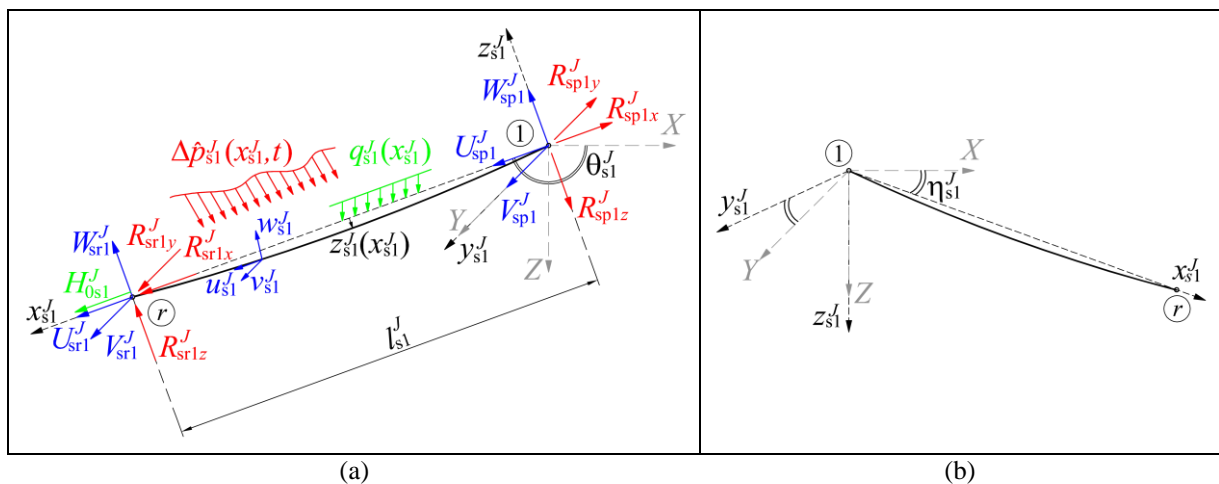
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c^J &= \int_0^{l_c^J} (\mathbf{f}_{cu}^J \Delta p_{cx}^J + \mathbf{f}_{cv}^J \Delta p_{cy}^J + \mathbf{f}_{cw}^J \Delta p_{cz}^J) dx = \int_0^{l_c^J} (\mathbf{f}_{cu}^J \Delta \hat{p}_{cx}^J + \mathbf{f}_{cv}^J \Delta \hat{p}_{cy}^J + \mathbf{f}_{cw}^J \Delta \hat{p}_{cz}^J) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cw}^J(x_{ck}^J) \Delta R_{chk}^J = \hat{\mathbf{F}}_c^J + \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cw}^J \Delta R_{chk}^J = \hat{\mathbf{F}}_c^J + \mathbf{R}_{ch}^J, \end{aligned}$$

gdzie ΔR_{chk}^J jest dynamicznym przyrostem siły przekazywanej na cięgno przez wieszak w punkcie x_{ck}^J oraz $\mathbf{f}_{cw}^J = \mathbf{f}_{cw}^J(x_{ck}^J)$ jest wektorem funkcji aproksymacyjnych obliczonym

w punkcie o współrzędnej x_{ck}^J . Ostateczna postać równania ruchu ciężna głównego/wiatrowego w płaszczyźnie podwieszenia „J” jest następująca

$$\mathbf{B}_c^J \ddot{\mathbf{q}}_c^J + \mathbf{C}_c^J \dot{\mathbf{q}}_c^J + [\mathbf{K}_c^J + \mathbf{K}_c^{nlJ}(\mathbf{q}_c^J)] \mathbf{q}_c^J = \hat{\mathbf{F}}_c^J + \mathbf{R}_{cp1}^J + \mathbf{R}_{cp2}^J + \mathbf{R}_{ch}^J. \quad (3.19)$$

W powyższym równaniu macierze bezwładności \mathbf{B}_c^J , sztywności w zakresie liniowym \mathbf{K}_c^J i nieliniowym $\mathbf{K}_c^{nlJ}(\mathbf{q}_c^J)$ wyznacza się z zależności jak w równaniu (3.14). $\hat{\mathbf{F}}_c^J$ jest wektorem uogólnionych obciążeń zewnętrznych, $\mathbf{R}_{ch}^J = \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{chk}^J$ to wektor uogólnionych oddziaływań zestawu wieszaków na ciężno „J”, natomiast \mathbf{R}_{cp1}^J oraz \mathbf{R}_{cp2}^J są wektorami obciążeń węzłowych wynikających z oddziaływań pylonów. Przykładowo, wektor \mathbf{R}_{cp1}^J można zapisać w postaci $\mathbf{R}_{cp1}^J = -[\mathbf{f}_{cu}^J(0)\Delta R_{cp1x}^J(t) + \mathbf{f}_{cv}^J(0)\Delta R_{cp1y}^J(t) + \mathbf{f}_{cw}^J(0)\Delta R_{cp1z}^J(t)]$, zależnej od składowych dynamicznego oddziaływania pylonu „p1”. Uwzględniając na podstawie (3.18), że $\mathbf{f}_{cu}^J(0) = \text{col}(\mathbf{e}_u, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{f}_{cv}^J(0) = \text{col}(\mathbf{e}_v, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\mathbf{f}_{cw}^J(0) = \text{col}(\mathbf{e}_w, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ otrzymuje się $\mathbf{R}_{cp1}^J = -\text{col}(\Delta \mathbf{R}_{cp1}^J, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, gdzie $\Delta \mathbf{R}_{cp1}^J = \text{col}(\Delta R_{cp1x}^J, \Delta R_{cp1y}^J, \Delta R_{cp1z}^J)$. Przeprowadzając analogiczny tok postępowania dla wektora \mathbf{R}_{cp2}^J uzyskano $\mathbf{R}_{cp2}^J = \text{col}(\mathbf{0}, \Delta \mathbf{R}_{cp2}^J, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, gdzie $\Delta \mathbf{R}_{cp2}^J = \text{col}(\Delta R_{cp2x}^J, \Delta R_{cp2y}^J, \Delta R_{cp2z}^J)$.



Rys. 3.5. Schemat modelu odciągu wchodzącego w skład płaszczyzny podwieszenia „J” połączonego z pylonem „p1”:

a) ogólny schemat bez uwzględnienia obrotu płaszczyzny $x_{s1}^J z_{s1}^J$,

b) obrót płaszczyzny $x_{s1}^J z_{s1}^J$ względem XZ

Założono, że w skład jednej płaszczyzny podwieszenia „J” wchodzi dwa odciagi połączone odpowiednio z pylonami „p1” oraz „p2”. Dalej przedstawiony będzie algorytm wyznaczania równania ruchu odciagu połączonego na jednym końcu z pylonem „p1” (początek osi x_{sl}^J odciagu, por. rys. 3.5ab), a na drugim końcu z blokiem kotwiącym (koniec oznaczony na rys. 3.5ab symbolem „r”). Równanie ruchu odciagu połączonego z pylonem „p2” wyprowadza się analogicznie.

Adaptacja ogólnego modelu ciężna polega na przyjęciu następujących założeń szczegółowych:

- zakłada się mały zwis ciężna (f_{sl}^J/l_{sl}^J około 1/10 lub mniej ze względu na duży naciąg, wtedy w przybliżeniu $\cos \alpha_{0sl}^J \approx 1$, ale $(z_{sl}^J)'' \neq 0$);
- cięciwa odciagu jest nachylona pod kątem θ_{sl}^J względem osi X ($\cos(X, x_{sl}^J) = \cos \theta_{sl}^J$, zatem $q_{slx}^J = m_{sl}^J g \sin \theta_{sl}^J$, $q_{slz}^J = m_{sl}^J g \cos \theta_{sl}^J$);
- płaszczyzna pionowa $x_{sl}^J z_{sl}^J$ jest obrócona o kąt η_{sl}^J mierzony względem płaszczyzny XZ (rys. 3.5b);
- w stanie równowagi statycznej:
 - odciąg napięty siłą H_{0sl}^J jest obciążony tylko ciężarem własnym, wtedy $p_{0slx}^J = 0$, $p_{0sly}^J = 0$, $p_{0slz}^J = 0$;
 - statyczna trasa odciagu leży w płaszczyźnie pionowej $x_{sl}^J z_{sl}^J$, zgodnie z kierunkiem grawitacji ($q_{sl y}^J = 0$);
- w stanie odkształconym:
 - odciąg jest obciążony dodatkowo dowolnym obciążeniem zmiennym w czasie $\Delta \hat{p}_{sl}^J(x_{sl}^J, t)$ mierzonym na jednostkę długości cięciwy.

Równania równowagi statycznej (3.3) z uwzględnieniem przedstawionych powyżej założeń dodatkowych są następujące:

$$\begin{aligned} -(N_{0sl}^J)' &= q_{slx}^J, \\ -[(z_{sl}^J)' N_{0sl}^J]' &= q_{slz}^J. \end{aligned} \quad (3.20)$$

W wyniku rozwiązania równania (3.20)₁ otrzymano wzór na przebieg siły osiowej w odciagu w stanie odniesienia $N_{0sl}^J(x_{sl}^J) = H_{0sl}^J + q_{slx}^J (l_{sl}^J - x_{sl}^J)$. Natomiast wyznaczona z równania (3.20)₂ krzywa zwisu statycznego (krzywa łańcuchowa) jest opisana funkcją

$$z_{s1}^J(x_{s1}^J) = x_{s1}^J \text{ctg} \theta_{s1}^J - l_{s1}^J \text{ctg} \theta_{s1}^J \ln[(\psi_{s1}^J l_{s1}^J - x_{s1}^J) / \psi_{s1}^J l_{s1}^J] [\ln((\psi_{s1}^J - 1) / \psi_{s1}^J)]^{-1}, \quad (3.21)$$

przy czym $\psi_{s1}^J = 1 + H_{0s1}^J / (q_{s1x}^J l_{s1}^J)$.

Analogicznie jak w przypadku cięgien głównych/wiatrowych, stan przemieszczenia dowolnego punktu na długości odciągu, wchodzącego w skład płaszczyzny podwieszenia „J” oraz połączonego z pylonem „p1”, można przedstawić za pomocą wzorów $u_{s1}^J(x_{s1}^J, t) = (\mathbf{f}_{s1u}^J)^T \mathbf{q}_{s1}^J$, $v_{s1}^J(x_{s1}^J, t) = (\mathbf{f}_{s1v}^J)^T \mathbf{q}_{s1}^J$, $w_{s1}^J(x_{s1}^J, t) = (\mathbf{f}_{s1w}^J)^T \mathbf{q}_{s1}^J$. Wektor $\mathbf{q}_{s1}^J = \text{col}(\mathbf{r}_{sp1}^J, \mathbf{r}_{sr1}^J, \mathbf{q}_{s1u}^J, \mathbf{q}_{s1v}^J, \mathbf{q}_{s1w}^J)$ jest zbiorczym wektorem współrzędnych odciągu, gdzie $\mathbf{r}_{sp1}^J = \text{col}(U_{sp1}^J, V_{sp1}^J, W_{sp1}^J)$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych w punkcie połączenia z pylonem „p1”, a $\mathbf{r}_{sr1}^J = \text{col}(U_{sr1}^J, V_{sr1}^J, W_{sr1}^J)$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych w miejscu połączenia z fundamentem, które są zerowe. Fakt ten będzie uwzględniony na etapie agregacji podukładów. Funkcje bazowe mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{s1u}^J &= \text{col}((1 - \zeta_{s1}^J) \mathbf{e}_u, \zeta_{s1}^J \mathbf{e}_u, \mathbf{s}_{s1}^J, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{f}_{s1v}^J &= \text{col}((1 - \zeta_{s1}^J) \mathbf{e}_v, \zeta_{s1}^J \mathbf{e}_v, \mathbf{0}, \mathbf{s}_{s1}^J, \mathbf{0}), \\ \mathbf{f}_{s1w}^J &= \text{col}((1 - \zeta_{s1}^J) \mathbf{e}_w, \zeta_{s1}^J \mathbf{e}_w, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{s}_{s1}^J), \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdzie $\zeta_{s1}^J = x_{s1}^J / l_{s1}^J$, $\mathbf{s}_{s1}^J = \text{col}(\sin \pi \zeta_{s1}^J, \sin 2 \pi \zeta_{s1}^J, \dots, \sin n_{s1}^J \pi \zeta_{s1}^J)$.

W tym miejscu procedura zbiega się z algorytmem wyznaczania równań ruchu cięgien głównych/wiatrowych, z tą różnicą, że nie występują człony dotyczące wieszaków. Końcowe równanie ruchu, jak również wzory na poszczególne składniki równania są analogiczne jak w (3.19). Zatem równania ruchu odciągów połączonych z pylonem „p1” oraz „p2” w płaszczyźnie „J” mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{s1}^J \ddot{\mathbf{q}}_{s1}^J + \mathbf{C}_{s1}^J \dot{\mathbf{q}}_{s1}^J + [\mathbf{K}_{s1}^J + \mathbf{K}_{s1}^{nlJ}(\mathbf{q}_{s1}^J)] \mathbf{q}_{s1}^J &= \hat{\mathbf{F}}_{s1}^J + \mathbf{R}_{sp1}^J + \mathbf{R}_{sr1}^J, \\ \mathbf{B}_{s2}^J \ddot{\mathbf{q}}_{s2}^J + \mathbf{C}_{s2}^J \dot{\mathbf{q}}_{s2}^J + [\mathbf{K}_{s2}^J + \mathbf{K}_{s2}^{nlJ}(\mathbf{q}_{s2}^J)] \mathbf{q}_{s2}^J &= \hat{\mathbf{F}}_{s2}^J + \mathbf{R}_{sp2}^J + \mathbf{R}_{sr2}^J. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.2. Rurociąg

Przyjęto następujące założenia:

- rurociąg jest jednoprzewodowy, ma przekrój rurowy i pomijalnie małą krzywiznę podłużną;

- jest jednoprzęsłowy – sztywno lub swobodnie podparty na dwóch odkształcalnych lub sztywnych pylonach, albo trójprzęsłowy – tzn. podparty dodatkowo (sztywno lub przegubowo) na dwóch skrajnych fundamentach, może być też podparty tylko na zewnętrznych fundamentach;
- między pylonami jest podwieszony za pośrednictwem wieszaków do cięgien głównych i wiatrowych;
- podpory rurociągu są położone na tej samej wysokości, zatem jego oś podłużna jest pozioma;
- analizowane są wyłącznie drgania giętne rurociągu, w dwóch płaszczyznach;
- przemieszczenia dynamiczne rurociągu są mierzone względem statycznie zrównoważonego stanu odniesienia;
- w stanie odniesienia rurociąg jest pusty, nie jest obciążony, a jego ciężar własny jest w całości przekazywany przez wieszaki na cięgna;
- w stanie użytkowym rurociąg jest poddany działaniu dowolnego obciążenia zmiennego w czasie;
- modelem rurociągu jest belka o przekroju rurowym, wykonana z materiału izotropowego, liniowo-sprężystego, doznająca pod wpływem obciążenia dynamicznego dużych przemieszczeń typu giętnego, które spełniają nieliniowe równanie Eulera-Bernoulliego ([57]);
- reakcje wieszaków ze wszystkich płaszczyzn podwieszenia $J = I, II, \dots, N_p$ są przekazywane na belkę rurociągową w węzłach $k = 1, 2, \dots, n_h$, które leżą na osi belki.

Przyjęcie założenia, że rurociąg stanowiący element składowy wiszącego mostu rurociągowego ma pomijalnie małą krzywiznę jest dość istotnym uproszczeniem zaproponowanego modelu obliczeniowego. Zawęża ono zakres możliwych zastosowań modelu do określonego typu mostów, podobnie jak założenie ograniczające do jednego liczbę przewodów rurociągu. Oba te założenia wprowadzono dla zachowania przejrzystości procedury formułowania modelu, można z nich zrezygnować wprowadzając do procedury odpowiednie modyfikacje.

Szerszego uzasadnienia wymaga założenie o ograniczeniu rozważań do analizy drgań giętnych. Przyjęto je na podstawie rozeznania literaturowego, przedstawionego w rozdziale 2, z którego wynika, że właśnie drgania giętne mają dominujący wpływ na ruch rurociągu który stanowi dźwigar mostu wiszącego. Drgania podłużne są znaczące tylko w zagadnieniach związanych z trzęsieniami ziemi, które nie będą analizowane w tej pracy. Natomiast drgania

skrętne nie występują w rozważanym tu wyidealizowanym przypadku, ponieważ nie są sprzężone z drganiami giętnymi, a reakcje wieszaków nie powodują skręcania. Ponadto, nie będą rozpatrywane żadne obciążenia zewnętrzne typu skręcającego. Warto tu przypomnieć, że sprzężone drgania giętno-skrętne belki występują wtedy, kiedy środek ciężkości przekroju belki nie pokrywa się ze środkiem ścinania, co ma miejsce, gdy belka ma mniej niż dwie osie symetrii lub jest zbudowana z materiału anizotropowego. W rozważanym modelu mostu belka jest wykonana z materiału izotropowego, a jej rurowy przekrój poprzeczny ma nieskończenie wiele osi symetrii, zatem następuje rozseparowanie drgań giętnych i skrętnych.

W warunkach rzeczywistych, niewielki, drugorzędny efekt drgań skrętnych może wystąpić np. z uwagi na niedokładności w osiowym przekazywaniu reakcji wieszaków lub niewielkie lokalne zmiany rurowego kształtu przekroju wynikające ze współpracy elementów osprzętu. Pominięcie drgań skrętnych, jako mało znaczących w analizie drgań jednoprzewodowego rurociągu, prowadzi do niezależności drgań giętnych w dwóch prostopadłych płaszczyznach, ale miałyby to miejsce wyłącznie w przypadku, gdyby rurociąg był izolowaną belką samodzielnie przenoszącą obciążenia. W wiszącym moście rurociągowym, z uwagi na przestrzenny system podwieszenia, pionowe i poziome drgania giętne są sprzężone poprzez reakcje wieszaków.

Ze względu na dużą rozpiętość wiszącego mostu rurociągowego w stosunku do średnicy rurociągu, sztywność samego rurociągu jest mała. W związku z tym przyjęto, że model rurociągu powinien uwzględniać nieliniowość geometryczną z uwagi na spodziewane duże przemieszczenia. Należy tutaj wspomnieć, że w literaturze powstało bardzo dużo sformułowań problemu nieliniowych drgań belek typu Eulera-Bernoulliego. Wyczerpujący przegląd najważniejszych artykułów powstałych w tym zakresie zaprezentowano w pracy [129]. W niniejszej rozprawie zaproponowano podejście wzorowane na monografii Fertisa [57], w której zostały przedstawione rozwiązania nieliniowych drgań giętnych belki.

W dalszych rozważaniach, w pierwszej kolejności wyprowadzone zostaną równania ruchu rurociągu jednoprzęsłowego w postaci belki obustronnie sztywno zamocowanej na końcach, w teoretycznych punktach podparcia na pylonach odkształcalnych. Następnie, na końcu tego podpunktu zostaną skomentowane modyfikacje równań ruchu wynikające z innych założonych warunków podparcia rurociągu.

Przyjęto, że geometria belki w stanie odniesienia jest opisana w prostokątnym układzie współrzędnych zewnętrznych x_b, y_b, z_b , pokrywającym się z globalnym układem współrzędnych XYZ odnoszącym się do wiszącego mostu rurociągowego. Drgania giętne belki są opisane dwiema składowymi: $w_b(x_b, t)$ w kierunku osi z_b i $v_b(x_b, t)$ w kierunku osi y_b .

W związku ze spodziewanymi dużymi przemieszczeniami, zależność między przemieszczeniami giętnymi belki, a obciążeniem jest opisana nieliniowym równaniem Eulera-Bernoulliego, które zapisane w dwóch prostopadłych płaszczyznach zginania XZ oraz XY daje układ dwóch niezależnych równań [57]:

$$\begin{aligned} w_b''(1+w_b'^2)^{-3/2} &= -M_y/E_b J_{by}, \\ v_b''(1+v_b'^2)^{-3/2} &= M_z/E_b J_{bz}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie $(\prime) = \partial/\partial x_b$, a składowe obciążenia zewnętrznego wynoszą $q_{bz} = -M_y''$, $q_{by} = M_z''$.

W niniejszej pracy założono, że obciążenia zewnętrzne powodują duże przemieszczenia ale małe odkształcenia i zastosowano podejście nazywane teorią umiarkowanie dużych ugięć (ang. *moderately large deflections*) [106]. Jest to teoria pośrednia między teorią liniową ograniczoną do małych ugięć, a pełną teorią nieliniową dotyczącą bardzo dużych ugięć i dużych obrotów. Stan odkształcenia można wtedy zapisać za pomocą odkształceń von Kármána. W teorii umiarkowanie dużych ugięć zakłada się że, przykładowo dla zginania w płaszczyźnie XZ , $w_b'^2 \ll 1$. Reddy [106] podaje, że zakres stosowalności tej teorii mieści się w zakresie kątów $0 < w_b' < 15^\circ$. Wtedy $\sqrt{1+w_b'^2} \approx 1$, a stąd zależność między deformacjami belki a obciążeniem jest opisana jak w zagadnieniu liniowym, czyli

$$w_b'' = -M_y/E_b J_{by}, \quad (3.25)$$

natomiast składnik nieliniowy pojawia się w wyrażeniu na siły osiowe

$$u_b' + 1/2 w_b''^2 = N_x/E_b A_b. \quad (3.26)$$

Wynika on ze zmiany długości belki spowodowanej dużymi ugięciami i jest znaczący w stosunku do u_b' . Zatem kinematyka belki Eulera-Bernoulliego jest limitowana małymi odkształceniami i „umiarkowanie-dużymi” obrotami, dla których zlinearyzowane składniki wynikające z krzywizny są jeszcze poprawne, ale krzywizna w dalszym ciągu ma wpływ na siły wewnętrzne. Uzyskanie rozwiązania w zakresie ugięć belki wiąże się wtedy z rozwiązaniem zagadnienia sprzężonego, złożonego z problemu giętnego (3.25) i osiowego (3.26).

W tej pracy zaproponowano inne podejście, pomijając konsekwentnie problem osiowy, zgodnie z przyjętymi na wstępie założeniami. Za punkt wyjścia przyjęto równania

nieliniowe (3.24), a założenie, że $w_b'^2 \ll 1$ zatem $\sqrt{1+w_b'^2} \approx 1$ utrzymano wyłącznie w odniesieniu do rozkładu masy belki. Mając na uwadze fakt, że ugięcia są jedynie „umiarkowanie duże”, zaproponowano rozwinięcie w szereg potęgowy nieliniowych czynników w równaniach (3.24), wynikających z krzywizny belki:

$$\begin{aligned} (1+w_b'^2)^{-3/2} &\cong 1 - \frac{3}{2}w_b'^2 + \frac{15}{8}(w_b'^2)^2 - \dots, \\ (1+v_b'^2)^{-3/2} &\cong 1 - \frac{3}{2}v_b'^2 + \frac{15}{8}(v_b'^2)^2 - \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

z ograniczeniem do dwóch pierwszych wyrazów szeregu.

Skupiając uwagę na równaniu (3.24)₁ otrzymuje się po dwukrotnym zróżniczkowaniu

$$E_b J_{by} [(1-1,5w_b'^2)w_b''] = q_{bz}. \quad (3.28)$$

W zagadnieniu dynamicznym mamy $w_b = w_b(x_b, t)$, a obciążenie zewnętrzne z uwzględnieniem sił bezwładności wyraża się wzorem $q_{bz} = -m_b \ddot{w}_b + \Delta p_{bz}(x_b, t)$, gdzie m_b jest masą belki na jednostkę długości oraz $\Delta p_{bz}(x_b, t)$ jest pionową składową obciążenia dynamicznego $\Delta p_b(x_b, t)$. Przeprowadzając analogiczną procedurę dla równania (3.24)₂ otrzymuje się układ cząstkowych równań różniczkowych czwartego rzędu opisujących nieliniowe drgania gięte belki w płaszczyźnie pionowej i poziomej:

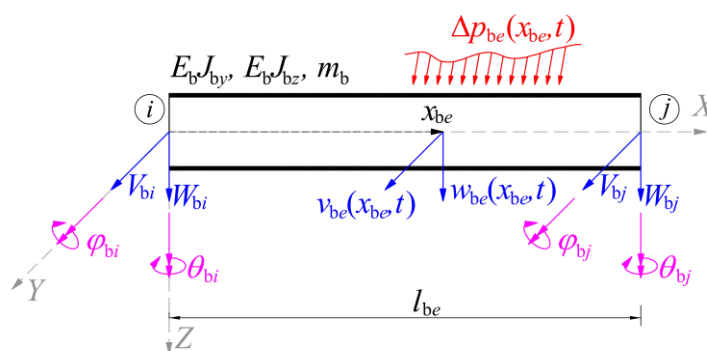
$$\begin{aligned} E_b J_{by} [(1-1,5w_b'^2)w_b''] + m_b \ddot{w}_b &= \Delta p_{bz}(x_b, t), \\ E_b J_{bz} [(1-1,5v_b'^2)v_b''] + m_b \ddot{v}_b &= \Delta p_{by}(x_b, t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Przybliżone rozwiązanie równań (3.29) zostanie przeprowadzone z zastosowaniem metody elementów skończonych w ujęciu Galerkina. W literaturze anglojęzycznej używa się terminu GFEM (ang. *Galerkin's Finite Element Method*) [33], [57], [150]. Metoda ta, należąca do grupy metod ważonych reszduów, gdzie rolę funkcji wagowych pełnią globalne funkcje bazowe, służy do aproksymacyjnego rozwiązywania zagadnień brzegowych. Zastosowanie tej metody do rozwiązywania równań dynamiki układów ciągłych sprowadza się do przekształcenia równania różniczkowego cząstkowego do układu równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Proces ten polega na minimalizacji błędu (reszty) ε_b wynikającego z niespełnienia wyjściowego równania różniczkowego w całej przestrzeni jego określoności, w której zostało sformułowane. Można to osiągnąć żądając, aby

błąd ε_b pomiędzy rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym był ortogonalny względem każdej globalnej funkcji bazowej ψ_b , złożonej z lokalnych funkcji kształtu N_{be} aproksymujących stan przemieszczeń w obrębie elementu skończonego. Warunek ten w literaturze jest nazywany globalną całką Galerkina (ang. *global Galerkin integral*) [33].

Podstawowe kroki procedury MES w ujęciu Galerkina, zastosowanej w tej pracy do wyprowadzenia równań ruchu rurociągu są następujące:

- podział belki (rurociągu) o rozpiętości l_b na dwuwęzłowe elementy skończone $e = 1, 2, \dots, n_b$ o jednakowej długości l_{be} oraz o czterech stopniach swobody w każdym węźle, z zachowaniem warunku, że punkty połączeń z wieszakami pokrywają się z wybranymi węzłami podziału na elementy skończone;
- aproksymacja przemieszczeń $w_{be}(x_{be}, t)$ oraz $v_{be}(x_{be}, t)$ na długości elementu skończonego „ e ” poprzez przyjęte bezwymiarowe funkcje kształtu $N_{be}(\xi_{be})$ w postaci wielomianów Hermite’a, jak w MES dla elementu belkowego w zagadnieniu liniowym (w powyższych wyrażeniach x_{be} jest współrzędną mierzoną wzdłuż elementu skończonego, natomiast $\xi_{be} = x_{be}/l_{be}$);
- wyprowadzenie równania ruchu elementu przy zastosowaniu procedury Galerkina;
- przeprowadzenie procedury agregacji równań.



Rys. 3.6. Schemat elementu skończonego e

W dalszych rozważaniach wielkości związane ze zginaniem w płaszczyźnie pionowej będą oznaczone indeksem „ w ”, natomiast wielkości związane ze zginaniem w płaszczyźnie poziomej będą oznaczone indeksem „ v ”. Przemieszczenia brzegowe elementu „ e ” o końcach $i - j$ (rys. 3.6) zostały zebrane w wektor przemieszczeń brzegowych $\mathbf{r}_{be} = \text{col}(\mathbf{r}_{be}^w, \mathbf{r}_{be}^v)$ podzielony na bloki: $\mathbf{r}_{be}^w = [W_{bi}, \varphi_{bi}l_{be}, W_{bj}, \varphi_{bj}l_{be}]^T$ oraz $\mathbf{r}_{be}^v = [V_{bi}, \theta_{bi}l_{be}, V_{bj}, \theta_{bj}l_{be}]^T$. Natomiast lokalne funkcje bazowe (funkcje Hermite’a):

$$\begin{aligned}
N_{be1}^w(\xi_{be}) &= 1 - 3\xi_{be}^2 + 2\xi_{be}^3, N_{be2}^w(\xi_{be}) = -\xi_{be} + 2\xi_{be}^2 - \xi_{be}^3, \\
N_{be3}^w(\xi_{be}) &= 3\xi_{be}^2 - 2\xi_{be}^3, N_{be4}^w(\xi_{be}) = \xi_{be}^2 - \xi_{be}^3, \\
N_{be1}^v(\xi_{be}) &= N_{be1}^w(\xi_{be}), N_{be2}^v(\xi_{be}) = -N_{be2}^w(\xi_{be}), \\
N_{be3}^v(\xi_{be}) &= N_{be3}^w(\xi_{be}), N_{be4}^v(\xi_{be}) = -N_{be4}^w(\xi_{be}),
\end{aligned}$$

zapisano w wektorach: $\mathbf{N}_{be}^w = [N_{be1}^w, N_{be2}^w, N_{be3}^w, N_{be4}^w]^T$ i $\mathbf{N}_{be}^v = [N_{be1}^v, N_{be2}^v, N_{be3}^v, N_{be4}^v]^T$.

Przemieszczenia w obszarze elementu $w_{be}(x_{be}, t)$ oraz $v_{be}(x_{be}, t)$ są wówczas wyrażone wzorami:

$$\begin{aligned}
w_{be}(x_{be}, t) &= (\mathbf{N}_{be}^w)^T \mathbf{r}_{be}^w, \\
v_{be}(x_{be}, t) &= (\mathbf{N}_{be}^v)^T \mathbf{r}_{be}^v,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

i spełniają warunki brzegowe $w_{be}(0) = W_{bi}$, $w_{be}(l_{be}) = W_{bj}$, $w'_{be}(0) = -\varphi_{bi}$, $w'_{be}(l_{be}) = -\varphi_{bj}$, $v_{be}(0) = V_{bi}$, $v_{be}(l_{be}) = V_{bj}$, $v'_{be}(0) = \theta_{bi}$, $v'_{be}(l_{be}) = \theta_{bj}$.

Przybliżone rozwiązania $\tilde{w}_b(x_b, t)$ oraz $\tilde{v}_b(x_b, t)$ równań (3.29) są sumą rozwiązań lokalnych (3.30):

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_b(x_b, t) &= \sum_{e=1}^{n_b} w_{be}(x_{be}, t) = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{N}_{be}^w)^T \mathbf{r}_{be}^w, \\
\tilde{v}_b(x_b, t) &= \sum_{e=1}^{n_b} v_{be}(x_{be}, t) = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{N}_{be}^v)^T \mathbf{r}_{be}^v.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Dodatkowo, przemieszczenia brzegowe elementu w obu płaszczyznach stanowią podzbiór przemieszczeń węzłowych belki, co można przedstawić przy użyciu macierzy transformacji

\mathbf{A}_{be}^w oraz \mathbf{A}_{be}^v :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{be}^w &= \mathbf{A}_{be}^w \mathbf{q}_b^w, \\
\mathbf{r}_{be}^v &= \mathbf{A}_{be}^v \mathbf{q}_b^v.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Przemieszczenia węzłowe belki w powyższych wzorach uporządkowano w taki sposób, aby ułatwić późniejszą agregację podstruktur, tj. wektory współrzędnych uogólnionych podzielono na bloki według wzorów: $\mathbf{q}_b^w = \text{col}(\mathbf{r}_{bp1}^w, \mathbf{r}_{bp2}^w, \mathbf{q}_{br}^w)$, $\mathbf{q}_b^v = \text{col}(\mathbf{r}_{bp1}^v, \mathbf{r}_{bp2}^v, \mathbf{q}_{br}^v)$, gdzie \mathbf{r}_{bp1}^w , \mathbf{r}_{bp2}^w i \mathbf{r}_{bp1}^v , \mathbf{r}_{bp2}^v są wektorami zawierającymi przemieszczenia węzłowe w skrajnych węzłach belki, natomiast \mathbf{q}_{br}^w oraz \mathbf{q}_{br}^v zawierają przemieszczenia w kolejnych węzłach

środkowych, odpowiednio w płaszczyznach zginania XZ oraz XY . Podstawiając zależności (3.32) do wzorów (3.31) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\check{w}_b(x_b, t) &= \left(\sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{N}_{be}^w)^T \mathbf{A}_{be}^w \right) \mathbf{q}_b^w = (\boldsymbol{\Psi}_b^w)^T \mathbf{q}_b^w, \\ \check{v}_b(x_b, t) &= \left(\sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{N}_{be}^v)^T \mathbf{A}_{be}^v \right) \mathbf{q}_b^v = (\boldsymbol{\Psi}_b^v)^T \mathbf{q}_b^v,\end{aligned}\tag{3.33}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_b^w &= \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^w, \\ \boldsymbol{\Psi}_b^v &= \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \mathbf{N}_{be}^v,\end{aligned}\tag{3.34}$$

są wektorami globalnych funkcji bazowych aproksymujących pionowe i poziome ugięcia dynamiczne belki. Należy tutaj podkreślić, że lokalne funkcje bazowe \mathbf{N}_{be}^w oraz \mathbf{N}_{be}^v są niezerowe tylko w obrębie elementu „ e ”, czyli w przedziale $l_{be}(e-1) \leq x_b \leq l_{be}e$.

W przypadku drgań belki w płaszczyźnie pionowej, zaproponowana aproksymacja (3.33)₁ spełnia równanie (3.29)₁ z błędem ε_b^w , ponieważ rozwiązanie jest tylko przybliżone

$$E_b J_{by} [(1 - 1,5\check{w}_b'^2)\check{w}_b'']'' + m_b \check{w}_b - \Delta p_{bz}(x_b, t) = \varepsilon_b^w.\tag{3.35}$$

W celu minimalizacji błędu korzysta się z warunku ortogonalności, tj. żąda się aby każda globalna funkcja bazowa tworząca wektor (3.34)₁ była ortogonalna względem błędu ε_b^w na całej długości belki l_b , co można zapisać jako warunek nazywany globalną całką Galerkiną [33]

$$\int_0^{l_b} \boldsymbol{\Psi}_b^w \varepsilon_b^w dx = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \int_0^{l_b} \mathbf{N}_{be}^w \varepsilon_b^w dx = 0.\tag{3.36}$$

Jeśli uwzględnimy, iż lokalne funkcje bazowe \mathbf{N}_{be}^w oraz \mathbf{N}_{be}^v są niezerowe tylko w obszarze elementu „ e ”, to poszczególne całki występujące w powyższej sumie sprowadzą się do całek lokalnych na długości rozpatrywanego elementu

$$\int_0^{l_b} \mathbf{N}_{be}^w \varepsilon_b^w dx = \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \varepsilon_{be}^w dx, \quad (3.37)$$

gdzie ε_{be}^w oznacza błąd niespełnienia równania (3.29)₁ w obszarze elementu. Błąd ε_{be}^w można wyznaczyć po podstawieniu (3.31) do (3.35) oraz uwzględnieniu, że rozwiązania lokalne w_{be} są niezerowe tylko w obrębie danego elementu

$$E_b J_{by} [(1 - 1,5 w_{be}^{\prime 2}) w_{be}^{\prime\prime}]'' + m_b \ddot{w}_{be} - \Delta p_{bez}(x_{be}, t) = \varepsilon_{be}^w. \quad (3.38)$$

Podstawienie (3.31)₁ do (3.38) prowadzi do wyrażenia

$$E_b J_{by} \{ [1 - 1,5 (\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w \}'' + m_b (\mathbf{N}_{be}^w)^T \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w - \Delta p_{bez} = \varepsilon_{be}^w, \quad (3.39)$$

a uwzględnienie zależności (3.39) w (3.37) daje wynik

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \varepsilon_{be}^w dx = \\ & = E_b J_{by} \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime\prime w})^T dx \mathbf{r}_{be}^w - 1,5 E_b J_{by} \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \{ [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T \}'' dx \mathbf{r}_{be}^w + \\ & \quad + m_b \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w (\mathbf{N}_{be}^w)^T dx \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w - \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \Delta p_{bez} dx. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Przeprowadzając dwukrotnie operację całkowania przez części dla całek w dwóch pierwszych wyrazach prawej strony wyrażenia (3.40) otrzymano:

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime\prime w})^T dx = \mathbf{N}_{be}^w (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime\prime w})^T \Big|_0^{l_{be}} - \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T \Big|_0^{l_{be}} + \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T dx, \\ & \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \{ [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T \}'' dx = \mathbf{N}_{be}^w \{ [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T \}' \Big|_0^{l_{be}} + \\ & \quad - \mathbf{N}_{be}^{\prime w} [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T \Big|_0^{l_{be}} + \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w} [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}^{\prime w} (\mathbf{N}_{be}^{\prime w})^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}^{\prime\prime w})^T dx. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności oraz porządkując wyrazy, równanie (3.40) można zapisać w postaci

$$\int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \varepsilon_{be}^w dx = \mathbf{B}_{be}^w \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w + [\mathbf{K}_{be}^w + \mathbf{K}_{be}^{wnl}(\mathbf{r}_{be}^w)] \mathbf{r}_{be}^w - \mathbf{F}_{be}^w - \mathbf{R}_{be}^w, \quad (3.42)$$

gdzie macierze: bezwładności \mathbf{B}_{be}^w , sztywności w zakresie liniowym \mathbf{K}_{be}^w i sztywności geometrycznej $\mathbf{K}_{be}^{wnl}(\mathbf{r}_{be}^w)$ oraz wektor obciążeń zewnętrznych \mathbf{F}_{be}^w elementu wyznacza się ze wzorów:

$$\mathbf{B}_{be}^w = m_b \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w (\mathbf{N}_{be}^w)^T dx, \quad \mathbf{K}_{be}^w = E_b J_{bz} \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}''^w (\mathbf{N}_{be}''^w)^T dx,$$

$$\mathbf{K}_{be}^{wnl}(\mathbf{r}_{be}^w) = -1,5 E_b J_{by} \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}''^w [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}'^w (\mathbf{N}_{be}'^w)^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}''^w)^T dx, \quad \mathbf{F}_{be}^w = \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \Delta p_{bez} dx.$$

Natomiast wektor \mathbf{R}_{be}^w jest wektorem zawierającym siły brzegowe elementu

$$\mathbf{R}_{be}^w = E_b J_{by} [-\mathbf{N}_{be}^w (\mathbf{N}_{be}'''^w)^T]_0^{l_{be}} + \mathbf{N}_{be}'^w (\mathbf{N}_{be}''^w)^T]_0^{l_{be}} + \mathbf{N}_{be}^w \{ [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}'^w (\mathbf{N}_{be}'^w)^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}''^w)^T \}'_0^{l_{be}} +$$

$$- \mathbf{N}_{be}'^w [(\mathbf{r}_{be}^w)^T \mathbf{N}_{be}'^w (\mathbf{N}_{be}'^w)^T \mathbf{r}_{be}^w] (\mathbf{N}_{be}''^w)^T]_0^{l_{be}} \mathbf{r}_e^w.$$

Procedura agregacji jest równoznaczna z podstawieniem wyrażenia (3.42) do warunku ortogonalności (3.36) co, po uwzględnieniu relacji (3.32), prowadzi do nieliniowego równania ruchu rurociągu w płaszczyźnie pionowej. Powtarzając analogicznie tok postępowania dla równania drgań w płaszczyźnie poziomej, otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych wyznaczających przebieg drgań giętnych rurociągu w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_b^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_b^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b^w \\ \ddot{\mathbf{q}}_b^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b^w + \mathbf{K}_b^{wnl}(\mathbf{q}_b^w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^v + \mathbf{K}_b^{vnl}(\mathbf{q}_b^v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b^w \\ \mathbf{q}_b^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b^w \\ \mathbf{F}_b^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_b^w \\ \mathbf{R}_b^v \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

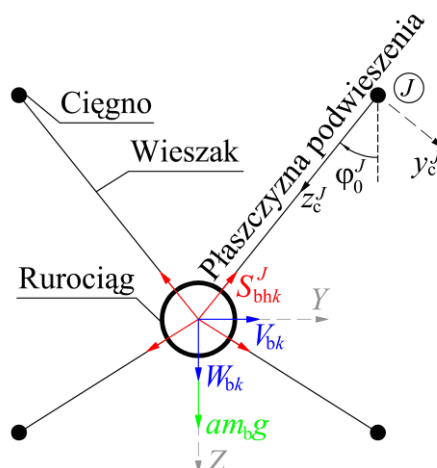
gdzie

$$\mathbf{B}_b^w = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{B}_{be}^w \mathbf{A}_{be}^w, \quad \mathbf{K}_b^w = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{K}_{be}^w \mathbf{A}_{be}^w,$$

$$\mathbf{K}_b^{wnl}(\mathbf{q}_b^w) = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{K}_{be}^{wnl}(\mathbf{q}_b^w) \mathbf{A}_{be}^w, \quad \mathbf{F}_b^w = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{F}_{be}^w, \quad \mathbf{R}_b^w = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{R}_{be}^w.$$

Macierze oznaczone indeksem „v” mają analogiczną strukturę. Po założeniu ścisłego spełnienia warunków ciągłości oraz równowagi sił w węzłach podziału na elementy, wszystkie elementy wektorów \mathbf{R}_b^w oraz \mathbf{R}_b^v są zerowe, poza tymi, które wynikają z sił

brzegowych w węzłach podporowych, ale te też ulegną wyzerowaniu lub kompensacji na etapie agregacji podstruktur (por. punkt 3.4), co będzie omówione dalej. Szczegółowego określenia wymagają wektory \mathbf{F}_b^w oraz \mathbf{F}_b^v zależne od obciążenia.



Rys. 3.7. Przekrój rurociągu w miejscu połączenia z wieszakami w węźle belki o numerze „k”

Na całkowite obciążenie zewnętrzne rurociągu składają się: równomiernie rozłożony ciężar własny $m_b g$, obciążenie czynne $\hat{p}_b(x_b, t) = \hat{p}_{0b}(x_b) + \Delta\hat{p}_b(x_b, t)$ oraz reakcje wieszaków $S_{bhk}^J(t) = S_{0bhk}^J + \Delta S_{bhk}^J(t)$, gdzie indeks „0” oznacza wielkości w stanie odniesienia a para indeksów: dolny „k” i górny „J” identyfikuje wieszak, który znajduje się w k-tym węźle połączenia rurociągu z wieszakami ($k = 1, 2, \dots, n_h$) i w J-tej płaszczyźnie podwieszenia ($J = I, II, \dots, N_p$). Węzły połączeniowe pokrywają się tylko z wybranymi węzłami podziału rurociągu na elementy skończone. Na rysunku 3.7 pokazano konfigurację sił zewnętrznych działających na rurociąg w węźle połączenia z wieszakami o numerze „k”, przy czym $am_b g$ jest ciężarem sekcji rurociągu pomiędzy dwoma wieszakami w rozstawie a . Kąt φ_0^J nachylenia płaszczyzny podwieszenia „J” jest mierzony prawoskrętnie względem osi pionowej Z.

W stanie odniesienia obciążenie czynne jest zerowe, czyli $\hat{p}_{0b}(x_b)$, a ciężar własny rurociągu jest zrównoważony stałymi reakcjami wieszaków S_{0bhk}^J . Równania równowagi statycznej określające stan odniesienia otrzymuje się bezpośrednio z analizy sił działających w przekroju rurociągu w węźle „k” (rys. 3.7), jako sumy rzutów sił na osie Y i Z:

$$\begin{aligned}\sum_{J=1}^{N_p} S_{0bhk}^J \sin \varphi_0^J &= 0, \\ \sum_{J=1}^{N_p} S_{0bhk}^J \cos \varphi_0^J &= am_b g.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Równania (3.44) muszą być spełnione w każdym węźle „ k ”.

W warunkach dynamicznych, gdzie przemieszczenia są mierzone względem statycznie zrównoważonej konfiguracji odniesienia, obciążeniem rurociągu jest tylko obciążenie zmienne w czasie $\Delta p_b(x_b, t)$, na które składają się dynamiczne przyrosty reakcji wieszaków $\Delta S_{bhk}^J(t)$ i obciążenie czynne $\hat{p}_b(x_b, t)$. Obciążenie $\Delta p_b(x_b, t)$ determinuje szczegółową postać bloków \mathbf{F}_b^w i \mathbf{F}_b^v wektora uogólnionych sił wzbudzających w równaniu ruchu (3.43). Bloki te zapisano częściowo w jawnej postaci, rozdzielając je na dwa składniki:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_b^w &= \hat{\mathbf{F}}_b^w + \mathbf{R}_{bh}^w, \\ \mathbf{F}_b^v &= \hat{\mathbf{F}}_b^v + \mathbf{R}_{bh}^v.\end{aligned}\tag{3.45}$$

i wyprowadzając jawną postać tylko dla wektorów \mathbf{R}_{bh}^w i \mathbf{R}_{bh}^v zależnych od dynamicznych przyrostów reakcji wieszaków. Wektory $\hat{\mathbf{F}}_b^w$ i $\hat{\mathbf{F}}_b^v$ zależne od obciążenia czynnego i wyrażone ogólnymi formułami:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}_b^w &= \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \hat{\mathbf{F}}_{be}^w, & \hat{\mathbf{F}}_{be}^w &= \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \Delta \hat{p}_{bez} dx, \\ \hat{\mathbf{F}}_b^v &= \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \hat{\mathbf{F}}_{be}^v, & \hat{\mathbf{F}}_{be}^v &= \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^v \Delta \hat{p}_{bey} dx,\end{aligned}\tag{3.46}$$

zostaną sprecyzowane w dalszych rozdziałach pracy, odnoszących się już do konkretnych obciążeń rurociągu.

Ponieważ dynamiczne przyrosty reakcji wieszaków $\Delta S_{bhk}^J(t)$ są obciążeniem węzłowym rurociągu, zależne od nich wektory \mathbf{R}_{bh}^{wJ} i \mathbf{R}_{bh}^{vJ} wygodnie jest obliczyć z formuły energetycznej, obliczając pracę sił ΔS_{bhk}^J na przemieszczeniach W_{bk} oraz V_{bk} węzłów połączeniowych „ k ” (rys. 3.7). Sumując w każdym węźle „ k ” pracę reakcji wieszaków z płaszczyzny podwieszenia „ J ” otrzymano

$$\begin{aligned}
L_{bh}^J &= \sum_{k=1}^{n_h} \Delta S_{bhk}^J \sin \varphi_0^J V_{bk} - \sum_{k=1}^{n_h} \Delta S_{bhk}^J \cos \varphi_0^J W_{bk} = \\
&= - \sum_{k=1}^{n_h} \Delta S_{bhk}^J (\mathbf{a}_\varphi^J)^T \mathbf{r}_{bk} = - \sum_{k=1}^{n_h} \Delta S_{bhk}^J (\mathbf{a}_\varphi^J)^T \mathbf{E}_{bk} \mathbf{A}_{bk} \mathbf{q}_b.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

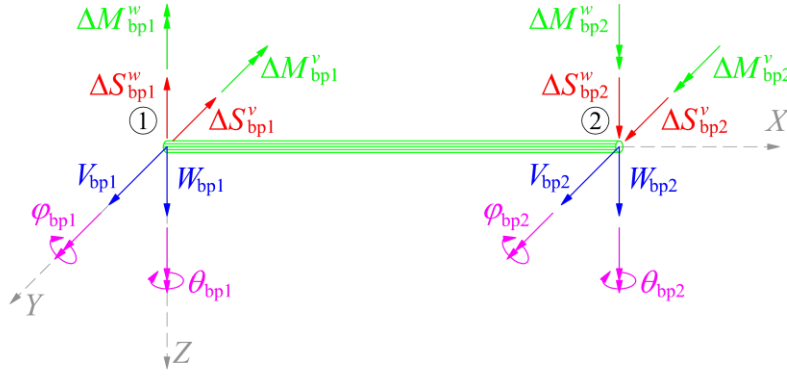
W powyższym wzorze $\mathbf{a}_\varphi^J = [\cos \varphi_0^J, -\sin \varphi_0^J]^T$ jest wektorem obrotu, a $\mathbf{r}_{bk} = [W_{bk}, V_{bk}]^T$ jest wektorem przemieszczeń rurociągu w kierunkach osi Z oraz Y globalnego układu współrzędnych w węźle kontaktowym „ k ”. Wektor \mathbf{r}_{bk} we wzorze (3.47) został wyrażony za pomocą wektora $\mathbf{q}_{bk} = [W_{bk}, \varphi_{bk}, V_{bk}, \theta_{bk}]^T$, w którym zebrano pełny zbiór przemieszczeń rurociągu w węźle „ k ”, według relacji $\mathbf{r}_{bk} = \mathbf{E}_{bk} \mathbf{q}_{bk}$, gdzie \mathbf{E}_{bk} jest odpowiednio skonstruowaną macierzą transformacji. Ponadto uwzględniono, że wektor \mathbf{q}_{bk} stanowi podzbiór wektora przemieszczeń uogólnionych belki \mathbf{q}_b , wtedy $\mathbf{q}_{bk} = \mathbf{A}_{bk} \mathbf{q}_b$.

Po przyjęciu oznaczenia $\mathbf{H}_{bk} = \mathbf{E}_{bk} \mathbf{A}_{bk}$, obliczono wektor uogólnionych obciążeń belki wynikających z dynamicznych oddziaływań wieszaków w płaszczyźnie podwieszenia „ J ”, jako gradient pola skalarowego L_{bh}^J w kierunkach współrzędnych \mathbf{q}_b , według wzoru

$$\mathbf{R}_{bh}^J = \text{grad}_{\mathbf{q}_b} L_{bh}^J = - \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{bhk}^J = \text{col}(\mathbf{R}_{bh}^{wJ}, \mathbf{R}_{bh}^{vJ}) \tag{3.48}$$

i następnie *post factum* podzielono go na bloki \mathbf{R}_{bh}^{wJ} i \mathbf{R}_{bh}^{vJ} , co symbolizuje kolejność zapisu wyrażeń w formule (3.48). Należy w tym miejscu zauważyć, że po agregacji podstruktur wektor (3.48) ulegnie kompensacji, stąd nie jest potrzebne jawne wyznaczenie zbioru sił ΔS_{bhk}^J , które są wzajemnymi oddziaływaniami wieszaków i belki (por. rys. 3.9).

Jak już wcześniej wspomniano, po agregacji podstruktur ulegną kompensacji występujące w równaniu (3.43) wektory \mathbf{R}_b^w oraz \mathbf{R}_b^v , które zawierają siły brzegowe w skrajnych węzłach rurociągu położonych na pylonach. Aby zrozumiałe było wyjaśnienie tego faktu przedstawione w punkcie 3.4, wektory sił brzegowych zapisano w postaci sum $\mathbf{R}_b^w = \mathbf{R}_{bp1}^w + \mathbf{R}_{bp2}^w$, $\mathbf{R}_b^v = \mathbf{R}_{bp1}^v + \mathbf{R}_{bp2}^v$, a ich składniki zostaną wyznaczone z uwzględnieniem, że pylony są odkształcalne.



Rys. 3.8. Siły oddziaływań pylonów „p1” oraz „p2” na belkę

W wyniku powiązania z odkształcalnymi pylonami „p1” oraz „p2” powstaną siły wzajemnych oddziaływań pomiędzy nimi a belką, co pokazano schematycznie na rysunku 3.8. Praca dynamicznych przyrostów sił w miejscu połączenia z pylonem „p1” na odpowiadających im przemieszczeniach belki W_{bp1} oraz V_{bp1} w kierunkach osi Z i Y globalnego układu współrzędnych, a także na kątach obrotu φ_{bp1} oraz θ_{bp1} wokół osi Y oraz Z , jest wyrażona wzorem

$$\begin{aligned}
 L_{bp1} &= -\Delta S_{bp1}^w W_{bp1} - \Delta M_{bp1}^w \varphi_{bp1} - \Delta S_{bp1}^v V_{bp1} - \Delta M_{bp1}^v \theta_{bp1} = \\
 &= -(\mathbf{r}_{bp1}^w)^T \Delta \mathbf{R}_{bp1}^w - (\mathbf{r}_{bp1}^v)^T \Delta \mathbf{R}_{bp1}^v = -\mathbf{q}_{bp1}^T (\mathbf{E}_{bp1}^w)^T \Delta \mathbf{R}_{bp1}^w - \mathbf{q}_{bp1}^T (\mathbf{E}_{bp1}^v)^T \Delta \mathbf{R}_{bp1}^v = \quad (3.49) \\
 &= -\mathbf{q}_{bp1}^T \Delta \mathbf{R}_{bp1} = -\mathbf{q}_b^T \mathbf{A}_{bp1}^T \Delta \mathbf{R}_{bp1},
 \end{aligned}$$

gdzie \mathbf{r}_{bp1}^w , \mathbf{r}_{bp1}^v , są wektorami zawierającymi przemieszczenia translacyjne i kątowe w płaszczyznach zginania XZ oraz XY , w miejscu połączenia belki z pylonem „p1”, które można wyrazić za pomocą zbiorczego wektora $\mathbf{q}_{bp1} = \text{col}(\mathbf{r}_{bp1}^w, \mathbf{r}_{bp1}^v) = [W_{bp1}, \varphi_{bp1}, V_{bp1}, \theta_{bp1}]^T$ według relacji $\mathbf{r}_{bp1}^w = \mathbf{E}_{bp1}^w \mathbf{q}_{bp1}$ oraz $\mathbf{r}_{bp1}^v = \mathbf{E}_{bp1}^v \mathbf{q}_{bp1}$. Natomiast \mathbf{A}_{bp1} jest odpowiednio skonstruowaną macierzą transformacji przemieszczeń uogólnionych rurociągu \mathbf{q}_b na odpowiedni podzbiór przemieszczeń w węzle brzegowym „1”, co można wyrazić wzorem $\mathbf{q}_{bp1} = \mathbf{A}_{bp1} \mathbf{q}_b$. Zapis z użyciem lokalnych wektorów \mathbf{r}_{bp1}^w , \mathbf{r}_{bp1}^v w drugim wierszu formuły (3.49) umieszczono na potrzeby późniejszej agregacji podstruktur w punkcie 3.4.

Wektor $\Delta \mathbf{R}_{bp1} = \text{col}(\Delta \mathbf{R}_{bp1}^w, \Delta \mathbf{R}_{bp1}^v) = [\Delta S_{bp1}^w, \Delta M_{bp1}^w, \Delta S_{bp1}^v, \Delta M_{bp1}^v]^T$ jest zbiorczym wektorem dynamicznych przyrostów reakcji węzłowych stanowiących oddziaływania pylonu „p1” na belkę. Na podstawie (3.49) otrzymuje się

$$\mathbf{R}_{bp1} = \text{grad}_{\mathbf{q}_b} L_{bp1} = -\mathbf{A}_{bp1}^T \Delta \mathbf{R}_{bp1} = \text{col}(\mathbf{R}_{bp1}^w, \mathbf{R}_{bp1}^v). \quad (3.50)$$

Analogicznie, praca przyrostów dynamicznych reakcji pylonu „p2” na odpowiednich przemieszczeniach belki wynosi

$$L_{bp2} = \Delta S_{bp2}^w W_{bp2} + \Delta M_{bp2}^w \varphi_{bp2} + \Delta S_{bp2}^v V_{bp2} + \Delta M_{bp2}^v \theta_{bp2} = \mathbf{q}_{bp2}^T \Delta \mathbf{R}_{bp2} = \mathbf{q}_b^T \mathbf{A}_{bp2}^T \Delta \mathbf{R}_{bp2}. \quad (3.51)$$

Zatem wektor reakcji brzegowych będących skutkiem oddziaływania pylonu „p2” na belkę jest opisany zależnością

$$\mathbf{R}_{bp2} = \text{grad}_{\mathbf{q}_b} L_{bp2} = \mathbf{A}_{bp2}^T \Delta \mathbf{R}_{bp2} = \text{col}(\mathbf{R}_{bp2}^w, \mathbf{R}_{bp2}^v). \quad (3.52)$$

Macierzowe równanie ruchu rurociągu (3.43), uzupełnione o zależności (3.48), (3.50), (3.52), oraz po wyznaczeniu na podstawie wybranego modelu tłumienia macierzy \mathbf{C}_b , można zapisać w kompaktowej postaci

$$\mathbf{B}_b \ddot{\mathbf{q}}_b + \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{q}}_b + [\mathbf{K}_b + \mathbf{K}_b^{nl}(\mathbf{q}_b)] \mathbf{q}_b = \hat{\mathbf{F}}_b + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{bh}^J + \mathbf{R}_{bp1} + \mathbf{R}_{bp2}, \quad (3.53)$$

gdzie $\mathbf{q}_b = \text{col}(\mathbf{q}_b^w, \mathbf{q}_b^v)$.

Należy jeszcze rozważyć inne założone przypadki podparcia rurociągu. Przypadek, gdy jednoprzęsłowy rurociąg jest swobodnie (przegubowo) podparty na pylonach odkształcalnych (w obu kierunkach Y i Z lub tylko w jednym z nich), można rozwiązać analogicznie do sztywnego zamocowania, z tą różnicą, że we wzorach (3.49) i (3.51) odpowiednie dynamiczne przyrosty momentowych oddziaływań pylonów są zerowe. Jeśli natomiast pylony są nieodkształcalne, to można łatwo wykazać, że wektory sił brzegowych \mathbf{R}_b^w i \mathbf{R}_b^v stają się w pełni zerowe po uwzględnieniu warunków podparcia na etapie agregacji podstruktur, w obu przypadkach – sztywnego i swobodnego podparcia rurociągu.

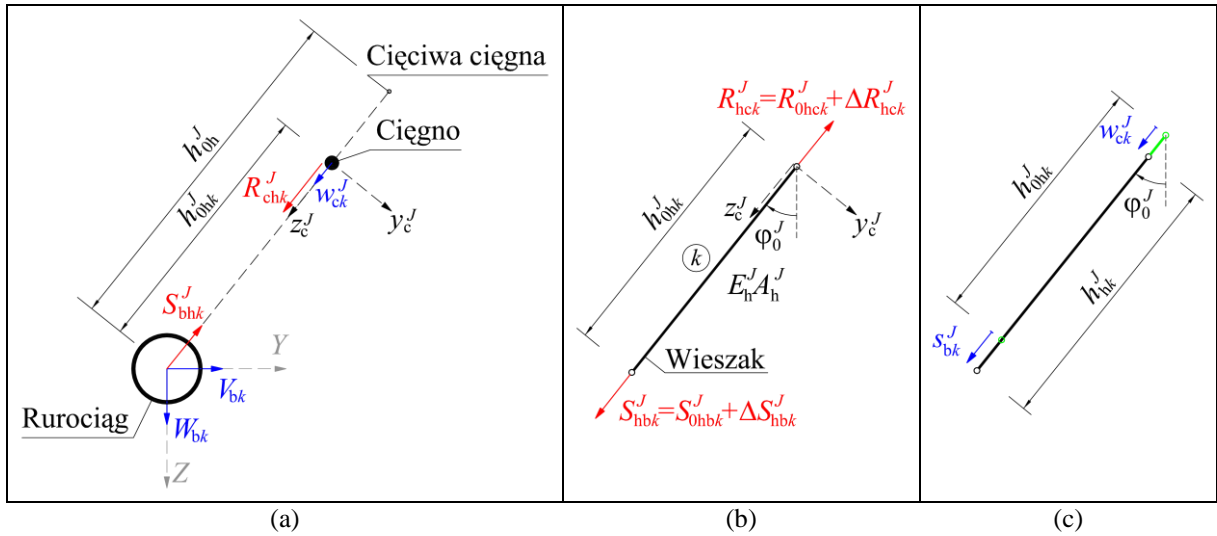
Podobnie rozwiązuje się przypadek rurociągu trójprzęsłowego, przy czym teoretyczne punkty podparcia rurociągu na odkształcalnych pylonach są wtedy węzłami pośrednimi, co uwzględnia się w macierzach transformacji współrzędnych \mathbf{A}_{bp1} i \mathbf{A}_{bp2} . Skrajne węzły podporowe rurociągu są wówczas obciążone reakcjami nieodkształcalnych fundamentów, a wynikające z nich wektory sił brzegowych ulegają wyzerowaniu podczas agregacji podstruktur.

Z analizy rozwiązań konstrukcyjnych mostów rurociągowych, przedstawionych w Załączniku 1 wynika, że często rurociąg nie jest w ogóle podparty na pylonach – jest podparty na tylko zewnętrznych fundamentach lub łączy się bezpośrednio z linią podziemną. W pierwszym przypadku wektory \mathbf{R}_{bp1} i \mathbf{R}_{bp2} są z założenia zerowe, a wektory sił brzegowych wynikające z reakcji fundamentów znikają po agregacji, w drugim – można powiązać rurociąg mostu z dwoma jego odcinkami zewnętrznymi, korzystając z ogólnej idei techniki podstruktur.

3.3.3. Wieszaki

Przyjęto następujące założenia:

- wieszaki są odkształcalnymi nieważkimi prętami kratownicowymi (pomija się siły inercji wieszaków);
- są komplanarne z cięgnami głównymi i napinającymi (wiatrowymi);
- są obciążone tylko oddziaływaniami cięgna i oddziaływaniami belki rurociągowej;
- pomija się jako drugorzędną zmianę długości wieszaków spowodowaną poziomymi przemieszczeniami cięgna w płaszczyźnie podwieszenia i wychyleniami cięgna z płaszczyzny podwieszenia;
- sztywność osiowa wieszaków $E_n^j A_n^j$ w danej płaszczyźnie podwieszenia „J” jest jednakowa, ale może się różnić między tymi płaszczyznami;
- wieszaki są jednakowo rozstawione na długości cięgien głównych i napinających we wszystkich płaszczyznach podwieszenia „J”, tak, aby na każdy wieszak przypadała sekcja rurociągu o długości a (cały ciężar rurociągu zostaje przekazany na cięgna);
- teoretyczny punkt zamocowania wieszaka znajduje się w środku ciężkości rurociągu;
- węzły połączenia wieszaka z belką rurociągową pokrywają się z wybranymi węzłami podziału belki na elementy skończone;
- kąt φ_0^j nachylenia zestawu wieszaków w płaszczyźnie „J”, mierzony prawoskrętnie względem osi pionowej Z , pokrywa się z kątem nachylenia płaszczyzny podwieszenia „J” (por. rys. 3.7), spełniając tym samym założenie o komplanarności wieszaków z cięgnami głównymi i napinającymi.



Rys. 3.9. Schemat wieszaka „k” w płaszczyźnie podwieszenia „J”:
a) oddziaływania wieszaka na cięgno i rurociąg,
b) oddziaływania cięgna i rurociągu na wieszak,
c) przemieszczenia końców wieszaka

Z analizy rysunku 3.9c wynika, że długość wieszaka w stanie równowagi statycznej wynosi $h_{0hk}^J = h_{0h}^J - z_c^J(x_{ck}^J)$, gdzie h_{0h}^J jest odległością pomiędzy osią rurociągu i cięciwą cięgna w płaszczyźnie podwieszenia „J”, a $z_c^J(x_{ck}^J)$ jest wartością funkcji zwisu cięgna w punkcie o współrzędnej x_{ck}^J mierzonej wzdłuż osi x_c^J lokalnego układu współrzędnych. Pod wpływem działania obciążeń, cięgno oraz belka doznają przemieszczeń, tym samym powodując zmianę długości wieszaka. Długość wieszaka po jego odkształceniu jest określona relacją $h_{hk}^J = h_{0hk}^J + \Delta h_{hk}^J$, gdzie $\Delta h_{hk}^J = s_{bk}^J - w_{ck}^J$. Przemieszczenie teoretycznego punktu połączenia wieszaka z rurociągiem oblicza się ze wzoru

$$\begin{aligned}
s_{bk}^J &= W_{bk} \cos \varphi_0^J - V_{bk} \sin \varphi_0^J = (\mathbf{a}'_\varphi)^T \mathbf{r}_{bk} = (\mathbf{a}'_\varphi)^T \mathbf{E}_{bk} \mathbf{q}_{bk} = \\
&= (\mathbf{a}'_\varphi)^T \mathbf{E}_{bk} \mathbf{A}_{bk} \mathbf{q}_b = (\mathbf{a}'_\varphi)^T \mathbf{H}_{bk} \mathbf{q}_b,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

gdzie macierze \mathbf{a}'_φ , \mathbf{E}_{bk} , \mathbf{A}_{bk} , \mathbf{H}_{bk} są takie same jak w wyrażeniach (3.47) i (3.48). Natomiast przemieszczenie punktu połączenia wieszaka z ciędnem w_{ck}^J , wynikające z przemieszczenia cięgna w płaszczyźnie podwieszenia „J” w węźle o współrzędnej x_{ck}^J , można obliczyć na podstawie formuły

$$w_{ck}^J = w_c^J(x_{ck}^J, t) = [\mathbf{f}_{cw}^J(x_{ck}^J)]^T \mathbf{q}_c^J = (\mathbf{f}_{cw}^J)^T \mathbf{q}_c^J, \tag{3.55}$$

gdzie $\mathbf{f}_{cw_k}^J = \mathbf{f}_{cw}^J(x_{ck}^J)$ jest wektorem funkcji aproksymacyjnych cięga (3.18)₃ obliczonym w punkcie o współrzędnej x_{ck}^J .

Oddziaływania rurociągu oraz cięga na wieszak, będące sumami sił wynikających z obciążeń statycznych i dynamicznych, oblicza się według relacji: $S_{hb_k}^J = S_{0hb_k}^J + \Delta S_{hb_k}^J$ oraz $R_{hc_k}^J = R_{0hc_k}^J + \Delta R_{hc_k}^J$. Z warunku równowagi sił działających na wieszak „k” w płaszczyźnie podwieszenia „J”, w statycznie zrównoważonej konfiguracji odniesienia, wynika że

$$R_{0hc_k}^J = S_{0hb_k}^J. \quad (3.56)$$

W warunkach dynamicznych wieszaki są zatem obciążone tylko dynamicznymi oddziaływaniami rurociągu i cięga. Równania równowagi tak obciążonych wieszaków można wyznaczyć na podstawie bilansu energii. Energia potencjalna odkształcenia zestawu wieszaków w jednej płaszczyźnie podwieszenia „J” wynosi

$$\begin{aligned} E_{ph}^J &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} (\Delta h_{hk}^J)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} (s_{bk}^J - w_{ck}^J)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T \left(\sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J (\mathbf{a}_\varphi^J)^T \mathbf{H}_{bk} \right) \mathbf{q}_b - \frac{1}{2} \mathbf{q}_b^T \left(\sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J (\mathbf{f}_{cw_k}^J)^T \right) \mathbf{q}_c + \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{q}_c^T \left(\sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{f}_{cw_k}^J (\mathbf{a}_\varphi^J)^T \mathbf{H}_{bk} \right) \mathbf{q}_b + \frac{1}{2} \mathbf{q}_c^T \left(\sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{f}_{cw_k}^J (\mathbf{f}_{cw_k}^J)^T \right) \mathbf{q}_c, \end{aligned} \quad (3.57)$$

a praca oddziaływań cięga oraz belki na przemieszczeniach węzłów kontaktowych jest wyrażona wzorem

$$L_h^J = \sum_{k=1}^{n_h} (\Delta S_{hb_k}^J s_{bk}^J - \Delta R_{hc_k}^J w_{ck}^J) = \mathbf{q}_b^T \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{hb_k}^J - \mathbf{q}_c^T \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cw_k}^J \Delta R_{hc_k}^J. \quad (3.58)$$

Korzystając z równań Lagrange’a otrzymuje się układ równań równowagi, który w notacji macierzowej można zapisać w postaci

$$\mathbf{K}_h^J \mathbf{q}_h^J = \mathbf{R}_h^J, \quad (3.59)$$

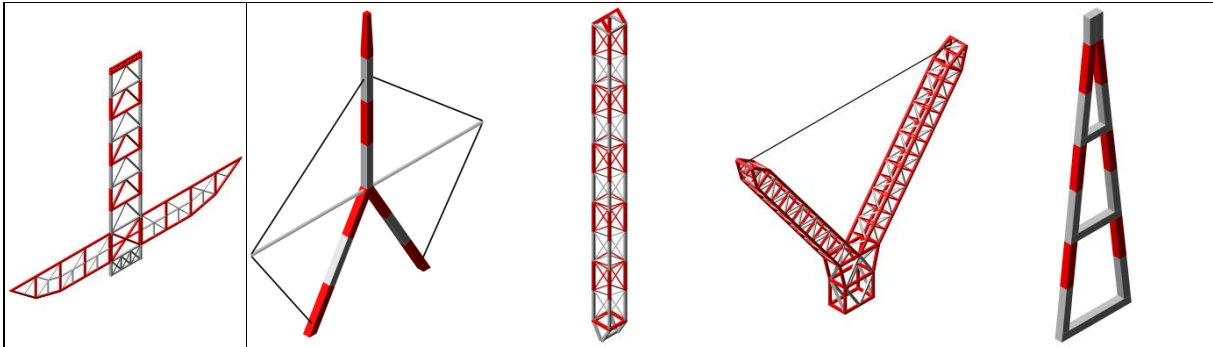
gdzie $\mathbf{q}_h^J = \text{col}(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c)$, a macierz sztywności i wektor obciążeń uogólnionych oblicza się ze wzorów:

$$\mathbf{K}_h^J = \text{grad}_{q_h^J} E_{ph}^J = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J (\mathbf{a}_\varphi^J)^T \mathbf{H}_{bk} & - \sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J (\mathbf{f}_{cwk}^J)^T \\ - \sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{f}_{cwk}^J (\mathbf{a}_\varphi^J)^T \mathbf{H}_{bk} & \sum_{k=1}^{n_h} \frac{E_h^J A_h^J}{h_{0hk}^J} \mathbf{f}_{cwk}^J (\mathbf{f}_{cwk}^J)^T \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{R}_h^J = \text{grad}_{q_h^J} L_h^J = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{hb}^J \\ \mathbf{R}_{hc}^J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{hbk}^J \\ - \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{hck}^J \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

3.3.4. Pylony

Na rysunku 3.10 przedstawiono typy pylonów najczęściej stosowane w ruropiętych mostach wiszących. Jak widać, rozwiązania konstrukcyjne pylonów charakteryzują się dużą różnorodnością, mają niewiele cech wspólnych oprócz tego, że wszystkie służą podparciu cięgien nośnych i wiatrowych oraz poza niektórymi przypadkami także ruropięty. Efektywną i wydajną numerycznie metodą modelowania tego typu konstrukcji jest klasyczna metoda elementów skończonych, która pozwala na uwzględnienie różnych wariantów rozwiązań konstrukcyjnych bez potrzeby uszczegółowienia samego modelu. Biorąc powyższe pod uwagę, właśnie tę metodę zastosowano w niniejszej pracy do budowy modelu obliczeniowego pylonów.



Rys. 3.10. Widok najczęściej stosowanych rozwiązań konstrukcyjnych pylonów w wiszących mostach ruropiętych

Procedura metody elementów skończonych jest powszechnie znana [106], [150], dlatego nie będzie przedstawiana w tej pracy. Przyjęto, że stan przemieszczeń i geometria każdego z dwóch pylonów są opisane w lokalnym, prostokątnym układzie współrzędnych o osiach zgodnych co do kierunku i zwrotu z osiami globalnego układu współrzędnych XYZ, który odnosi się do całego mostu ruropiętych. Zastosowaniu metody elementów skończonych do modelowania pylony „p1”, a następnie do pylonu „p2” prowadzi do dwóch

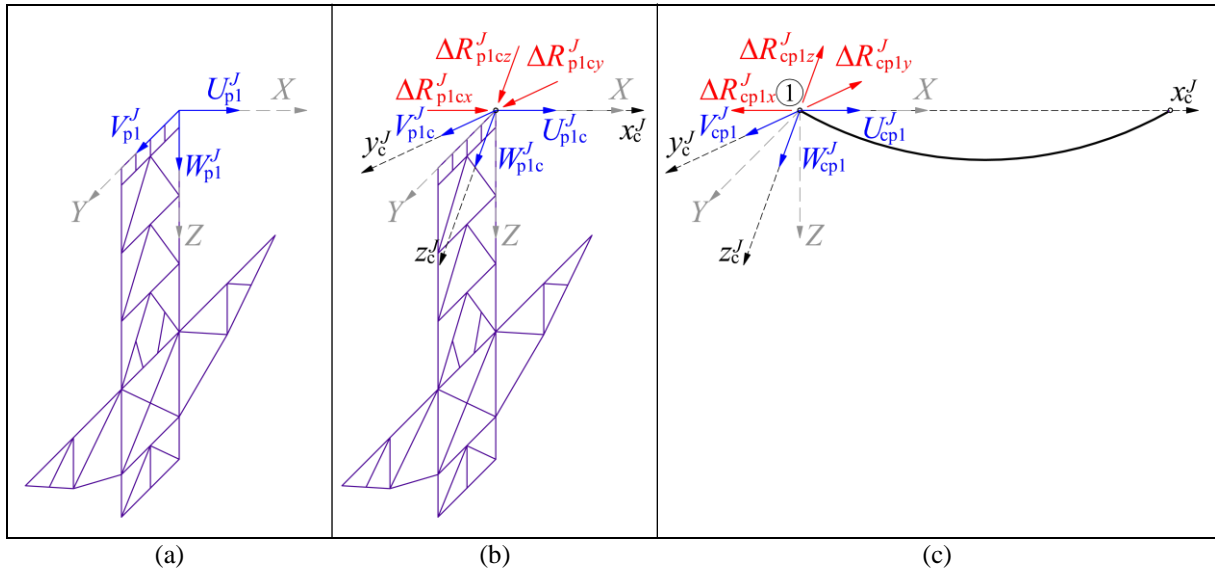
układów równań ruchu, które zapisane w notacji macierzowej mają następującą postać ogólną:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{p1} \ddot{\mathbf{q}}_{p1} + \mathbf{C}_{p1} \dot{\mathbf{q}}_{p1} + \mathbf{K}_{p1} \mathbf{q}_{p1} &= \mathbf{F}_{p1}, \\ \mathbf{B}_{p2} \ddot{\mathbf{q}}_{p2} + \mathbf{C}_{p2} \dot{\mathbf{q}}_{p2} + \mathbf{K}_{p2} \mathbf{q}_{p2} &= \mathbf{F}_{p2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

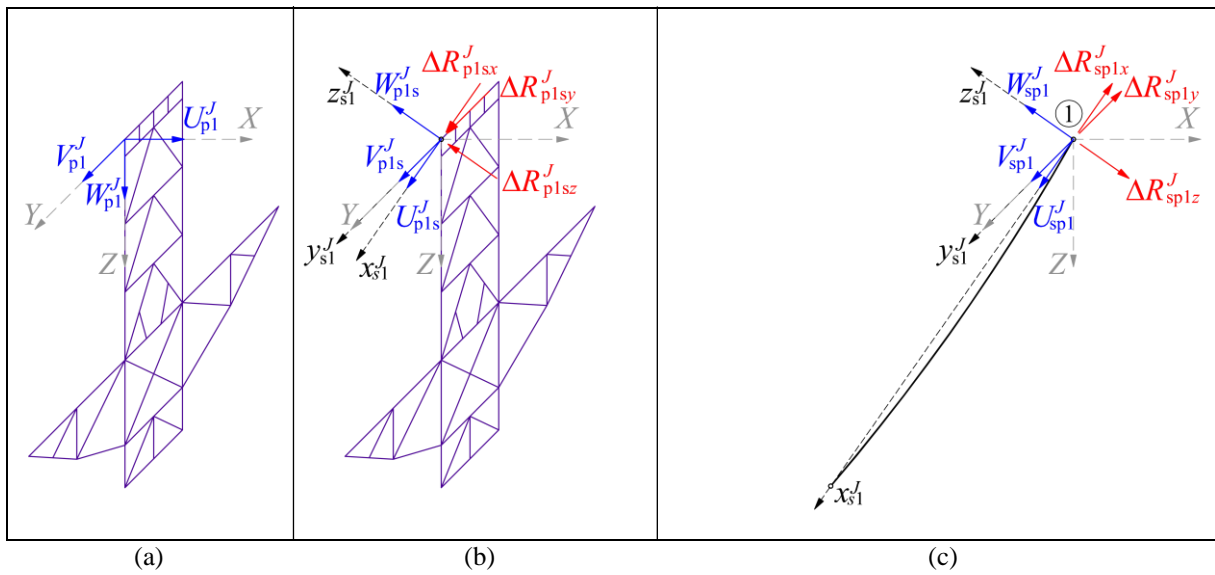
Macierze bezwładności \mathbf{B}_{p1} , \mathbf{B}_{p2} , sztywności \mathbf{K}_{p1} , \mathbf{K}_{p2} oraz wektory uogólnionych obciążeń zewnętrznych \mathbf{F}_{p1} , \mathbf{F}_{p2} zależą od przyjętych typów i liczby elementów skończonych, natomiast macierze tłumienia \mathbf{C}_{p1} , \mathbf{C}_{p2} wyznacza się na podstawie założonego modelu tłumienia. Na potrzeby dalszych rozważań przyjęto prętowe elementy skończone o sześciu stopniach swobody w każdym węźle podziału – po trzy przemieszczenia oraz obroty w kierunkach osi globalnego układu współrzędnych.

Głównym zadaniem pylonu jest przeniesienie na fundament wszystkich obciążeń czynnych oraz wszystkich obciążeń wynikających z oddziaływań połączonych z pylonem podstruktur, tj. cięgien oraz rurociągu, jeśli jest oparty na pylonie. Stosując analogiczne podejście jak w podpunktach 3.3.1b i 3.3.2, rozdzielono każdy z wektorów uogólnionych obciążeń zewnętrznych na dwa składniki: $\mathbf{F}_{p1} = \hat{\mathbf{F}}_{p1} + \mathbf{R}_{p1}$, $\mathbf{F}_{p2} = \hat{\mathbf{F}}_{p2} + \mathbf{R}_{p2}$. Pierwszy składnik, np. $\hat{\mathbf{F}}_{p1}$, wynika z czynnego dynamicznego obciążenia pylonu, spowodowanego przykładowo działaniem wiatru i może być wyznaczony według standardowej procedury metody elementów skończonych. Drugi składnik, np. \mathbf{R}_{p1} , jest efektem oddziaływań podstruktur połączonych z pylonem (cięgien głównych/wiatrowych \mathbf{R}_{p1c} i odciągów \mathbf{R}_{p1s} oraz belki rurociągowej \mathbf{R}_{p1b}), może być zatem wyrażony wzorem $\mathbf{R}_{p1} = \mathbf{R}_{p1c} + \mathbf{R}_{p1s} + \mathbf{R}_{p1b}$. Poszczególne składniki wektora oddziaływań \mathbf{R}_{p1} będą wyznaczone poniżej, jako gradient funkcji skalarowej określającej pracę oddziaływań kolejnych podstruktur na przemieszczeniach węzłów połączeniowych. Wektor oddziaływań podstruktur na pylon „p2” (\mathbf{R}_{p2}) wyznacza się analogicznie.

Na rysunkach 3.11 oraz 3.12 przedstawiono oddziaływania ciągną głównego i odciągu połączonych z pylonem „p1” oraz przemieszczenia węzłów połączeniowych w kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych danego ciągną i odciągu. Przyjęto, że w każdej płaszczyźnie podwieszenia „J” ciągną główne/wiatrowe i odciąg są połączone z pylonem w tym samym punkcie (węźle połączeniowym).



Rys. 3.11. Oddziaływanie ciągu głównego w płaszczyźnie podwieszenia „J” na pylon „p1”:
 a) przemieszczenia pylonu w węzle połączeniowym,
 b) siły oddziaływań ciągu na pylon,
 c) siły oddziaływań pylonu na ciągno



Rys. 3.12. Oddziaływanie odciągu w płaszczyźnie podwieszenia „J” na pylon „p1”:
 a) przemieszczenia pylonu w węzle połączeniowym,
 b) siły oddziaływań odciągu na pylon,
 c) siły oddziaływań pylonu na odciąg

W miejscu połączenia pylonu „p1” z ciągnem głównym występuje siła interakcji, której dynamiczny przyrost o składowych $\Delta R'_{plcx}$, $\Delta R'_{plcy}$, $\Delta R'_{plcz}$ w kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych ciągu x'_c , y'_c , z'_c wykonuje pracę na odpowiednich składowych przemieszczenia węzła połączeniowego, która jest wyrażona wzorem

$$\begin{aligned}
L_{p1c}^J &= \Delta R_{p1cx}^J U_{p1c}^J + \Delta R_{p1cy}^J V_{p1c}^J + \Delta R_{p1cz}^J W_{p1c}^J = (\mathbf{r}_{p1c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1c}^J = (\mathbf{r}_{p1}^J)^T (\mathbf{D}_{p1c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1c}^J = \\
&= (\mathbf{q}_{p1}^J)^T (\mathbf{E}_{p1}^J)^T (\mathbf{D}_{p1c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1c}^J = (\mathbf{q}_{p1}^J)^T (\mathbf{A}_{p1}^J)^T (\mathbf{E}_{p1}^J)^T (\mathbf{D}_{p1c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1c}^J = \\
&= (\mathbf{q}_{p1}^J)^T (\mathbf{H}_{p1c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1c}^J,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

gdzie $\Delta \mathbf{R}_{p1c}^J = [\Delta R_{p1cx}^J, \Delta R_{p1cy}^J, \Delta R_{p1cz}^J]^T$ oraz $\mathbf{H}_{p1c}^J = \mathbf{D}_{p1c}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J$. \mathbf{D}_{p1c}^J jest macierzą obrotu spełniającą zależność $\mathbf{r}_{p1c}^J = \mathbf{D}_{p1c}^J \mathbf{r}_{p1}^J$, gdzie $\mathbf{r}_{p1c}^J = [U_{p1c}^J, V_{p1c}^J, W_{p1c}^J]^T$ jest wektorem przemieszczeń węzła kontaktowego w kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych cięgna x_c^J, y_c^J, z_c^J , natomiast $\mathbf{r}_{p1}^J = [U_{p1}^J, V_{p1}^J, W_{p1}^J]^T$ jest wektorem przemieszczeń tego węzła w kierunkach osi globalnego układu współrzędnych X, Y, Z . Przemieszczenia zebrane w wektorze \mathbf{r}_{p1}^J stanowią tylko część zbioru przemieszczeń pylonu \mathbf{q}_{p1}^J w węźle kontaktowym, zatem $\mathbf{r}_{p1}^J = \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{q}_{p1}^J$. Następnie, \mathbf{A}_{p1}^J jest macierzą transformacji pełnego zbioru przemieszczeń uogólnionych pylonu \mathbf{q}_{p1} na odpowiedni podzbiór \mathbf{q}_{p1}^J , co można zapisać relacją $\mathbf{q}_{p1}^J = \mathbf{A}_{p1}^J \mathbf{q}_{p1}$. Wektor obciążeń węzłowych wynikających z oddziaływania cięgna głównego/wiatrowego „J” na pylon „p1” ma zatem postać

$$\mathbf{R}_{p1c}^J = \text{grad}_{\mathbf{q}_{p1}} L_{p1c}^J = (\mathbf{H}_{p1c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1c}^J. \tag{3.64}$$

Analogicznie jak w przypadku cięgna, w miejscu połączenia pylonu „p1” z odciałem w płaszczyźnie podwieszenia „J” występują składowe siły interakcji w kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych odciału $x_{s1}^J, y_{s1}^J, z_{s1}^J$. Ich dynamiczne przyrosty wykonują pracę na przemieszczeniach węzła pylonu w punkcie kontaktu z odciałem, określoną wzorem

$$\begin{aligned}
L_{p1s}^J &= \Delta R_{p1sx}^J U_{p1s}^J + \Delta R_{p1sy}^J V_{p1s}^J + \Delta R_{p1sz}^J W_{p1s}^J = (\mathbf{r}_{p1s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1s}^J = (\mathbf{r}_{p1}^J)^T (\mathbf{D}_{p1s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1s}^J = \\
&= (\mathbf{q}_{p1}^J)^T (\mathbf{E}_{p1}^J)^T (\mathbf{D}_{p1s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1s}^J = (\mathbf{q}_{p1}^J)^T (\mathbf{A}_{p1}^J)^T (\mathbf{E}_{p1}^J)^T (\mathbf{D}_{p1s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1s}^J = \\
&= (\mathbf{q}_{p1}^J)^T (\mathbf{H}_{p1s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1s}^J,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

gdzie $\mathbf{r}_{p1s}^J = [U_{p1s}^J, V_{p1s}^J, W_{p1s}^J]^T$ jest wektorem przemieszczeń węzła kontaktowego w kierunkach osi lokalnego układu współrzędnych odciału $x_{s1}^J, y_{s1}^J, z_{s1}^J$, natomiast \mathbf{D}_{p1s}^J jest macierzą obrotu spełniającą zależność $\mathbf{r}_{p1s}^J = \mathbf{D}_{p1s}^J \mathbf{r}_{p1}^J$. Ponadto $\mathbf{H}_{p1s}^J = \mathbf{D}_{p1s}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J$, a reszta

oznaczeń jest taka sama jak w wyrażeniu (3.63). Po obliczeniu wektora gradientu funkcji skalarowej (3.65) otrzymujemy wektor obciążeń węzłowych wynikających z oddziaływania odciaгу „J” na pylon „p1”, o następującej postaci

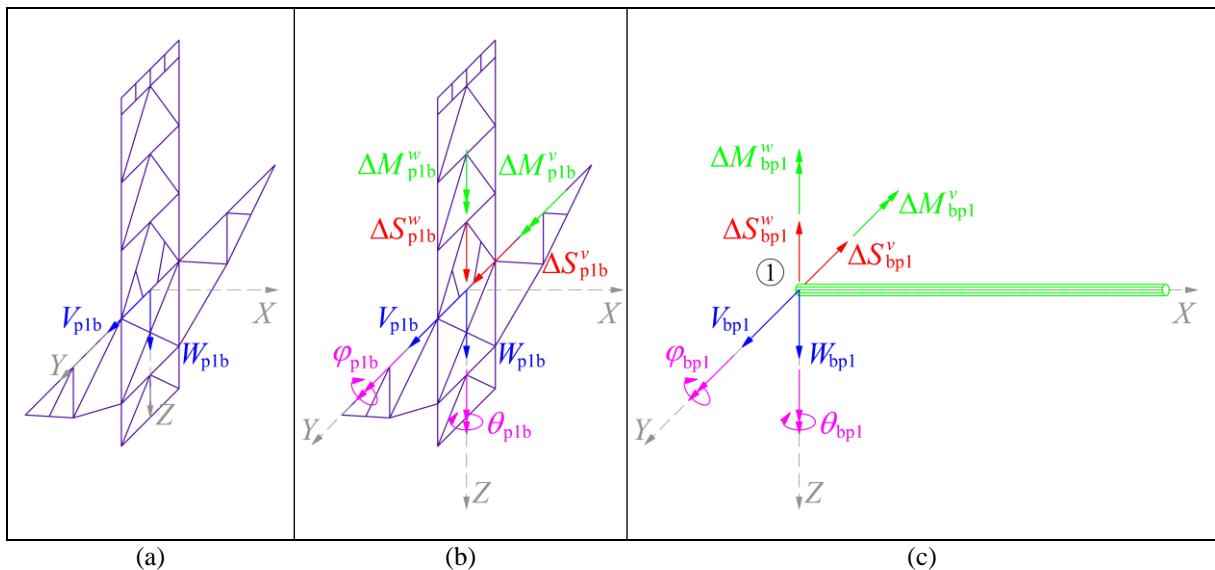
$$\mathbf{R}_{p1s}^J = \text{grad}_{\mathbf{q}_{p1}} L_{p1s}^J = (\mathbf{H}_{p1s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p1s}^J, \quad (3.66)$$

przy czym $\Delta \mathbf{R}_{p1s}^J = [\Delta R_{p1sx}^J, \Delta R_{p1sy}^J, \Delta R_{p1sz}^J]^T$ jest zbiorczym wektorem składowych dynamicznego oddziaływania odciaгу.

Sumując ze wszystkich płaszczyzn podwieszenia oddziaływania cięgien i odciaгуw na pylon otrzymujemy:

$$\mathbf{R}_{p1c} = \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1c}^J, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{R}_{p1s} = \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1s}^J.$$



Rys. 3.13. Oddziaływanie belki na pylon „p1”:
a) przemieszczenia pylonu w węzle połączeniowym,
b) siły oddziaływań belki na pylon,
c) siły oddziaływań pylonu na belkę

Oprócz obciążenia cięgnami, pylon może być także obciążony opartym na nim rurociągiem. Wówczas, pomiędzy połączonymi podstrukturami powstają siły wzajemnych interakcji, których dynamiczne przyrosty wykonują pracę na przemieszczeniach węzła pylonu w punkcie kontaktu (rys. 3.13). Zakładając jak w podpunkcie 3.3.2, że rurociąg jest utwierdzony w pylonie, a jego oddziaływania na pylon są związane tylko ze zginaniem

w dwóch płaszczyznach (pominięto problem sił podłużnych i skręcanie rurociągu), praca dynamicznych przyrostów oddziaływań w płaszczyźnie zginania XY oraz XZ wynosi

$$\begin{aligned} L_{p1b} &= \Delta S_{p1b}^w W_{p1b} + \Delta M_{p1b}^w \varphi_{p1b} + \Delta S_{p1b}^v V_{p1b} + \Delta M_{p1b}^v \theta_{p1b} = \\ &= \mathbf{q}_{p1b}^T \Delta \mathbf{R}_{p1b} = \mathbf{q}_{p1}^T \mathbf{A}_{p1b}^T \Delta \mathbf{R}_{p1b}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

W wyrażeniu (3.68) $\Delta \mathbf{R}_{p1b} = [\Delta S_{p1b}^w, \Delta M_{p1b}^w, \Delta S_{p1b}^v, \Delta M_{p1b}^v]^T$ jest zbiorczym wektorem dynamicznych przyrostów oddziaływania na pylon „p1” w węźle połączenia pylonu z belką, $\mathbf{q}_{p1b} = [W_{p1b}, \varphi_{p1b}, V_{p1b}, \theta_{p1b}]^T$ jest wektorem wybranych przemieszczeń pylonu, pokrywających się z przemieszczeniami rurociągu w węźle połączeniowym, natomiast \mathbf{A}_{p1b} jest macierzą transformacji pełnego zbioru przemieszczeń węzłowych pylonu \mathbf{q}_{p1} na odpowiedni podzbiór \mathbf{q}_{p1b} , wtedy $\mathbf{q}_{p1b} = \mathbf{A}_{p1b} \mathbf{q}_{p1}$. Ostateczną postać wektora obciążeń węzłowych pylonu „p1”, wynikających z oddziaływania rurociągu oblicza się ze wzoru

$$\mathbf{R}_{p1b} = \text{grad}_{\mathbf{q}_{p1}} L_{p1b} = \mathbf{A}_{p1b}^T \Delta \mathbf{R}_{p1b}. \quad (3.69)$$

Biorąc pod uwagę zależności (3.64), (3.66), (3.67), (3.69), oraz przeprowadzając analogiczną procedurę dla pylonu „p2”, możemy zapisać ogólne równania ruchu obu pylonów (3.62) w postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{p1} \ddot{\mathbf{q}}_{p1} + \mathbf{C}_{p1} \dot{\mathbf{q}}_{p1} + \mathbf{K}_{p1} \mathbf{q}_{p1} &= \hat{\mathbf{F}}_{p1} + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1s}^J + \mathbf{R}_{p1b}, \\ \mathbf{B}_{p2} \ddot{\mathbf{q}}_{p2} + \mathbf{C}_{p2} \dot{\mathbf{q}}_{p2} + \mathbf{K}_{p2} \mathbf{q}_{p2} &= \hat{\mathbf{F}}_{p2} + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p2c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p2s}^J + \mathbf{R}_{p2b}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

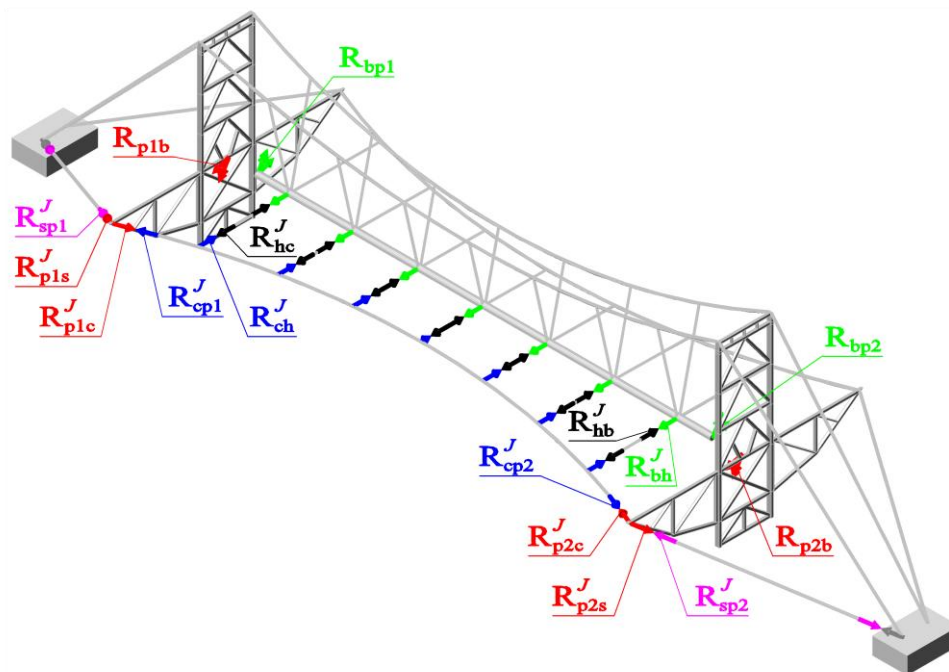
3.4. Agregacja równań (ogólne równanie ruchu wiszącego mostu rurociągowego)

Celem procedury agregacji jest sformułowanie globalnego równania ruchu konstrukcji w bazie niezależnych współrzędnych uogólnionych. Zgodnie z ideą techniki podstruktur należy spełnić dwa warunki: ciągłości przemieszczeń oraz równowagi sił interakcji w miejscach połączeń podstruktur. Pierwszy warunek można wyrazić poprzez następujące postulaty równości przemieszczeń w punktach połączeń między podstrukturami: $\mathbf{r}_{cp1}^J = \mathbf{r}_{p1c}^J$, $\mathbf{r}_{cp2}^J = \mathbf{r}_{p2c}^J$, $\mathbf{r}_{sp1}^J = \mathbf{r}_{p1s}^J$, $\mathbf{r}_{sp2}^J = \mathbf{r}_{p2s}^J$, $\mathbf{q}_{bp1} = \mathbf{q}_{p1b}$, $\mathbf{q}_{bp2} = \mathbf{q}_{p2b}$. Uwzględniając powyższe postulaty,

współrzędne brzegowe cięgien, odciągów oraz belki wyrażone za pomocą współrzędnych uogólnionych pylonów mają postaci:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{cp1}^J &= \mathbf{H}_{p1c}^J \mathbf{q}_{p1}, & \mathbf{r}_{cp2}^J &= \mathbf{H}_{p2c}^J \mathbf{q}_{p2}, \\
 \mathbf{r}_{sp1}^J &= \mathbf{H}_{p1s}^J \mathbf{q}_{p1}, & \mathbf{r}_{sp2}^J &= \mathbf{H}_{p2s}^J \mathbf{q}_{p2}, \\
 \mathbf{r}_{bp1}^w &= \mathbf{E}_{bp1}^w \mathbf{q}_{bp1} = \mathbf{E}_{bp1}^w \mathbf{A}_{p1b} \mathbf{q}_{p1} = \mathbf{H}_{p1b}^w \mathbf{q}_{p1}, & \mathbf{r}_{bp2}^w &= \mathbf{E}_{bp2}^w \mathbf{q}_{bp2} = \mathbf{E}_{bp2}^w \mathbf{A}_{p2b} \mathbf{q}_{p2} = \mathbf{H}_{p2b}^w \mathbf{q}_{p2}, \\
 \mathbf{r}_{bp1}^v &= \mathbf{E}_{bp1}^v \mathbf{q}_{bp1} = \mathbf{E}_{bp1}^v \mathbf{A}_{p1b} \mathbf{q}_{p1} = \mathbf{H}_{p1b}^v \mathbf{q}_{p1}, & \mathbf{r}_{bp2}^v &= \mathbf{E}_{bp2}^v \mathbf{q}_{bp2} = \mathbf{E}_{bp2}^v \mathbf{A}_{p2b} \mathbf{q}_{p2} = \mathbf{H}_{p2b}^v \mathbf{q}_{p2},
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

gdzie $\mathbf{H}_{p1c}^J = \mathbf{D}_{p1c}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J$, $\mathbf{H}_{p1s}^J = \mathbf{D}_{p1s}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J$ i analogicznie \mathbf{H}_{p2c}^J , \mathbf{H}_{p2s}^J (por. (3.63) i (3.65)), oraz przyjęto oznaczenia $\mathbf{H}_{p1b}^w = \mathbf{E}_{bp1}^w \mathbf{A}_{p1b}$, $\mathbf{H}_{p1b}^v = \mathbf{E}_{bp1}^v \mathbf{A}_{p1b}$ i analogicznie \mathbf{H}_{p2b}^w , \mathbf{H}_{p2b}^v .



Rys. 3.14. Siły interakcji w węzłach połączeń podstruktur

Drugi warunek postulujący równowagę sił interakcji w miejscach połączeń podstruktur sprowadza się do następujących zależności, wynikających z rysunku 3.14:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{cp1}^J &= \mathbf{R}_{p1c}^J, & \mathbf{R}_{cp2}^J &= \mathbf{R}_{p2c}^J, \\
 \mathbf{R}_{sp1}^J &= \mathbf{R}_{p1s}^J, & \mathbf{R}_{sp2}^J &= \mathbf{R}_{p2s}^J, \\
 \mathbf{R}_{bp1}^J &= \mathbf{R}_{p1b}^J, & \mathbf{R}_{bp2}^J &= \mathbf{R}_{p2b}^J, \\
 \mathbf{R}_{ch}^J &= \mathbf{R}_{hc}^J, & \mathbf{R}_{bh}^J &= \mathbf{R}_{hb}^J.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Pierwszym krokiem procedury agregacji równań podstruktur: (3.19), (3.23) (3.53), (3.59), (3.70) jest transformacja niezależnych współrzędnych uogólnionych całego układu \mathbf{q} na współrzędne lokalne podstruktur według relacji

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad (3.73)$$

gdzie $\mathbf{y} = \text{col}(\mathbf{q}_c^I, \dots, \mathbf{q}_c^{N_p}, \mathbf{q}_{s1}^I, \dots, \mathbf{q}_{s1}^{N_p}, \mathbf{q}_{s2}^I, \dots, \mathbf{q}_{s2}^{N_p}, \mathbf{q}_h^I, \dots, \mathbf{q}_h^{N_p}, \mathbf{q}_{p1}, \mathbf{q}_{p2}, \mathbf{q}_b)$ jest wektorem łącznym zawierającym współrzędne lokalne podstruktur. Poszczególne bloki wektora \mathbf{y} są następujące:

- $\mathbf{q}_c^J = \text{col}(\mathbf{r}_{cp1}^J, \mathbf{r}_{cp2}^J, \mathbf{q}_{cu}^J, \mathbf{q}_{cv}^J, \mathbf{q}_{cw}^J)$ to wektor zbiorczy współrzędnych cięgna głównego/wiatrowego leżącego w płaszczyźnie podwieszenia „J”, na który składają się wektory przemieszczeń brzegowych w punktach połączenia z pylonem „p1” oraz „p2”, odpowiednio $\mathbf{r}_{cp1}^J = \text{col}(U_{cp1}^J, V_{cp1}^J, W_{cp1}^J)$, $\mathbf{r}_{cp2}^J = \text{col}(U_{cp2}^J, V_{cp2}^J, W_{cp2}^J)$, oraz wektory współrzędnych uogólnionych cięgna \mathbf{q}_{cu}^J , \mathbf{q}_{cv}^J , \mathbf{q}_{cw}^J , stąd całkowity rozmiar wektora \mathbf{q}_c^J jest równy $\dim \mathbf{q}_c^J = (3+3+3n_c^J) \times 1$;
- $\mathbf{q}_{s1}^J = \text{col}(\mathbf{r}_{sp1}^J, \mathbf{r}_{sr1}^J, \mathbf{q}_{s1u}^J, \mathbf{q}_{s1v}^J, \mathbf{q}_{s1w}^J)$ jest zbiorczym wektorem współrzędnych odciągu wchodzącego w skład płaszczyzny podwieszenia „J”, który jest połączony z pylonem „p1”, gdzie $\mathbf{r}_{sp1}^J = \text{col}(U_{sp1}^J, V_{sp1}^J, W_{sp1}^J)$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych w punkcie połączenia z pylonem „p1”, $\mathbf{r}_{sr1}^J = \text{col}(U_{sr1}^J, V_{sr1}^J, W_{sr1}^J)$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych w miejscu połączenia z fundamentem, przy czym $\mathbf{r}_{sr1}^J = \mathbf{0}$, oraz \mathbf{q}_{s1u}^J , \mathbf{q}_{s1v}^J , \mathbf{q}_{s1w}^J są to wektory współrzędnych uogólnionych odciągu, przy czym całkowity rozmiar wektora jest równy $\dim \mathbf{q}_{s1}^J = (3+3+3n_{s1}^J) \times 1$;
- $\mathbf{q}_{s2}^J = \text{col}(\mathbf{r}_{sp2}^J, \mathbf{r}_{sr2}^J, \mathbf{q}_{s2u}^J, \mathbf{q}_{s2v}^J, \mathbf{q}_{s2w}^J)$ jest zbiorczym wektorem współrzędnych odciągu wchodzącego w skład płaszczyzny podwieszenia „J”, który jest połączony z pylonem „p2”, gdzie $\mathbf{r}_{sp2}^J = \text{col}(U_{sp2}^J, V_{sp2}^J, W_{sp2}^J)$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych w punkcie połączenia z pylonem „p2”, $\mathbf{r}_{sr2}^J = \text{col}(U_{sr2}^J, V_{sr2}^J, W_{sr2}^J)$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych w miejscu połączenia z fundamentem, przy czym $\mathbf{r}_{sr2}^J = \mathbf{0}$, oraz \mathbf{q}_{s2u}^J , \mathbf{q}_{s2v}^J , \mathbf{q}_{s2w}^J są to wektory współrzędnych uogólnionych odciągu, przy czym całkowity rozmiar wektora jest równy $\dim \mathbf{q}_{s2}^J = (3+3+3n_{s2}^J) \times 1$;

- $\mathbf{q}_h^J = \text{col}(\mathbf{q}_b, \mathbf{q}_c^J)$ jest wektorem zawierającym współrzędne lokalne zestawu wieszaków wchodzących w skład płaszczyzny podwieszenia „J”, wyrażonym przy użyciu współrzędnych belki oraz cięgna;
- \mathbf{q}_{p1} oraz \mathbf{q}_{p2} to wektory współrzędnych uogólnionych pylonów „p1” oraz „p2” z uwzględnieniem warunków brzegowych, przy czym na potrzeby dalszych rozważań przyjęto, że rozmiary wektorów są równe odpowiednio n_{p1} oraz n_{p2} ;
- $\mathbf{q}_b = \text{col}(\mathbf{q}_b^w, \mathbf{q}_b^v) = \text{col}(\mathbf{r}_{bp1}^w, \mathbf{r}_{bp2}^w, \mathbf{q}_{br}^w, \mathbf{r}_{bp1}^v, \mathbf{r}_{bp2}^v, \mathbf{q}_{br}^v)$ to wektor współrzędnych (tj. przemieszczeń węzłowych) rurociągu, w którym \mathbf{r}_{bp1}^w , \mathbf{r}_{bp2}^w , oraz \mathbf{r}_{bp1}^v , \mathbf{r}_{bp2}^v są wektorami zawierającymi przemieszczenia translacyjne i kątowe, odpowiednio w płaszczyznach zginania XZ oraz XY, w węzłach skrajnych tj. w miejscu połączeń belki z pylonami „p1” oraz „p2”, natomiast \mathbf{q}_{br}^w oraz \mathbf{q}_{br}^v to wektory zawierające przemieszczenia w węzłach środkowych belki, odpowiednio w płaszczyznach zginania XZ oraz XY, przy czym rozmiar wektora można obliczyć ze wzoru $\dim \mathbf{q}_b = (2 + 2 + 2(n_b - 1) + 2 + 2 + 2(n_b - 1)) \times 1$.

Natomiast wektor \mathbf{q} zawierający zbiór niezależnych współrzędnych uogólnionych ma strukturę: $\mathbf{q} = \text{col}(\mathbf{q}_{cr}^I, \dots, \mathbf{q}_{cr}^{N_p}, \mathbf{q}_{s1r}^I, \dots, \mathbf{q}_{s1r}^{N_p}, \mathbf{q}_{s2r}^I, \dots, \mathbf{q}_{s2r}^{N_p}, \mathbf{q}_{p1}, \mathbf{q}_{p2}, \mathbf{q}_{br})$, gdzie dla uproszczenia zapisano $\mathbf{q}_{cr}^J = \text{col}(\mathbf{q}_{cu}^J, \mathbf{q}_{cv}^J, \mathbf{q}_{cw}^J)$, $\mathbf{q}_{s1r}^J = \text{col}(\mathbf{q}_{s1u}^J, \mathbf{q}_{s1v}^J, \mathbf{q}_{s1w}^J)$, $\mathbf{q}_{s2r}^J = \text{col}(\mathbf{q}_{s2u}^J, \mathbf{q}_{s2v}^J, \mathbf{q}_{s2w}^J)$ oraz $\mathbf{q}_{br} = \text{col}(\mathbf{q}_{br}^w, \mathbf{q}_{br}^v)$. Rozmiar wektora \mathbf{q} można określić ze wzoru

$$\dim \mathbf{q} = \left[\sum_{J=1}^{N_p} (3n_c^J + 3n_{s1}^J + 3n_{s2}^J) + n_{p1} + n_{p2} + 4(n_b - 1) \right] \times 1. \quad \text{Szczegółową postać macierzy}$$

transformacji \mathbf{A} , występującej we wzorze (3.73) określającą transformację współrzędnych, pokazano w Załączniku 2.

Drugim krokiem procedury agregacji jest łączny zapis równań ruchu podstruktur, zgodnie z przyjętą strukturą wektora współrzędnych lokalnych podstruktur. Łączne równanie podstruktur w bazie nadmiarowej \mathbf{y} ma postać

$$\mathbf{B}_y \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_y \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}_y + \mathbf{K}_y^{nl}) \mathbf{y} = \mathbf{F}_y + \mathbf{R}_y, \quad (3.74)$$

w której macierze bezwładności, tłumienia oraz sztywności poszczególnych podstruktur są zestawione w macierze blokowo-diagonalne, a wektory prawych stron równań podstruktur w wektory łączne. Przykładowo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_y &= \text{diag}(\mathbf{K}_c^I, \dots, \mathbf{K}_c^{N_p}, \mathbf{K}_{s1}^I, \dots, \mathbf{K}_{s1}^{N_p}, \mathbf{K}_{s2}^I, \dots, \mathbf{K}_{s2}^{N_p}, \mathbf{K}_h^I, \dots, \mathbf{K}_h^{N_p}, \mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_{p2}, \mathbf{K}_b), \\
\mathbf{K}_y^{nl} &= \text{diag}(\mathbf{K}_c^{nlI}, \dots, \mathbf{K}_c^{nlN_p}, \mathbf{K}_{s1}^{nlI}, \dots, \mathbf{K}_{s1}^{nlN_p}, \mathbf{K}_{s2}^{nlI}, \dots, \mathbf{K}_{s2}^{nlN_p}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{K}_b^{nl}), \\
\mathbf{R}_y &= \text{col} \left(\mathbf{R}_{cp1}^I + \mathbf{R}_{cp2}^I + \mathbf{R}_{ch}^I, \dots, \mathbf{R}_{cp1}^{N_p} + \mathbf{R}_{cp2}^{N_p} + \mathbf{R}_{ch}^{N_p}, \mathbf{R}_{sp1}^I + \mathbf{R}_{sr1}^I, \dots, \mathbf{R}_{sp1}^{N_p} + \mathbf{R}_{sr1}^{N_p}, \right. \\
&\quad \left. \mathbf{R}_{sp2}^I + \mathbf{R}_{sr2}^I, \dots, \mathbf{R}_{sp2}^{N_p} + \mathbf{R}_{sr2}^{N_p}, \mathbf{R}_h^I, \dots, \mathbf{R}_h^{N_p}, \right. \\
&\quad \left. \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1s}^J + \mathbf{R}_{p1b}, \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p2c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p2s}^J + \mathbf{R}_{p2b}, \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{bh}^J + \mathbf{R}_{bp1} + \mathbf{R}_{bp2} \right).
\end{aligned}$$

Kolejnym krokiem procedury agregacji jest zamiana zmiennych w równaniu (3.74) poprzez podstawienie zależności (3.73), a następnie lewostronne pomnożenie równania (3.74) przez transponowaną macierz transformacji \mathbf{A}^T . W wyniku otrzymuje się finalne nieliniowe równanie ruchu wiszącego mostu rurociągowego, sformułowane w zredukowanej bazie współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{nl})\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (3.75)$$

gdzie $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_y \mathbf{A}$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y \mathbf{A}$, $\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_y \mathbf{A}$, $\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_y$. Zgodnie z ideą techniki podstruktur, uwzględnienie warunków ciągłości przemieszczeń (3.71) i równowagi sił interakcji w miejscach połączeń podstruktur (3.72) doprowadziło do wyzerowania się wektora sił brzegowych $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{R}_y = \mathbf{0}$ w równaniu wynikowym (3.75). Szczegółową postać tego wektora wraz ze sprawdzeniem równości $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ przedstawiono w Załączniku 3.

3.5. Zagadnienia szczegółowe

3.5.1. Wstępny naciąg cięgien (globalne równanie równowagi)

Niewątpliwie jednym z ważniejszych etapów projektowania mostów wiszących jest ustalenie odpowiedniego wstępnego napięcia cięgien. W rzeczywistości trudno jednoznacznie ustalić dokładną wartość minimalnego naciągu cięgien, ponieważ zależy ona od wielu czynników takich jak: etap budowy, ciężar własny, temperatura, obciążenia zmienne itp. Jednak w pierwszej kolejności zawsze należy wyznaczyć wartość naciągu, który będzie kompensował ciężar własny mostu.

Korzystając z równań (3.44), opisujących równowagę sił działających w stanie odniesienia na belkę w węźle „ k ”, równania równowagi dla całej belki można zdefiniować następująco:

$$\sum_{k=1}^{n_h} \sum_{J=1}^{N_p} S_{0bhk}^J \sin \varphi_0^J = 0, \quad (3.76)$$

$$\sum_{k=1}^{n_h} \sum_{J=1}^{N_p} S_{0bhk}^J \cos \varphi_0^J = n_h a m_b g.$$

Porządkując wyrazy oraz uwzględniając zależność $n_h a = l_b$, równania (3.76) zapisano w postaci:

$$\sum_{J=1}^{N_p} \sin \varphi_0^J \sum_{k=1}^{n_h} S_{0bhk}^J = 0, \quad (3.77)$$

$$\sum_{J=1}^{N_p} \cos \varphi_0^J \sum_{k=1}^{n_h} S_{0bhk}^J = m_b g l_b.$$

Następnie, przekształcając wyrażenie (3.16) na zastępcze obciążenie ciągła głównego „J” oraz biorąc pod uwagę zbiorcze równanie równowagi wieszaków w płaszczyźnie podwieszenia „J” (3.56), otrzymano

$$\sum_{k=1}^{n_h} S_{0hb k}^J = \sum_{k=1}^{n_h} R_{0hc k}^J = \tilde{q}_{cz}^J l_c^J - q_{cz}^J L_c^J, \quad (3.78)$$

gdzie $\tilde{q}_{cz}^J = H_{0c}^J 8 f_c^J / (l_c^J)^2$, $L_c^J = \int_0^{l_c^J} (\cos \alpha_{0c}^J)^{-1} dx$ oraz $q_{cz}^J = m_c^J g \cos \varphi_0^J$. W powyższej zależności skorzystano z warunków równowagi między łączonymi podstrukturami. Podstawienie relacji (3.78) do (3.77) prowadzi do układu równań:

$$\sum_{J=1}^{N_p} \frac{8 f_c^J}{l_c^J} H_{0c}^J \sin \varphi_0^J = \sum_{J=1}^{N_p} L_c^J m_c^J g \cos \varphi_0^J \sin \varphi_0^J, \quad (3.79)$$

$$\sum_{J=1}^{N_p} \frac{8 f_c^J}{l_c^J} H_{0c}^J \cos \varphi_0^J = \sum_{J=1}^{N_p} L_c^J m_c^J g (\cos \varphi_0^J)^2 + m_b g l_b.$$

Równania (3.79) są warunkami, jakie muszą spełniać naciągi wstępne cięgien głównych/wiatrowych H_{0c}^J , aby w przedstawionym modelu mostu rurociągowego nie doszło do zginania rurociągu w stanie równowagi statycznej.

3.5.2. Tłumienie drgań

Określenie cech tłumienia drgań konstrukcji budowlanych jest zagadnieniem złożonym, ponieważ rzeczywista natura oporów ruchu nie jest dostatecznie poznana.

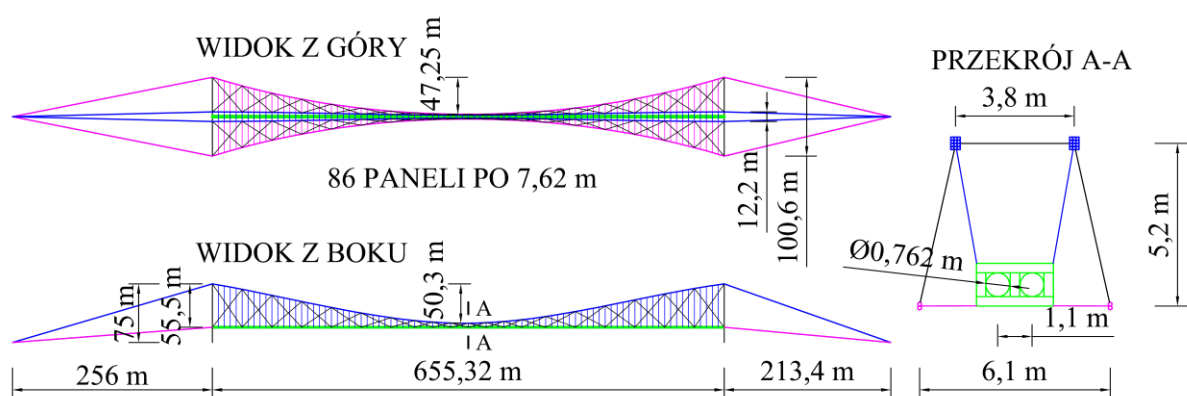
Konstrukcje budowlane na ogół nie zawierają w sposób jawny podłączonych tłumików, a źródłem oporów ruchu mogą być zarówno opory wewnętrzne wynikające z niesprężystych odkształceń materiału jak również opory zewnętrzne reprezentujące tłumienie ze strony środowiska (np. opór powietrza). W praktyce stosuje się różne warianty modelu tłumienia, odpowiadające ogólnie przyjętemu założeniu o wiskotycznym charakterze oporów ruchu [31], [83]. Według Langerera [83], w jednym z wariantów, tzw. tłumieniu konstrukcyjnym (masowym), zakłada się, że opory ruchu są proporcjonalne do pędu masy, wtedy $\mathbf{C} = \mu\mathbf{B}$, gdzie μ jest parametrem tłumienia konstrukcyjnego. W kolejnym wariantcie, zwanym tłumieniem materiałowym lub Voigta-Kelvina, przyjmuje się, że opory ruchu są proporcjonalne do prędkości reakcji sprężystej. Macierz tłumienia ma wtedy postać $\mathbf{C} = \kappa\mathbf{K}$, gdzie κ jest parametrem tłumienia materiałowego (czasem retardacji). Możliwy jest również wariant kombinowany w którym uwzględnione są zarówno wewnętrzne jak i zewnętrzne opory ruchu (tłumienie Rayleigha), wówczas $\mathbf{C} = \mu\mathbf{B} + \kappa\mathbf{K}$. Potwierdzenie lub odrzucenie założenia o przyjęciu określonego modelu tłumienia może nastąpić dopiero po badaniach doświadczalnych już wykonanej konstrukcji lub na podstawie wniosków z badań podobnych typów konstrukcji [31]. Co więcej, niewłaściwy wybór modelu tłumienia może prowadzić do błędnej oceny odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Należy zatem przyjąć taki model, który najbardziej odzwierciedla rzeczywiste cechy tłumienia badanej konstrukcji.

W przypadku rurociągowych mostów wiszących, częstotliwości podstawowe w początkowej strefie widma własnego są bardzo niskie. Przykładowo, w przypadku mostu Grand Tower w Illinois pierwsza częstotliwość drgań poziomych antysymetrycznych wynosi 0,13 Hz, symetrycznych 0,16 Hz, natomiast analogiczne częstotliwości własne drgań pionowych wynoszą kolejno: 0,22 Hz i 0,28 Hz [50]. Zatem model Voigta-Kelvina, gdzie tłumienie rośnie wraz z częstością drgań wydaje się bardziej odpowiedni do tego typu konstrukcji niż model masowy, a dodatkowo szybkie wygaszanie wysokich form drgań może być korzystne, ponieważ są one obarczone dużym błędem wynikającym z dyskretyzacji układu ciągłego. Jednak z praktycznego punktu widzenia można też stwierdzić, że przy bardzo małym tłumieniu, jakim charakteryzują się rurociągowy mosty wiszące, wpływ ewentualnych sił oporów ruchu o charakterze wewnętrznym jest pomijalny [14], [31]. Wtedy zasadniczy wpływ na tłumienie mają opory o charakterze zewnętrznym (np. tarcie w połączeniach między elementami konstrukcyjnymi lub opór powietrza). W związku z tym, w niniejszej pracy zdecydowano się zastosować model tłumienia masowego do opisu oporów ruchu rurociągowego mostu wiszącego, gdzie $\mathbf{C} = \mu\mathbf{B}$ i parametr tłumienia konstrukcyjnego można wyznaczyć ze wzoru $\mu = 2a\omega$, w którym a jest liczbą tłumienia (ułamek tłumienia

krytycznego), natomiast ω jest najistotniejszą w danym zadaniu częstością własną konstrukcji.

Należy tu jednak podkreślić, że zastosowana w niniejszej pracy technika podstruktur pozwala na niezależne sformułowanie równań ruchu dla poszczególnych elementów konstrukcyjnych mostu. Możliwe jest zatem przyjęcie indywidualnej wartości parametru tłumienia oraz indywidualnego modelu tłumienia dla każdej wydzielonej podstruktury.

3.5.3. Model numeryczny przykładowego rurociągowego mostu wiszącego



Rys. 3.15. Widok mostu Grant Tower w Illinois

Przykładowym obiektem analiz w tej pracy będzie hipotetyczny rurociągowy most wiszący wzorowany na rzeczywistym obiekcie, tj. moście Grant Tower w Illinois. Grand Tower jest jednoprzęsłowym mostem o rozpiętości łącznej 1124,72 m (rys. 3.15).

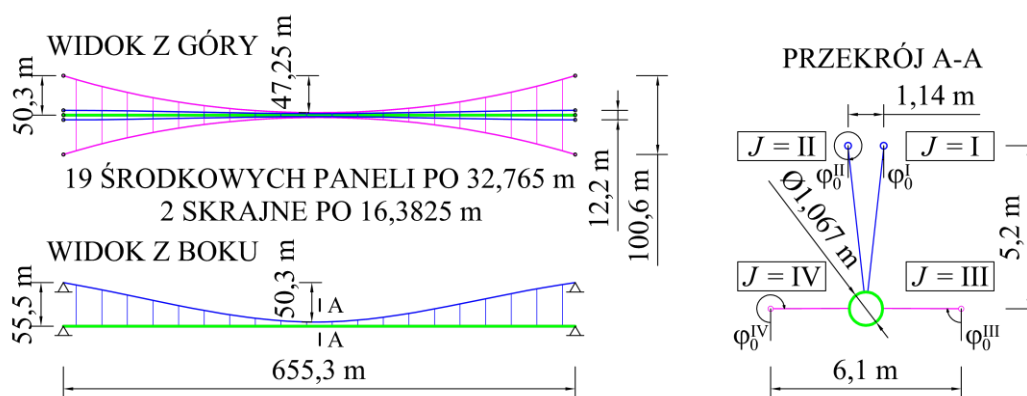
Tabela 3.1. Parametry elementów ciągnowych

	Pole przekroju	Moduł sprężystości	Siła zrywająca	Masa
	[mm ²]	[MPa]	[kN]	[kg/m]
Cięgna główne	14868	137900	19865	122,3
Cięgna wiatrowe	3470	137900	4636	28,6
Wieszaki główne	302	165500	427	-
Wieszaki wiatrowe	151	165500	214	-

Rozpiętość przęsła głównego mostu Grant Tower wynosi 655,32 m, natomiast odległość do zakotwień 256 m oraz 213,4 m. Podwieszony dźwigar składa się z dwóch rurociągów o średnicy 30 cali, tj. 0,762 m. Całkowita wysokość pylonów wynosi 75 m, natomiast rozpiętość ramion wiatrowych 100,6 m. Pionowo mierzona odległość pomiędzy punktami podparcia cięgien głównych na pylonach a osią rurociągu wynosi 55,5 m. Wieszaki we wszystkich płaszczyznach podwieszenia są rozstawione równomiernie wzdłuż przęsła

głównego, co 7,62 m. Dodatkowo, pomiędzyciągami głównymi i wiatrowymi zastosowano ciąga diagonalne. Strzałki zwisu cięgien głównych oraz wiatrowych wynoszą odpowiednio 50,6 m (50,3 m w rzucie z boku) i 47,25 m. Dane dotyczące cięgien oraz wieszaków zebrano w tabeli 3.1.

Na potrzeby dalszych obliczeń przyjęto w tej pracy następujące uproszczenia schematu rzeczywistej konstrukcji: pominięto ciąga diagonalne jako drugorzędne elementy konstrukcyjne; zwiększono rozstaw wieszaków we wszystkich płaszczyznach podwieszenia przy jednoczesnym zwiększeniu pola przekroju tak, aby całkowita sztywność osiowa zestawu wieszaków była taka sama; przyjęto swobodnie podparty dźwigar w postaci pojedynczego rurociągu o średnicy 42 cali (tj. 1,067 m), wykonanego ze stali 5L-X65, zbliżonego ciężarem do nominalnych dwóch rurociągów o średnicy 30 cali; założono, że oba pylony są nieodkształcalne, a co za tym idzie pominięto odcinki odciągowe cięgien między pylonami i blokami kotwiącymi (rys. 3.16).



Rys. 3.16. Widok przyjętego modelu mostu Grand Tower

Płaszczyzny podwieszenia I oraz II, w których leżą ciąga główne są nachylone w odniesieniu do pionu odpowiednio o kąty $\varphi_0^I = 6,272^\circ$ oraz $\varphi_0^{II} = 353,728^\circ$, a płaszczyzny III i IV odpowiadające cięgnom wiatrowym są obrócone względem płaszczyzny pionowej o $\varphi_0^{III} = 90^\circ$ i $\varphi_0^{IV} = 270^\circ$. Parametry podwieszonego rurociągu przedstawiono w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Parametry rurociągu o średnicy 42 cale

Średnica	Grubość ścianki	Momenty bezwładności $J_{by} = J_{bz}$	Moduł sprężystości	Granica plastyczności	Masa jednostkowa
[mm]	[mm]	[mm ⁴]	[MPa]	[MPa]	[kg/m]
1066,8	17,5	$7,931 \cdot 10^9$	206800	448	452

Nieliniowe równanie ruchu przyjętego modelu mostu Grand Tower ma ogólną postać analogiczną do (3.75), tj.

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{nl})\mathbf{q} = \mathbf{F},$$

gdzie $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}_y \mathbf{A}$, $\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{K}_y \mathbf{A}$, $\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_y$, przy czym macierze blokowo-diagonalne \mathbf{B}_y oraz \mathbf{K}_y mają postaci:

$$\mathbf{K}_y = \text{diag}(\mathbf{K}_c^I, \mathbf{K}_c^{II}, \mathbf{K}_c^{III}, \mathbf{K}_c^{IV}, \mathbf{K}_h^I, \mathbf{K}_h^{II}, \mathbf{K}_h^{III}, \mathbf{K}_h^{IV}, \mathbf{K}_b),$$

$$\mathbf{B}_y = \text{diag}(\mathbf{B}_c^I, \mathbf{B}_c^{II}, \mathbf{B}_c^{III}, \mathbf{B}_c^{IV}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{B}_b),$$

a wektor łączny \mathbf{F}_y zależy od obciążenia poszczególnych podstruktur. Należy tu podkreślić, że w przypadku macierzy sztywności geometrycznej \mathbf{K}^{nl} pod uwagę można wziąć nieliniowość wynikającą tylko z wybranych cięgien lub samego rurociągu. W prezentowanym w tej pracy modelu numerycznym uwzględniono nieliniowość wynikającą z dużych przemieszczeń wszystkich cięgien oraz rurociągu. Po założeniu modelu tłumienia masowego w odniesieniu do całego układu, macierz tłumienia $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B}$. Poszczególne bloki macierzy agregacji \mathbf{A} , w związku z założeniem o nieodkształcalności pylonów, zależą od warunków podparcia podstruktur, a ich rozmiar od liczby wieszaków w jednej płaszczyźnie podwieszenia n_h , liczby elementów skończonych belki n_b oraz liczby funkcji aproksymujących przemieszczenia cięgna w płaszczyźnie podwieszenia „ J ” – n_c^J . Przyjmując, że wszystkie cięgna są podparte na pylonach nieprzesuwne w trzech kierunkach otrzymuje się $U_{cp1}^J = V_{cp1}^J = W_{cp1}^J = 0$ oraz $U_{cp2}^J = V_{cp2}^J = W_{cp2}^J = 0$, a stąd $\mathbf{r}_{cp1}^J = \mathbf{0}$ i $\mathbf{r}_{cp2}^J = \mathbf{0}$, gdzie $J = I, II, \dots, N_p$. W przypadku belki założono przegubowe, nieprzesuwne podparcie w skrajnych węzłach (na pylonach), zatem $V_{bp1} = W_{bp1} = 0$ i $V_{bp2} = W_{bp2} = 0$. Jawne postaci macierzy \mathbf{A} oraz wektorów \mathbf{y} i \mathbf{q} realizujących transformację $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{q}$ przedstawiono poniżej:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c^I \\ \mathbf{q}_c^{II} \\ \mathbf{q}_c^{III} \\ \mathbf{q}_c^{IV} \\ \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c^I \\ \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c^{II} \\ \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c^{III} \\ \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_c^{IV} \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_c^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_c^{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_c^{III} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_c^{IV} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_b \\ \mathbf{G}_c^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_c^{II} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_c^{III} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_c^{IV} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{cr}^I \\ \mathbf{q}_{cr}^{II} \\ \mathbf{q}_{cr}^{III} \\ \mathbf{q}_{cr}^{IV} \\ \mathbf{q}_{br} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{q}_c^J = \text{col}(\mathbf{r}_{cp1}^J, \mathbf{r}_{cp2}^J, \mathbf{q}_{cr}^J) = \mathbf{G}_c^J \mathbf{q}_{cr}^J$ oraz $\mathbf{q}_b = \text{col}(\mathbf{r}_{bp1}^w, \mathbf{r}_{bp2}^w, \mathbf{q}_{br}^w, \mathbf{r}_{bp1}^v, \mathbf{r}_{bp2}^v, \mathbf{q}_{br}^v) = \mathbf{G}_b \mathbf{q}_{br}$, przy czym $\mathbf{q}_{cr}^J = \text{col}(\mathbf{q}_{cu}^J, \mathbf{q}_{cv}^J, \mathbf{q}_{cw}^J)$ oraz $\mathbf{q}_{br} = \text{col}(\mathbf{r}_{br}^w, \mathbf{q}_{br}^w, \mathbf{r}_{br}^v, \mathbf{q}_{br}^v)$. Wektor przemieszczeń węzłowych \mathbf{q}_{br} , który w przypadku utwierdzenia węzłów skrajnych rurociągu dotyczył wyłącznie węzłów środkowych i był zapisany wzorem $\mathbf{q}_{br} = \text{col}(\mathbf{q}_{br}^w, \mathbf{q}_{br}^v)$, poszerzono tutaj o bloki $\mathbf{r}_{br}^w = [\varphi_{bp1}, \varphi_{bp2}]^T$ i $\mathbf{r}_{br}^v = [\theta_{bp1}, \theta_{bp2}]^T$, aby uwzględnić nieznane kąty obrotu węzłów skrajnych i w ten sposób wprowadzić założenie przegubowego podparcia. Niezerowe bloki macierzy transformacji \mathbf{A} mają następującą postać (por. Załącznik 2):

$$\mathbf{G}_c^J = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times n_c^J} & \mathbf{0}_{3 \times n_c^J} & \mathbf{0}_{3 \times n_c^J} \\ \mathbf{0}_{3 \times n_c^J} & \mathbf{0}_{3 \times n_c^J} & \mathbf{0}_{3 \times n_c^J} \\ \mathbf{I}_{n_c^J \times n_c^J} & \mathbf{0}_{n_c^J \times n_c^J} & \mathbf{0}_{n_c^J \times n_c^J} \\ \mathbf{0}_{n_c^J \times n_c^J} & \mathbf{I}_{n_c^J \times n_c^J} & \mathbf{0}_{n_c^J \times n_c^J} \\ \mathbf{0}_{n_c^J \times n_c^J} & \mathbf{0}_{n_c^J \times n_c^J} & \mathbf{I}_{n_c^J \times n_c^J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{b1} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{E}_{b2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2} & \mathbf{I}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2} & \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{E}_{b1} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{E}_{b2} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2} & \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2} & \mathbf{I}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} \end{bmatrix},$$

gdzie wymiary odpowiednich bloków zerowych $\mathbf{0}$ oraz macierzy jednostkowych \mathbf{I} są podane w indeksie dolnym, natomiast macierze:

$$\mathbf{E}_{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

realizują transformacje $\mathbf{r}_{bp1}^w = [W_{bp1}, \varphi_{bp1}]^T = \mathbf{E}_{b1} \mathbf{r}_{br}^w$ oraz $\mathbf{r}_{bp2}^w = [W_{bp2}, \varphi_{bp2}]^T = \mathbf{E}_{b2} \mathbf{r}_{br}^w$,
i analogicznie $\mathbf{r}_{bp1}^v = [V_{bp1}, \theta_{bp1}]^T = \mathbf{E}_{b1} \mathbf{r}_{br}^v$ i $\mathbf{r}_{bp2}^v = [V_{bp2}, \theta_{bp2}]^T = \mathbf{E}_{b2} \mathbf{r}_{br}^v$.

Zdefiniowany tu model wiszącego mostu rurociągowego będzie zastosowany do wszystkich analiz numerycznych, omówionych w dalszym ciągu rozprawy. W pierwszej kolejności zostanie wykorzystany do testów mających na celu zweryfikowanie poprawności oraz efektywności zbudowanego modelu obliczeniowego, ustalenie odpowiedniego podziału rurociągu na elementy skończone oraz optymalnej liczby funkcji bazowych, zastosowanych do aproksymacji przemieszczeń cięgien głównych i wiatrowych.

3.5.4. Zagadnienie własne – testy numeryczne

Problem zagadnienia własnego został rozwiązany przy założeniu liniowych drgań wokół położenia równowagi statycznej, zatem nieliniowe składniki równania ruchu (3.75) zostały pominięte. Ponadto, w celu przeprowadzenia wstępnych analiz przyjęto, że rurociąg jest pusty. Wtedy macierzowe równanie zagadnienia własnego ma postać [83]

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B}] \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.80)$$

W tabeli 3.3 zestawiono wartości częstości własnych w zależności od typu formy własnej, przyjmując do obliczeń różne rozmiary bazy aproksymacyjnej, gdzie n_h oznacza przyjętą liczbę wieszaków w jednej płaszczyźnie podwieszenia, n_b jest liczbą elementów skończonych belki, $n_c' = n_c$ określa liczbę elementów wektora $\mathbf{s}_c' = \mathbf{s}_c$ zawierającego funkcje aproksymujące przemieszczenia cięgien głównych i wiatrowych we wszystkich płaszczyznach podwieszenia. W ostatniej kolumnie zestawiono wyniki analizy zagadnienia własnego uzyskane dla ekwiwalentnego modelu mostu, utworzonego w programie metody elementów skończonych SOFiSTiK. W modelu ekwiwalentnym cięgna zamodelowano przy użyciu n_{elc} elementów cięgnowych umożliwiających zdefiniowanie naciągu wstępnego. Należy tu podkreślić, że w przypadku analizy zadania liniowego elementy cięgnowe są traktowane w programie SOFiSTiK jak pręty kratownicowe. Wieszaki potraktowano jako jednoelementowe pręty kratownicowe, przyjmując n_h wieszaków w jednej płaszczyźnie podwieszenia. Belka została zamodelowana za pomocą n_b dwuwęzłowych elementów belkowych, przy czym zablokowano na podporach możliwość obrotu belki wokół własnej osi wyłączając w ten sposób ruch skrętny. Symbol LSS w tabeli 3.3 oznacza liczbę niezależnych stopni swobody, gwiazdka (*) oznacza częstość podwójną.

Tabela 3.3. Częstości własne modelu wiszącego mostu rurociągowego [Hz]

		Autorski model oparty na technice podstruktur									MES	
		$n_h = 20$					$n_h = 5$	$n_h = 10$	$n_h = 20$	$n_h = 20$	$n_h = 20$	
		$n_b = 40$					$n_b = 10$	$n_b = 20$	$n_b = 40$	$n_b = 80$	$n_b = 40$	
		$n_c = 4$	$n_c = 6$	$n_c = 8$	$n_c = 10$	$n_c = 12$	$n_c = 10$				$n_{elc} = 40$	
LSS	208	232	256	280	304	160	200	280	440	706		
Globalne formy drgań pionowych	symetryczne	1	0,2322	0,2236	0,2222	0,2217	0,2216	0,1856	0,2208	0,2217	0,2217	0,2215
		2	0,3593	0,3445	0,3432	0,3429	0,3427	0,2567	0,3394	0,3429	0,3429	0,3428
		3	2,8061	0,4501	0,4294	0,4276	0,4270	0,3765	0,4195	0,4276	0,4275	0,4252
		4	2,8974	2,8061	0,6422	0,6160	0,6133	0,4177	0,5831	0,6160	0,6159	0,6108
	antysymetryczne	1	0,1591	0,1576	0,1572	0,1571	0,1570	0,1479	0,1567	0,1571	0,1571	0,1567
		2	0,9519	0,3274	0,3253	0,3247	0,3245	0,1855	0,3216	0,3247	0,3247	0,3235
		3	2,8411	1,4027	0,5126	0,5100	0,5092	0,3891	0,4947	0,5100	0,5099	0,5073
		4	2,9717	2,8411	1,8261	0,7221	0,7190	0,3974	0,6537	0,7221	0,7220	0,7177
Globalne formy drgań poziomych	symetryczne	1	0,1391	0,1356	0,1350	0,1348	0,1347	0,1237	0,1346	0,1348	0,1348	0,1341
		2	0,2017	0,1960	0,1957	0,1956	0,1956	0,1691	0,1948	0,1956	0,1956	0,1938
		3	2,7129	0,2944	0,2851	0,2841	0,2838	0,2837	0,2823	0,2841	0,2841	0,2822
		4	2,7999	2,7264	0,4642	0,4536	0,4524	0,3571	0,4477	0,4536	0,4536	0,4537
	antysymetryczne	1	0,09588	0,09505	0,09482	0,09472	0,09467	0,09108	0,09464	0,09472	0,09472	0,09407
		2	0,5368	0,2116	0,2103	0,2100	0,2098	0,1642	0,2093	0,2100	0,2100	0,2086
		3	2,7192	0,8120	0,3623	0,3606	0,3602	0,2997	0,3576	0,3606	0,3606	0,3598
		4	2,8282	2,7354	1,0998	0,5565	0,5544	0,4327	0,5450	0,5565	0,5564	0,5595
Lokalne formy ciężien głównych	symetryczne	1	0,1310*	0,1311*	0,1311*	0,1311*	0,1311*	0,1311*	0,1311*	0,1311*	0,1311*	0,1325*
		2	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3966*
		3	-	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6583*
		4	-	-	0,9133*	0,9133*	0,9133*	0,9133*	0,9133*	0,9133*	0,9133*	0,9160
	antysymetryczne	1	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2648*
		2	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5279*
		3	-	0,7829*	0,7828*	0,7828*	0,7828*	0,7828*	0,7828*	0,7828*	0,7828*	0,7878
		4	-	-	1,0438*	1,0437*	1,0437*	1,0437*	1,0437*	1,0437*	1,0437*	1,0428
Lokalne formy ciężien wiatrowych	symetryczne	1	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1310*	0,1328*
		2	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3916*	0,3974*
		3	-	0,6525*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6524*	0,6596*
		4	-	-	0,9134*	0,9134*	0,9133*	0,9134*	0,9134*	0,9134*	0,9134*	0,9178
	antysymetryczne	1	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2612*	0,2653*
		2	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5220*	0,5289*
		3	-	0,7830*	0,7829*	0,7829*	0,7829*	0,7829*	0,7829*	0,7829*	0,7829*	0,7893
		4	-	-	1,0439*	1,0438*	1,0438*	1,0438*	1,0438*	1,0438*	1,0438*	1,0448

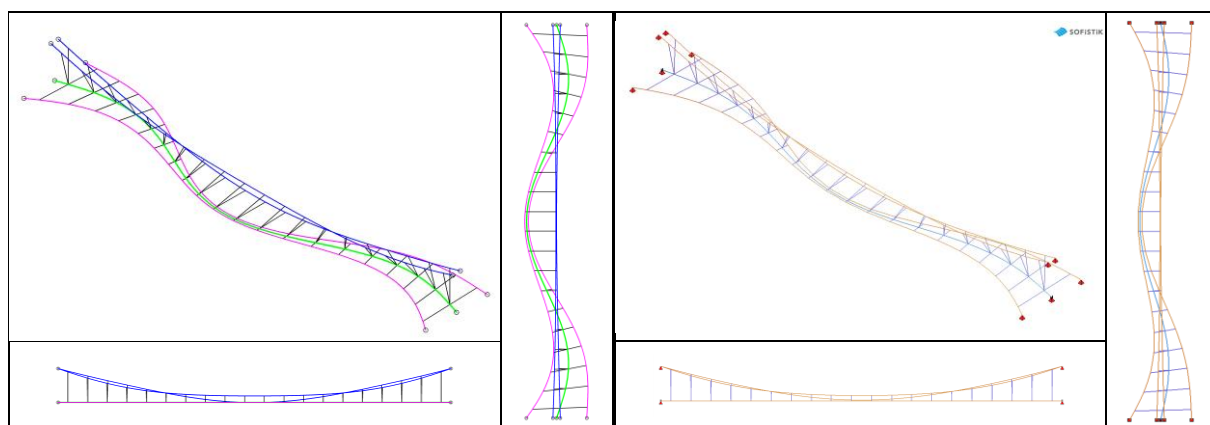
W celu ustalenia miarodajnej liczby funkcji aproksymujących przemieszczenia cięgien (n_c) założono po 20 wieszaków we wszystkich płaszczyznach podwieszenia oraz podział belki na 40 elementów skończonych. Obliczenia wykonano przyjmując wstępny statyczny naciąg cięgien wyznaczony ze wzorów (3.79), który dla cięgien głównych wynosi 3632,0 kN, a dla cięgien wiatrowych 847,6 kN. Z analizy tabeli 3.3 można wywnioskować, że zbyt mała liczba funkcji bazowych cięgien powoduje bardzo duże błędy w częstościach własnych drgań globalnych mostu (tj. charakteryzujących się sprzężonym ruchem cięgien i rurociągu). Zaobserwowano to zwłaszcza w wyższej strefie widma własnego, gdzie częstościom obciążonym dużymi błędami towarzyszyły formy o nieprawidłowym kształcie, spowodowanym błędami wynikającymi z dyskretyzacji. Stąd wynika wniosek, że o ruchu całego wiszącego mostu rurociągowego decydują w głównej mierze cięgna, co jest zgodne z intuicją inżynierską, ponieważ sztywność samego rurociągu w odniesieniu do sztywności całego mostu jest mała. Ponadto warto zauważyć, że zwiększenie liczby funkcji aproksymacyjnych, powodujące znaczącą poprawę częstości własnych drgań całego mostu, praktycznie już nie wpływa na częstości towarzyszące lokalnym formom drgań cięgien, co świadczy o efektywności przyjętego modelu cięgna.

Do analizy prowadzącej do ustalenia miarodajnej liczby elementów skończonych belki rurociągowej (n_b) przyjęto dla wszystkich cięgien liczbę funkcji aproksymacyjnych $n_c = 10$. Ponadto, pojawiła się konieczność powiązania liczby wieszaków z liczbą elementów belki, co wynikało z ograniczeń geometrycznych, ponieważ połączenia wieszaków z belką musiały pokrywać się z węzłami belki. Stąd, w tabeli 3.3 można zauważyć, że malejącej liczbie elementów skończonych n_b odpowiada zmniejszenie liczby wieszaków. Zmniejszenie liczby wieszaków spowodowało zmniejszenie ogólnej sztywności mostu, co z kolei przyczyniło się do spadku wartości częstości własnych drgań globalnych. Porównanie wyników uzyskanych przy podziale belki na 40 i 80 elementów, przy tej samej liczbie wieszaków $n_h = 20$, pokazuje, że podwojenie liczby elementów nie wpływa już znacząco na wyniki, zatem można uznać, że podział belki na 40 elementów jest z technicznego punktu widzenia wystarczający.

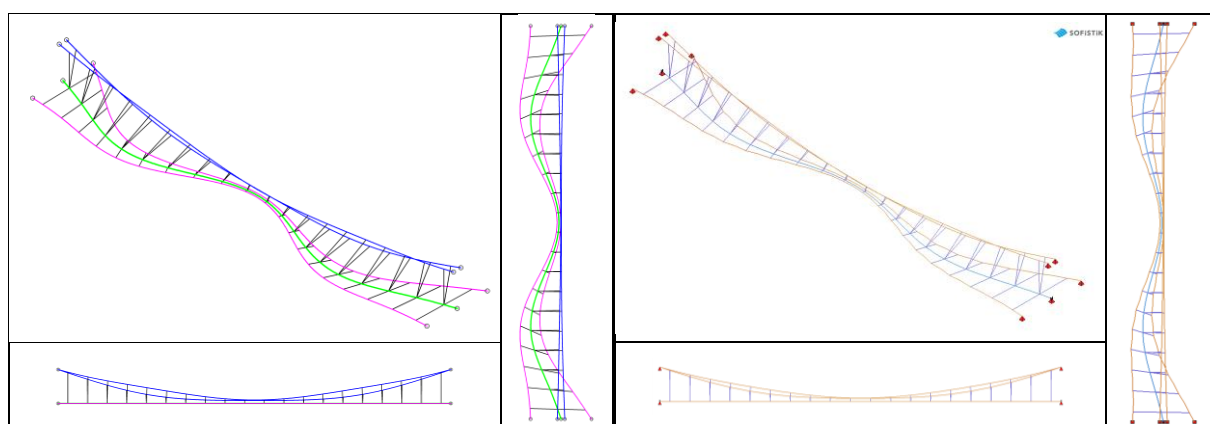
Na podstawie przedstawionych testów zbieżności i mając na uwadze potrzebę ograniczenia nakładów obliczeniowych w dalszych analizach numerycznych, w tym nieliniowych, do dalszych obliczeń przyjęto $n_h = 20$, $n_b = 40$, oraz $n_c = 10$. Porównując wartości częstości własnych otrzymane przy tych danych dla autorskiego modelu mostu, z częstościami otrzymanymi dla ekwiwalentnego modelu utworzonego w programie SOFiSTiK stwierdzono, że różnice nie przekraczają 2%, co świadczy o poprawności zaproponowanego modelu. Jednocześnie warto podkreślić, że do uzyskania wyników

o podobnej dokładności, za pomocą programu SOFiSTiK konieczna była 2,5-krotnie większa ogólna liczba stopni swobody (LSS), co z kolei pokazuje efektywność autorskiego modelu obliczeniowego mostu.

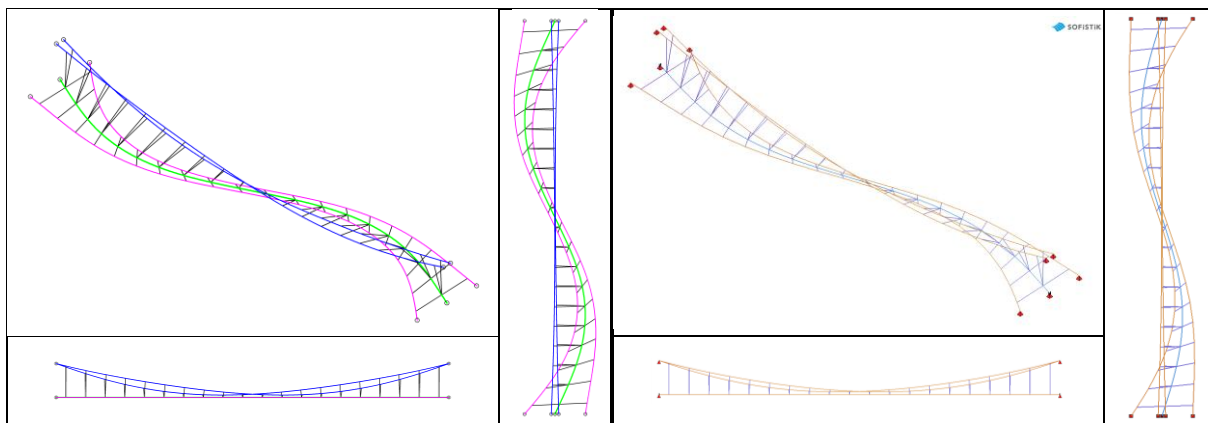
Na rysunkach 3.16-3.27 przedstawiono pierwsze dwie symetryczne i antysymetryczne globalne formy własne drgań poziomych i pionowych mostu, oraz pierwsze symetryczne i antysymetryczne lokalne formy własne drgań cięgien głównych i wiatrowych. Należy tutaj wspomnieć, że w przypadku lokalnych form cięgien otrzymano częstości podwójne odpowiadające dwóm różnym formom własnym. Formy te różniły się tylko ruchem w obrębie pary cięgien – w jednej formie ruch cięgien był współbieżny, w drugiej przeciwbieżny. Na rysunkach przedstawiono tylko jedną z tych form. Formy własne przedstawione z lewej strony każdego rysunku wyznaczono na podstawie modelu autorskiego, za pomocą programu opracowanego przez autora w środowisku Mathematica, natomiast formy własne pokazane z prawej strony rysunków uzyskano z użyciem programu SOFiSTiK.



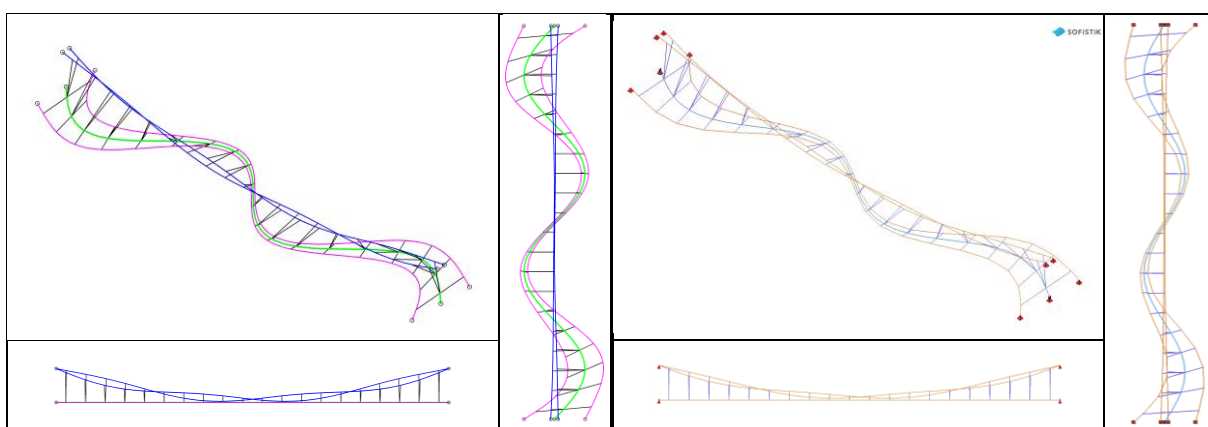
Rys. 3.16. Widok pierwszej symetrycznej formy drgań poziomych wiszącego mostu rurociągowego



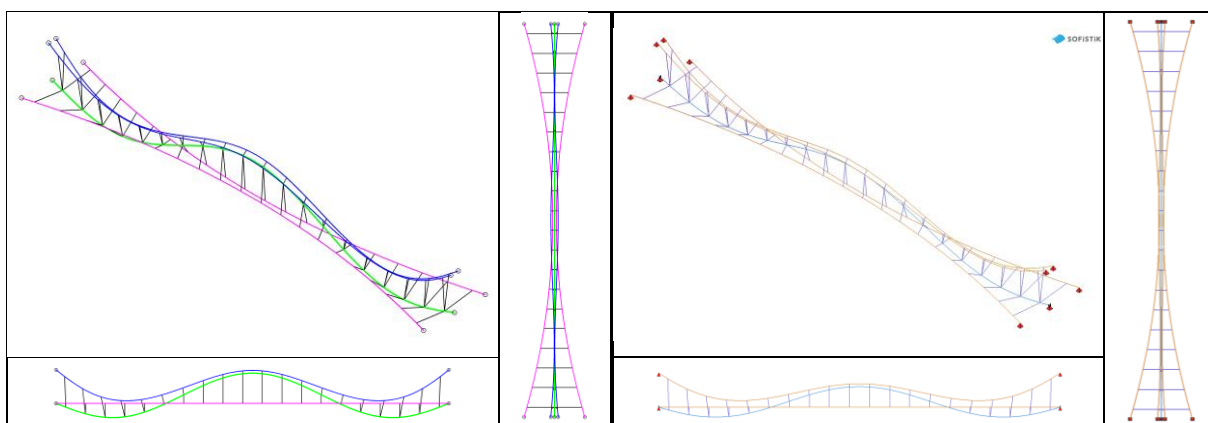
Rys. 3.17. Widok drugiej symetrycznej formy drgań poziomych wiszącego mostu rurociągowego



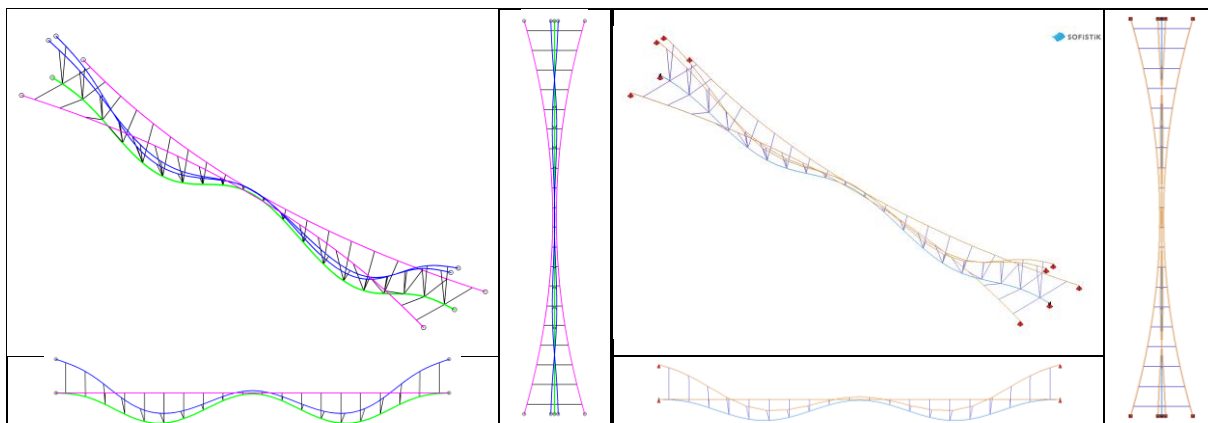
Rys. 3.18. Widok pierwszej antysymetrycznej formy drgań poziomych wiszącego mostu rurociągowego



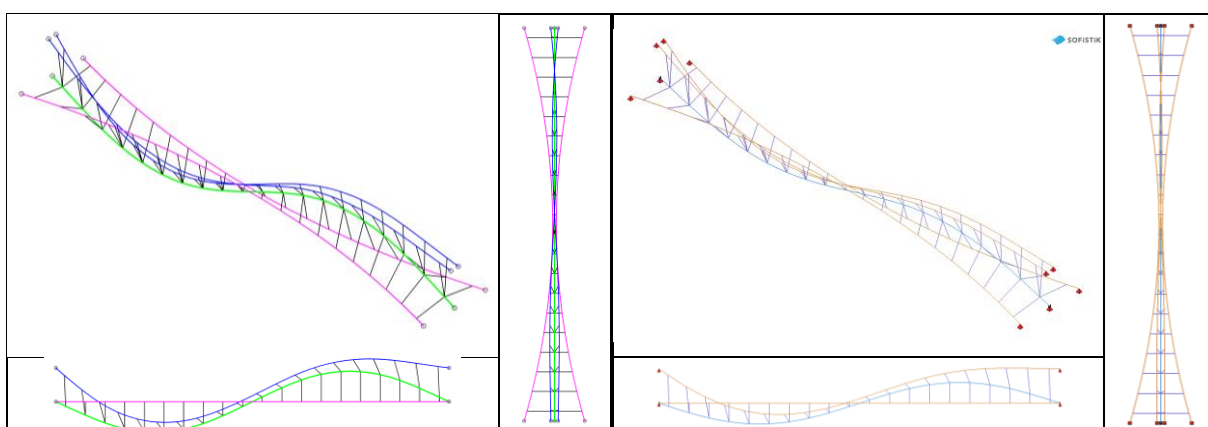
Rys. 3.19. Widok drugiej antysymetrycznej formy drgań poziomych wiszącego mostu rurociągowego



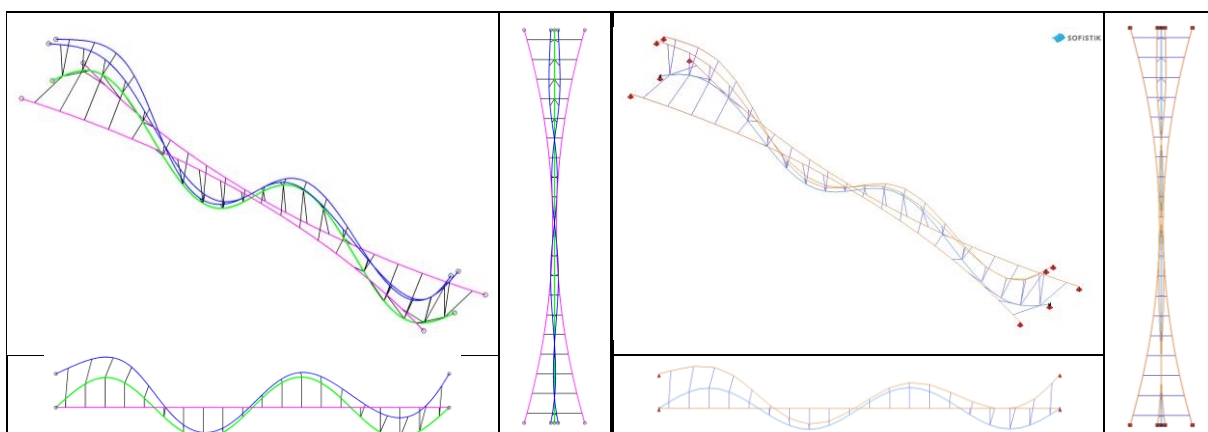
Rys. 3.20. Widok pierwszej symetrycznej formy drgań pionowych wiszącego mostu rurociągowego



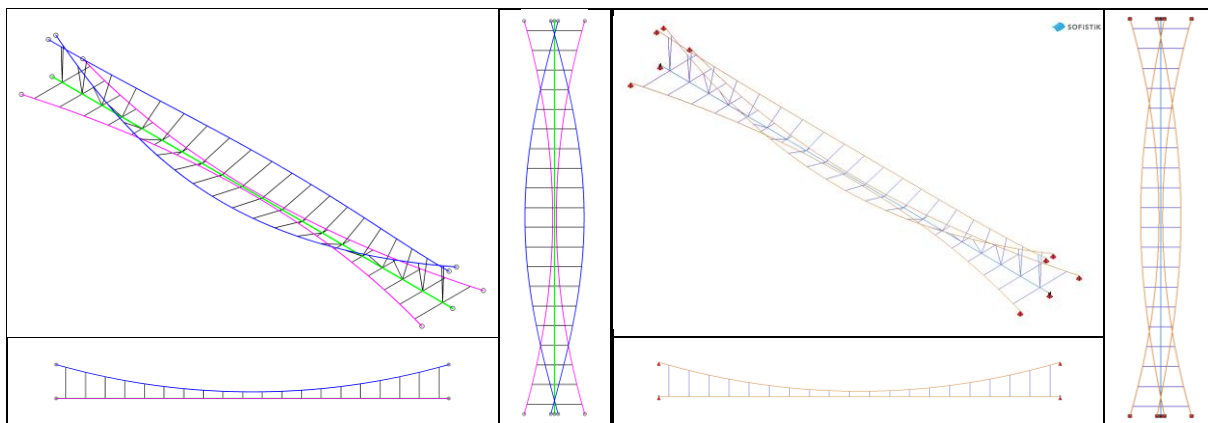
Rys. 3.21. Widok drugiej symetrycznej formy drgań pionowych wiszącego mostu rurociągowego



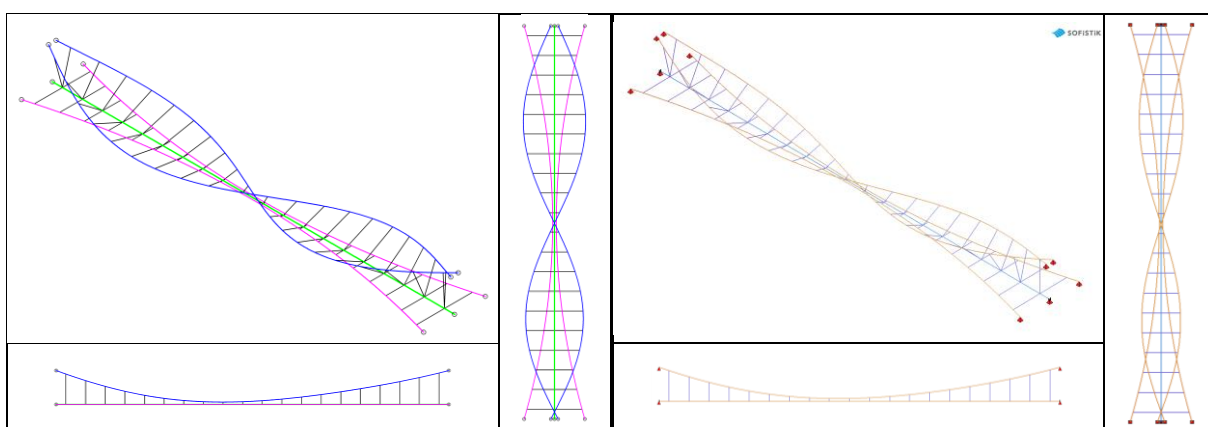
Rys. 3.22. Widok pierwszej antysymetrycznej formy drgań pionowych wiszącego mostu rurociągowego



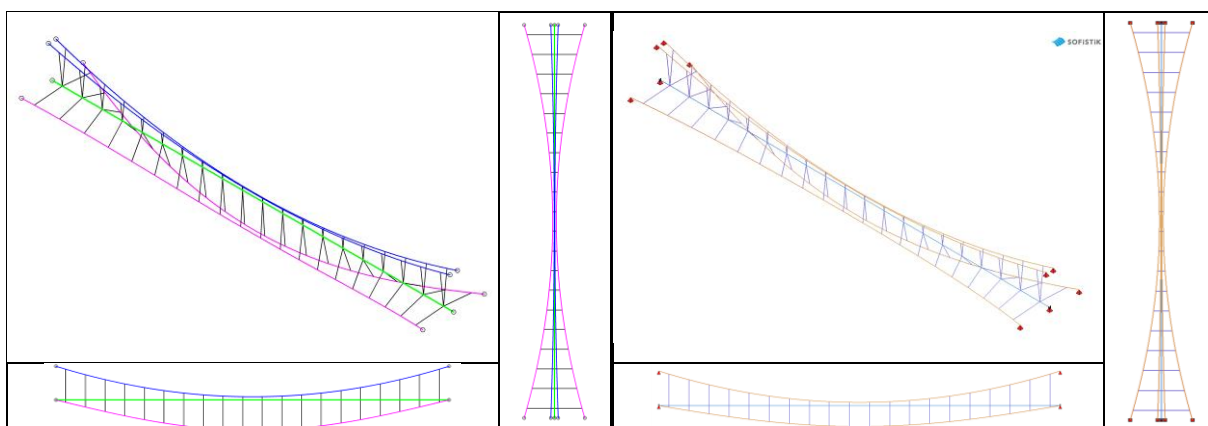
Rys. 3.23. Widok drugiej antysymetrycznej formy drgań pionowych wiszącego mostu rurociągowego



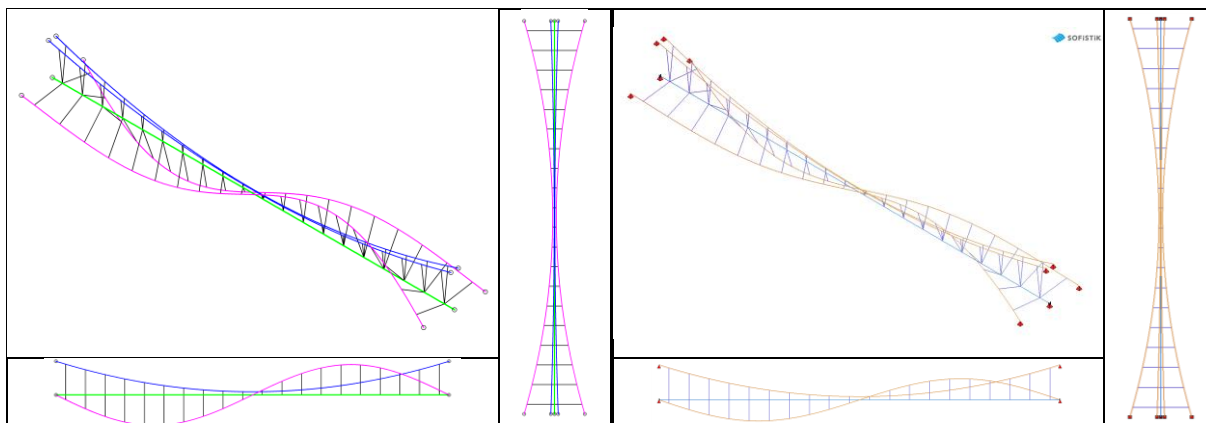
Rys. 3.24. Widok pierwszej symetrycznej formy lokalnych drgań cięgien głównych



Rys. 3.25. Widok pierwszej antysymetrycznej formy lokalnych drgań cięgien głównych



Rys. 3.26. Widok pierwszej symetrycznej formy lokalnych drgań cięgien wiatrowych



Rys. 3.27. Widok pierwszej antysymetrycznej formy lokalnych drgań cięgien wiatrowych

Porównując kształty wybranych form własnych otrzymanych przy użyciu programu SOFiSTiK oraz autorskiego modelu stwierdzono pełną zgodność ruchu podstruktur dla każdej z form. Jednak należy tutaj wspomnieć, że w przypadku form towarzyszącym wyższej strefie widma własnego w programie SOFiSTiK otrzymano błędne kształty zwłaszcza w lokalnych formach cięgien (co zaobserwowano również w przypadku analizy częstości własnych), natomiast odpowiadające im formy wyznaczone za pomocą autorskiego modelu były jeszcze zbieżne, co po raz kolejny świadczy o efektywności przedstawionego modelu cięgien w zastosowaniu do zagadnień dynamiki konstrukcji cięgowych. Ponadto analizując poszczególne formy widać, że przy formach drgań pionowych cięgien wiatrowe nie partycypują w ruchu całego mostu – wynika to z symetrii konstrukcji w płaszczyźnie pionowej. Natomiast w formach drgań poziomych, ze względu na brak symetrii w płaszczyźnie poziomej, można zauważyć ruch cięgien głównych.

3.6. Podsumowanie

W pierwszej kolejności w rozdziale 3 zaprezentowano stan wiedzy na temat metody CMS oraz ogólne założenia różnych wariantów metody podziału dowolnej konstrukcji na podukłady, wskazując na zalety tej metody. Na potrzeby niniejszej pracy wprowadzono termin „technika podstruktur” odnoszący się do generalnego algorytmu, który jest wspólny dla wszystkich wariantów metod podziału na podstruktury, tj.: podział złożonej konstrukcji na podstruktury, wybór układów odniesienia, wybór zbioru funkcji bazowych opisujących ruch danej podstruktury, wyprowadzenie równań ruchu niezależnie dla każdej wydzielonej podstruktury, sformułowanie globalnego równania ruchu konstrukcji przy wykorzystaniu warunków ciągłości przemieszczeń i równowagi sił w punktach połączeń podstruktur.

Następnie, generalny algorytm techniki podstruktur zastosowano do budowy modelu obliczeniowego rurociągowego mostu wiszącego, ze szczególnym uwzględnieniem specyficznych cech pracy każdej wyróżnionej podstruktury, tj. cięgien głównych i wiatrowych, wieszaków, odciągów, rurociągu oraz pylonów. W przypadku elementów cięgnowych, czyli cięgien głównych i wiatrowych oraz odciągów, zaproponowano ogólny, nieliniowy, ciągły model cięgna uwzględniający dowolny zwis statyczny, nachyloną cięciwę, wpływ dużych przemieszczeń, oraz kinematyczne wymuszenia w punktach podparcia. Układ cząstkowych równań różniczkowych opisujących drgania cięgna przekształcono do układu równań różniczkowych zwyczajnych w dziedzinie czasu za pomocą standardowej procedury Galerkina. Sformułowany, ogólny model cięgna zaadaptowano do modelowania cięgien głównych i wiatrowych oraz odciągów. Rurociąg potraktowano jako wiotką belkę o przekroju rurowym, zginaną w dwóch kierunkach i doznającą dużych ugięć. Wykorzystano nieliniowe równanie zginania belki Eulera-Bernoulliego, uzupełniając je składnikami wynikającymi z dynamiki i otrzymując w ten sposób różniczkowe, cząstkowe równania drgań giętych rurociągu. Pominięto wpływ drgań podłużnych oraz skrętnych. Zastosowano metodę elementów skończonych w ujęciu Galerkina w celu przekształcenia równań różniczkowych cząstkowych do układu równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu. Równania ruchu pylonów, ze względu na dużą różnorodność rozwiązań konstrukcyjnych, sformulowano stosując standardową procedurę MES. Wieszaki potraktowano jako odkształcalne pręty kratownicowe. Kończącym etapem algorytmu techniki podstruktur była agregacja równań z uwzględnieniem warunków zgodności przemieszczeń oraz równowagi sił interakcji w punktach połączeń podstruktur, która doprowadziła do końcowego nieliniowego macierzowego równania ruchu wiszącego mostu rurociągowego.

Należy tutaj podkreślić, że zaproponowane metody wyznaczenia równań ruchu poszczególnych podstruktur, a zwłaszcza elementów cięgnowych są na tyle ogólnie sformułowane, że całą procedurę można zaaplikować do szerokiej grupy rurociągowych mostów wiszących (por. Załącznik 1), a także do wantowych mostów rurociągowych oraz innych konstrukcji belkowo-cięgnowych.

W podpunkcie 3.5.1 zwrócono uwagę na konieczność doboru odpowiedniego naciągu wstępnego cięgien, a w 3.5.2 na dobór adekwatnego modelu tłumienia drgań w rurociągowych mostach wiszących.

Na potrzeby dalszych analiz przyjęto model hipotetycznego rurociągowego mostu wiszącego, wzorowany na rzeczywistym obiekcie. W kolejnym etapie, po pominięciu nieliniowych członów równania ruchu i tłumienia przeprowadzono analizę rozwiązań

zagadnienia własnego w zakresie częstości i form własnych, zakładając różne wartości parametrów dyskretyzacji modelu. Na podstawie tej analizy dokonano optymalnego doboru podziału belki na elementy skończone oraz rozmiaru bazy aproksymacyjnej dla cięgien. Po przyjęciu stosownej bazy aproksymacyjnej porównano otrzymane wartości częstości własnych oraz postacie form własnych z wynikami uzyskanymi dla ekwiwalentnego modelu utworzonego metodą MES w programie SOFiSTiK. Nie stwierdzono praktycznie żadnych różnic, jednak liczba niezależnych stopni swobody (liczba równań/niewiadomych) modelu MES wynosiła 706, czyli 2,5-krotnie więcej niż w przypadku modelu zaproponowanego w pracy opartego na technice podstruktur, gdzie liczba stopni swobody wynosiła 280. Tak duża różnica w liczbie stopni swobody wynikała z zastosowania w programie SOFiSTiK 40-stu elementów do zamodelowania każdego ciągu, w celu właściwego wyprofilowania jego kształtu, oraz z konieczności uwzględnienia dodatkowych stopni swobody w węzłach belki (możliwość ruchu skrętnego oraz w kierunku podłużnym) w porównaniu z założonym w tej pracy modelem rurociągu. Potwierdzono zatem skuteczność zastosowanej techniki podstruktur w tworzeniu wydajnych numerycznie modeli konstrukcji belkowo-ciężnowych.

Tak przygotowany model obliczeniowy wiszącego mostu rurociągowego będzie wykorzystany w dalszym ciągu rozprawy do analizy drgań liniowych i nieliniowych spowodowanych ruchem masy cieczy w rurociągu oraz liniowych drgań mostu poddanego działaniu turbulentnego wiatru.

4. Drgania spowodowane ruchem transportowanego medium

4.1. Wprowadzenie

Jak już wspomniano w punkcie 2.5, gdzie przedstawiono przegląd literatury na temat przepływu medium w rurociągu, efekty statyczne i dynamiczne wynikające z przepływu transportowanego medium mogą doprowadzić do przekroczenia założonego poziomu naprężeń lub przemieszczeń. Dotyczy to szczególnie sytuacji takich jak napełnianie/opróznianie rurociągu oraz przejazd urządzenia służącego do prac konserwacyjnych. W literaturze problem ten analizowano w większości na płaskich modelach mostu rurociągowego, chociaż w nielicznych pracach zastosowano model przestrzenny. Jednak w obu przypadkach były to modele liniowe.

W tej pracy, do analizy drgań wiszącego mostu rurociągowego spowodowanych przepływem medium wewnątrz rurociągu będzie zastosowany przestrzenny, nieliniowy model mostu przedstawiony w rozdziale 3. Wykorzystana do budowy modelu procedura techniki podstruktur daje bowiem możliwość znacznego zmniejszenia rozmiaru zadania w porównaniu z klasycznym podejściem MES, poprzez zastosowanie efektywnych dla danej podstruktury metod modelowania. W konsekwencji, nakład obliczeniowy potrzebny do obserwacji długich przebiegów nieliniowych drgań mostu rozpatrywanych w tym rozdziale jest na tyle zredukowany, że umożliwia obszerną analizę numeryczną problemu.

W pierwszej kolejności sformułowany zostanie model przepływającej przez rurociąg cieczy, dla którego wyprowadzona będzie jawna postać wektora obciążenia wraz z dodatkowymi składnikami wynikającymi z ruchu masy cieczy, które uzupełnią macierze bezwładności, sztywności i tłumienia. Na początku uwaga zostanie skupiona na sformułowaniu obciążeń podczas napływu cieczy do pustego rurociągu. Następnie przedstawiony zostanie przypadek, gdy płynąca ciecz całkowicie wypełnia rurociąg oraz możliwe będzie wyznaczenie krytycznej prędkości cieczy przy której nastąpi utrata zachowawczej postaci równowagi konstrukcji. W końcu, rozpatrzony będzie wariant obciążenia ruchomą masą cieczy, gdy rurociąg jest całkowicie wypełniony ruchomą cieczą, a następnie ciecz odpływa z rurociągu.

4.2. Obciążenie wynikające z przepływu cieczy w rurociągu

Przyjęto, że modelem fizycznym cieczy poruszającej się wewnątrz rurociągu jest półnieskończony odcinek równomiernie rozłożonej masy, przesuwałej się ze stałą

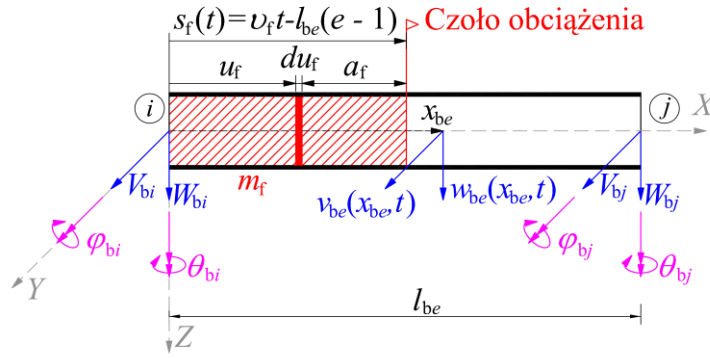
prędkością. Model bazuje na założeniu, że transportowane medium jest nieściśliwe i nie oddziałuje na ścianki rurociągu (brak tarcia i ciśnienia), a rozkład prędkości jest jednolity w przekroju rurociągu. Ciecz jest zatem traktowana jak ruchoma masa balastowa, co jest sporym uproszczeniem, ale dopuszczalnym, jeśli uwzględnimy fakt, że przepływ cieczy w rurociągu odbywa się w rzeczywistości z małymi prędkościami, nieprzekraczającymi 5 m/s.

Podobne obciążenie, w postaci półnieskończonego odcinka ruchomej masy rozpatrywał między innymi Langer w monografii [83]. Przedstawione rozwiązania dotyczyły drgań belki swobodnie podpartej o skończonej długości a obciążenie interpretowano jako komunikacyjne, reprezentujące np. przejazd pociągu. Procedura obliczeniowa przedstawiona w tym rozdziale bazuje na ogólnej koncepcji Langera opisanej we wspomnianej monografii. Tę ogólną koncepcję dostosowano w rozprawie do nieliniowego modelu rurociągu, sformułowanego w podpunkcie 3.3.2 metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkina. Rozpatrzono trzy scenariusze obciążenia dynamicznego: napływ cieczy do rurociągu, ruch cieczy wypełniającej rurociąg na całej jego długości i odpływ cieczy.

Napływ cieczy

Główne kroki wyprowadzenia składników równania ruchu rurociągu, wynikających z ruchu masy napływającej cieczy zostały przedstawione w pracach autora [103], [104] i [105] (prace współautorskie). Przyjęto, że w chwili początkowej $t = 0$ początek półnieskończonego odcinka masy, nazywany dalej czołem obciążenia, znajduje się w punkcie o współrzędnej globalnej $x_b = X = 0$, czyli na lewej skrajnej podporze rurociągu. W chwili $t > 0$ czoło obciążenia jest położone w punkcie $x_b = v_f t$, gdzie v_f jest stałą prędkością ruchu masy. Ponieważ belka rurociągową jest podzielona na elementy skończone, punkt $x_b = v_f t$ znajduje się w obszarze jednego z nich – elementu o numerze „ e ”. Liczba elementów skończonych wynosi n_b , zatem „ e ” jest określoną wartością ze zbioru $1, 2, \dots, n_b$.

Na rysunku 4.1 przedstawiono element belki „ e ” obciążony napływem równomiernie rozłożonej masy o intensywności m_f . Położenie czoła obciążenia względem początku elementu „ e ” określa funkcja $s_f(t) = [v_f t - (e-1)l_{be}]$, która ma sens współrzędnej lokalnej elementu x_{be} , gdzie l_{be} jest długością elementu – jednakową dla wszystkich elementów skończonych.



Rys. 4.1. Element belki e obciążony napływem cieczy

Obciążeniem elementu skończonego belki jest rozłożony ciężar cieczy oraz rozłożone siły bezwładności cieczy, działające w kierunku pionowym (Z) i poziomym (Y). Po podzieleniu masy cieczy na różniczkowe elementy masowe $m_f du_f$, jak na rysunku 4.1, pionowe i poziome obciążenie elementu belki można wyznaczyć sumując obciążenia skupione wynikające z działania mas $m_f du_f$ traktowanych jak punkty masowe. Wobec nieskończonej liczby punktów masowych na odcinku od $u_f = 0$ do $u_f = s_f(t)$, sumy zastąpiono całkami co prowadzi do następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{p}_{bez} &= \int_0^{s_f(t)} \delta(x_{be} - u_f) [g - \ddot{w}_{be}(u_f, t)] m_f du_f, \\ \Delta \hat{p}_{bey} &= \int_0^{s_f(t)} \delta(x_{be} - u_f) [-\ddot{v}_{be}(u_f, t)] m_f du_f, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie $\delta(x_{be})$ oznacza deltę Diraca, przy czym należy przyjąć $s_f(t) = l_{be}$, gdy $s_f(t) \geq l_{be}$ oraz $s_f(t) = 0$, gdy $s_f(t) \leq 0$. Ponadto należy zauważyć, że zmienna bieżąca określająca położenie różniczkowej masy $m_f du_f$ jest funkcją czasu: $u_f = u_f(t)$, ponieważ $u_f = s_f(t) - a_f$ co wynika z rysunku 4.1.

Najpierw rozpatrzone zostanie obciążenie pionowe (4.1)₁. Biorąc pod uwagę aproksymację pionowych przemieszczeń rurociągu określoną w obszarze elementu „ e ” wzorem (3.30)₁, przemieszczenie masy $m_f du_f$ w przekroju u_f , można zapisać wzorem

$$w_{be}(u_f, t) = (\mathbf{N}_{be}^w [u_f(t)/l_{be}])^T \mathbf{r}_{be}^w = (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T \mathbf{r}_{be}^w, \quad (4.2)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w = \mathbf{N}_{be}^w[u_f(t)/l_{be}]$ jest zależnym od czasu wektorem funkcji kształtu, co oznaczono symbolicznie nadpisaną tyldą. Prędkość i przyspieszenie przemieszczenia (4.2), obliczone z uwzględnieniem faktu, że $\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w = \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w(t)$ i $\mathbf{r}_{be}^w = \mathbf{r}_{be}^w(t)$, są wyrażone wzorami:

$$\dot{w}_{be}(u_f, t) = \frac{\partial}{\partial t} [(\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T \mathbf{r}_{be}^w] = \frac{v_f}{l_{be}} \frac{\partial(\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T}{\partial \xi_{be}^z} \mathbf{r}_{be}^w + (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T \frac{\partial(\mathbf{r}_{be}^w)}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\ddot{w}_{be}(u_f, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T \mathbf{r}_{be}^w] = \frac{v_f^2}{l_{be}^2} \frac{\partial^2(\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T}{\partial \xi_{be}^z{}^2} \mathbf{r}_{be}^w + \frac{2v_f}{l_{be}} \frac{\partial(\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T}{\partial \xi_{be}^z} \frac{\partial \mathbf{r}_{be}^w}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{be}^w}{\partial t^2}, \quad (4.4)$$

gdzie $\xi_{be}^z = x_{be}/l_{be}$. Po wprowadzeniu do (4.4) oznaczeń $\partial/\partial \xi_{be}^z = (\cdot)'$, $\partial/\partial t = (\cdot)$ i po podstawieniu przyspieszenia (4.4) do (4.1)₁, otrzymuje się na podstawie formuły (3.46)₁ wektor obciążeń elementu skończonego w płaszczyźnie XZ, który ma następującą postać

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{be}^w &= \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w \Delta \hat{p}_{bez} dx = m_f g \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w du_f - \frac{m_f v_f^2}{l_{be}^2} \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T du_f \mathbf{r}_{be}^w + \\ &- \frac{2m_f v_f}{l_{be}} \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T du_f \dot{\mathbf{r}}_{be}^w - m_f \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T du_f \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w = \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_{be}^w(t) - \tilde{\mathbf{K}}_{be}^w(t) \mathbf{r}_{be}^w - \tilde{\mathbf{C}}_{be}^w(t) \dot{\mathbf{r}}_{be}^w - \tilde{\mathbf{B}}_{be}^w(t) \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Podczas obliczania całek w formule (4.5) należy pamiętać o przejściu na zmienną

bezwymiarową $\zeta_f = u_f/l_{be}$ według relacji $\int_0^{s_f(t)} \dots du_f = l_{be} \int_0^{s_f(t)/l_{be}} \dots d\zeta_f$.

Wektor obciążeń elementu skończonego w płaszczyźnie XY wyznacza się analogicznie, na podstawie relacji (3.46)₂ i (4.1)₂, co daje wynik

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{be}^v &= \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^v \Delta \hat{p}_{bey} dx = -\frac{m_f v_f^2}{l_{be}^2} \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^v)^T du_f \mathbf{r}_{be}^v + \\ &- \frac{2m_f v_f}{l_{be}} \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^v)^T du_f \dot{\mathbf{r}}_{be}^v - m_f \int_0^{s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^v)^T du_f \ddot{\mathbf{r}}_{be}^v = \\ &= -\tilde{\mathbf{K}}_{be}^v(t) \mathbf{r}_{be}^v - \tilde{\mathbf{C}}_{be}^v(t) \dot{\mathbf{r}}_{be}^v - \tilde{\mathbf{B}}_{be}^v(t) \ddot{\mathbf{r}}_{be}^v. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Po agregacji wektorów elementowych $\hat{\mathbf{F}}_{be}^w$ i $\hat{\mathbf{F}}_{be}^v$, przeprowadzonej zgodnie z (3.46)₁

i (3.46)₂: $\hat{\mathbf{F}}_b^w = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \hat{\mathbf{F}}_{be}^w$, $\hat{\mathbf{F}}_b^v = \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \hat{\mathbf{F}}_{be}^v$, i po podstawieniu wyników agregacji do

równania (3.43) zapisanego z uwzględnieniem (3.48), (3.50), (3.52), otrzymano nieliniowe równanie ruchu, które opisuje drgania rurociągu spowodowane ruchem masy cieczy

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b^w + \tilde{\mathbf{B}}_b^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_b^v + \tilde{\mathbf{B}}_b^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b^w \\ \ddot{\mathbf{q}}_b^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b^w + \tilde{\mathbf{C}}_b^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^v + \tilde{\mathbf{C}}_b^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b^w \\ \dot{\mathbf{q}}_b^v \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b^w + \mathbf{K}_b^{wnl}(\mathbf{q}_b^w) + \tilde{\mathbf{K}}_b^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_b^v + \mathbf{K}_b^{vnl}(\mathbf{q}_b^v) + \tilde{\mathbf{K}}_b^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b^w \\ \mathbf{q}_b^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_b^w \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{bh}^w \\ \mathbf{R}_{bh}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{bp1}^w \\ \mathbf{R}_{bp1}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{bp2}^w \\ \mathbf{R}_{bp2}^v \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{B}}_b^w = \tilde{\mathbf{B}}_b^w(t)$, $\tilde{\mathbf{C}}_b^w = \tilde{\mathbf{C}}_b^w(t)$, $\tilde{\mathbf{K}}_b^w = \tilde{\mathbf{K}}_b^w(t)$ oraz $\tilde{\mathbf{F}}_b^w = \tilde{\mathbf{F}}_b^w(t)$ i analogicznie dla kierunku „v”.

Ostatecznie, tj. po agregacji równań ruchu podstruktur, końcowe równanie ruchu wiszącego mostu rurociągowego obciążonego ciągłą ruchomą masą jest następujące

$$(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}}(t))\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}}(t))\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{nl} + \tilde{\mathbf{K}}(t))\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}(t). \quad (4.8)$$

Całkowite napełnienie rurociągu ruchomą cieczą

Po całkowitym napełnieniu rurociągu cieczą, elementowe wektory obciążeń rurociągu

$\hat{\mathbf{F}}_{be}^w$ i $\hat{\mathbf{F}}_{be}^v$ są jednakowe dla wszystkich elementów belki i mają postaci:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{be}^w &= m_f g \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w du_f - \frac{m_f v_f^2}{l_{be}^2} \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{w'})^T du_f \mathbf{r}_{be}^w + \\ & - \frac{2m_f v_f}{l_{be}} \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{w'})^T du_f \dot{\mathbf{r}}_{be}^w - m_f \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T du_f \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w = \\ & = \tilde{\mathbf{F}}_{be}^w(t) - \tilde{\mathbf{K}}_{be}^w(t) \mathbf{r}_{be}^w - \tilde{\mathbf{C}}_{be}^w(t) \dot{\mathbf{r}}_{be}^w - \tilde{\mathbf{B}}_{be}^w(t) \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{be}^v &= -\frac{m_f v_f^2}{l_{be}^2} \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{v'})^T du_f \mathbf{r}_{be}^v + \\ & - \frac{2m_f v_f}{l_{be}} \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{v'})^T du_f \dot{\mathbf{r}}_{be}^v - m_f \int_0^{l_{be}} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^v)^T du_f \ddot{\mathbf{r}}_{be}^v = \\ & = -\tilde{\mathbf{K}}_{be}^v(t) \mathbf{r}_{be}^v - \tilde{\mathbf{C}}_{be}^v(t) \dot{\mathbf{r}}_{be}^v - \tilde{\mathbf{B}}_{be}^v(t) \ddot{\mathbf{r}}_{be}^v. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Wówczas zmienne w czasie składniki równania (4.7), a stąd i równania (4.8) są niezależne od czasu, chociaż nadal zależą od prędkości przepływu cieczy v_f . Zatem, po całkowitym wypełnieniu rurociągu cieczą drgania mostu ustalają się, a rozwiązanie asymptotyczne można wyznaczyć przyjmując zerowe prędkości i przyspieszenia uogólnione ($\dot{\mathbf{q}} = 0$, $\ddot{\mathbf{q}} = 0$) w równaniu (4.8) [83]. W przypadku liniowego równania ruchu mostu, powstałego po

pominięciu składnika nieliniowego w (4.8), rozwiązanie asymptotyczne jest rozwiązaniem układu równań algebraicznych

$$(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (4.11)$$

w którym macierz $\tilde{\mathbf{K}}$ i wektor prawej strony $\tilde{\mathbf{F}}$ są obliczone na podstawie odpowiednich składników formuł (4.9) i (4.10).

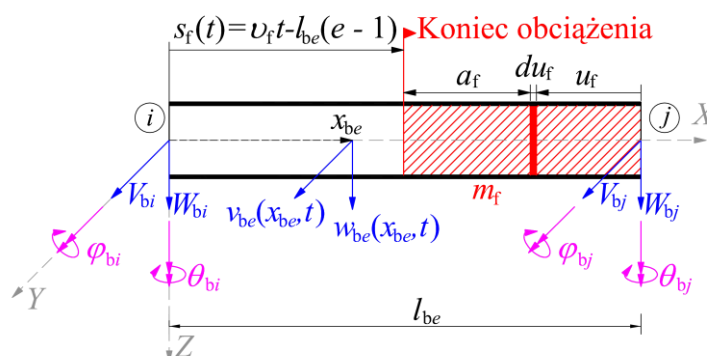
Rozwiązanie asymptotyczne zależy od prędkości cieczy poruszającej się wewnątrz rurociągu. Z teoretycznego punktu widzenia, przy pewnej krytycznej prędkości otrzymuje się

$$\det(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}) = 0. \quad (4.12)$$

Wtedy rozwiązanie asymptotyczne jest nieskończenie duże, co prowadzi do utraty zachowawczej postaci równowagi ustroju [83].

Odptyw cieczy

Kolejny wariant obciążenia ruchomą masą pojawia się w sytuacji, gdy w chwili początkowej rurociąg jest całkowicie wypełniony masą cieczy poruszającej się z prędkością v_f , po czym następuje odpływ cieczy z rurociągu (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Element belki „e” obciążony odpływem cieczy

Obciążenia elementu belki można wówczas zapisać wzorami o postaci:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{p}_{bez} &= \int_0^{l_{be} - s_f(t)} \delta(x_{be} - u_f) [g - \ddot{w}_{be}(u_f, t)] m_f du_f, \\ \Delta \hat{p}_{bey} &= \int_0^{l_{be} - s_f(t)} \delta(x_{be} - u_f) [-\ddot{v}_{be}(u_f, t)] m_f du_f, \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie jak poprzednio $\delta(x_{be})$ oznacza deltę Diraca, natomiast $u_f(t) = l_{be} - a_f - s_f(t)$, a $s_f(t) = [v_f t - (e-1)l_{be}]$ jest odległością końca obciążenia od początku elementu „e”. Należy przyjąć $s_f(t) = l_{be}$, gdy $s_f(t) \geq l_{be}$ oraz $s_f(t) = 0$ gdy $s_f(t) \leq 0$.

W tym przypadku wektory obciążeń elementu są obliczane ze wzorów:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{be}^w &= m_f g \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w du_f - \frac{m_f v_f^2}{l_{be}^2} \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{w'})^T du_f \mathbf{r}_{be}^w + \\ &- \frac{2m_f v_f}{l_{be}} \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{w'})^T du_f \dot{\mathbf{r}}_{be}^w - m_f \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^w (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^w)^T du_f \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w = \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_{be}^w(t) - \tilde{\mathbf{K}}_{be}^w(t) \mathbf{r}_{be}^w - \tilde{\mathbf{C}}_{be}^w(t) \dot{\mathbf{r}}_{be}^w - \tilde{\mathbf{B}}_{be}^w(t) \ddot{\mathbf{r}}_{be}^w, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{be}^v &= -\frac{m_f v_f^2}{l_{be}^2} \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{v'})^T du_f \mathbf{r}_{be}^v + \\ &- \frac{2m_f v_f}{l_{be}} \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^{v'})^T du_f \dot{\mathbf{r}}_{be}^v - m_f \int_0^{l_{be}-s_f(t)} \tilde{\mathbf{N}}_{be}^v (\tilde{\mathbf{N}}_{be}^v)^T du_f \ddot{\mathbf{r}}_{be}^v = \\ &= -\tilde{\mathbf{K}}_{be}^v(t) \mathbf{r}_{be}^v - \tilde{\mathbf{C}}_{be}^v(t) \dot{\mathbf{r}}_{be}^v - \tilde{\mathbf{B}}_{be}^v(t) \ddot{\mathbf{r}}_{be}^v. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Można zauważyć, że powyższe formuły są odpowiednio różnicami rozwiązań (4.9) i (4.5) oraz (4.10) i (4.6).

Ogólne równanie (4.8) opisujące drgania wiszącego mostu rurowego obciążonego ciągłą ruchomą masą cieczy posłuży w dalszej części pracy do analizy zagadnienia własnego przy założeniu, że przepływająca ciecz w całości wypełnia rurowy oraz analizy drgań liniowych i nieliniowych przykładowego wiszącego mostu rurowego, spowodowanych ruchem cieczy. Następnie zaprezentowane zostaną przebiegi drgań pionowych mostu dla trzech scenariuszy obciążenia (napełnianie, stan ustalony, opróżnianie), w zależności od prędkości masy poruszającej się wewnątrz rurowego.

4.3. Zagadnienie własne z uwzględnieniem ruchomej masy cieczy oraz wyznaczenie prędkości krytycznej przepływu

W przypadku, gdy rurowy jest w pełni wypełniony cieczą poruszającą się z prędkością v_f macierzowe równanie zagadnienia własnego (3.80) należy uzupełnić o składniki wynikające z ruchu ciągłej masy, modyfikujące macierz sztywności i macierz bezwładności w modelu obliczeniowym analizowanego mostu (por. punkt 4.2). Równanie zagadnienia własnego ma wówczas postać

$$[(\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}) - \omega^2(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})]\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

Przyjęto, że w rurociągu transportowana jest ropa naftowa o gęstości $\rho_f = 830 \text{ kg/m}^3$, zatem intensywność poruszającej się cieczy wynosi $m_f = 694 \text{ kg/m}$. Wtedy wstępny statyczny naciąg cięgien głównych obliczony ze wzorów (3.79) wynosi 7264,9 kN, natomiast naciąg cięgien wiatrowych wynosi 1695,5 kN.

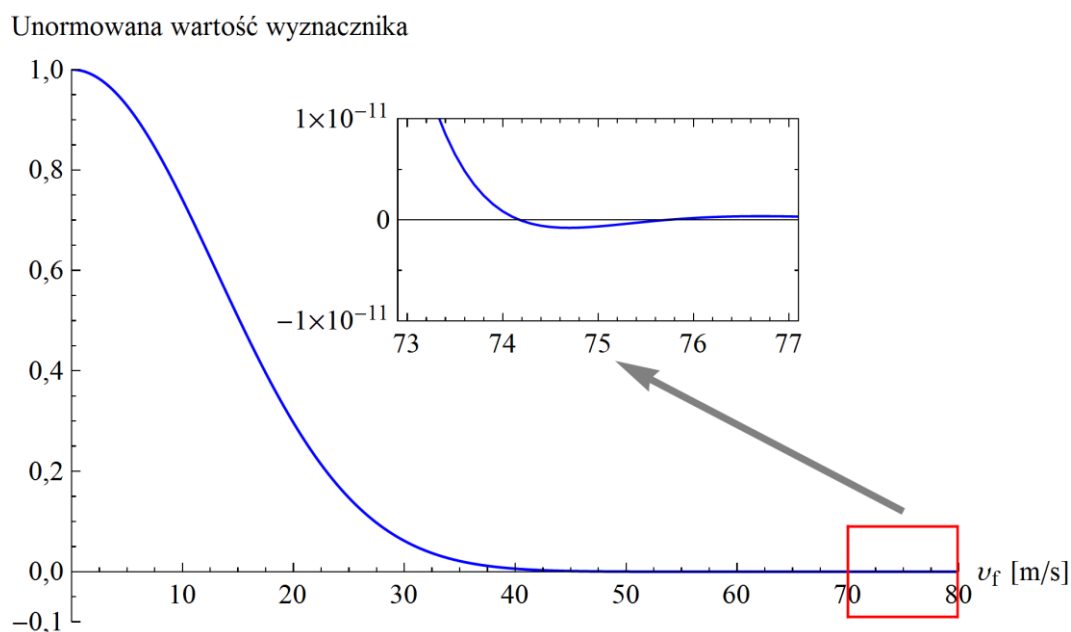
Tabela 4.1. Częstości własne wiszącego mostu rurociągowego z uwzględnieniem ruchomej cieczy [Hz]

			Rurociąg pusty – naciągi obl. z pominięciem ciężaru cieczy	Rurociąg pusty – naciągi obl. z uwzględnieniem ciężaru cieczy	Rurociąg w pełni wypełniony cieczą						
					Prędkość przepływu cieczy v_f						
					0 m/s	5 m/s	10 m/s	20 m/s	40 m/s	70 m/s	
Globalne formy drgań	pionowych	sym.	1	0,2217	0,2897	0,2050	0,2049	0,2047	0,2038	0,1999	0,1871
			2	0,3429	0,3855	0,2735	0,2734	0,2732	0,2722	0,2685	0,2588
		asym.	1	0,1571	0,2208	0,1574	0,1573	0,1570	0,1559	0,1514	0,1384
			2	0,3247	0,4495	0,3189	0,3187	0,3182	0,3160	0,3070	0,2810
	poziomych	sym.	1	0,1348	0,1665	0,1086	0,1084	0,1081	0,1064	0,09812	0,04748
			2	0,1956	0,2233	0,1457	0,1455	0,1449	0,1426	0,1339	0,1089
		asym.	1	0,09472	0,1313	0,08580	0,08560	0,08501	0,08263	0,07228	0,02850
			2	0,2100	0,2775	0,1811	0,1808	0,1796	0,1751	0,1557	0,08117
Lokalne formy drgań cięgien	głównych	sym.	1	0,1311*	0,1854*	0,1854*	0,1854*	0,1854*	0,1854*	0,1854*	0,1854*
			2	0,3916*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*
		asym.	1	0,2612*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*
			2	0,5220*	0,7382*	0,7382*	0,7382*	0,7382*	0,7382*	0,7382*	0,7382*
	wiatrowych	sym.	1	0,1310*	0,1853*	0,1853*	0,1853*	0,1853*	0,1853*	0,1853*	0,1853*
			2	0,3916*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*	0,5538*
		asym.	1	0,2612*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*	0,3694*
			2	0,5220*	0,7383*	0,7383*	0,7383*	0,7383*	0,7383*	0,7383*	0,7383*

W tabeli 4.1 przedstawiono wyniki rozwiązania zagadnienia własnego. Porównano częstości własne mostu, w którym naciągi wstępne cięgien są wyznaczone z pominięciem i z uwzględnieniem przewidywanego ciężaru cieczy, przy czym w obu sytuacjach rurociąg nie jest napełniony cieczą. Zestawiono też częstości własne mostu wypełnionego ruchomą cieczą, obliczone przy różnych prędkościach przepływu.

Zgodnie z oczekiwaniami, po zwiększeniu statycznego naciągu cięgien (a co za tym idzie globalnej sztywności) w celu uwzględnienia przewidywanego ciężaru ruchomej cieczy, zaobserwowano wzrost częstości globalnych i lokalnych drgań mostu przenoszącego pusty

rurociąg. Po dołożeniu nieruchomej cieczy ($v_f = 0$ m/s) częstości drgań globalnych mostu (gdzie obserwuje się dominujący ruch rurociągu) spadły, a częstości lokalnych drgań cięgien głównych i wiatrowych pozostały bez zmian. Stopniowe zwiększanie prędkości przepływu masy wewnątrz rurociągu do 20 m/s nie miało praktycznie żadnego zauważalnego wpływu na częstości drgań (różnice nie przekraczają 3%). Dalsze zwiększanie prędkości przepływu, rozważane z poznawczego punktu widzenia, spowodowało wyraźne zmniejszenie częstości drgań globalnych. Przy prędkości $v_f = 70$ m/s nastąpił gwałtowny spadek częstości drgań poziomych (globalnych) – o 67% w przypadku częstości towarzyszącej pierwszej formie antysymetrycznej, w porównaniu z $v_f = 0$ m/s. Można zatem przypuszczać, że przy zwiększaniu prędkości przepływu aż do osiągnięcia prędkości krytycznej, utrata zachowawczej postaci równowagi nastąpi w płaszczyźnie poziomej.



Rys. 4.3. Przebieg wyznacznika macierzy sztywności w zależności od prędkości przepływu cieczy

Prędkość krytyczną, przy której dojdzie do utraty stateczności wyznacza się ze wzoru (4.12). Na rysunku 4.3 przedstawiono przebieg wyznacznika macierzy sztywności. W wyniku przeprowadzonych obliczeń ustalono, że prędkość krytyczna dla analizowanego modelu mostu rurociągowego wynosi $v_{fcr} = 74,18$ m/s. Otrzymana wartość jest nierealistyczna z praktycznego punktu widzenia, jak dla każdej prawidłowo zaprojektowanej konstrukcji.

4.4. Analiza numeryczna drgań liniowych i nieliniowych spowodowanych przepływem cieczy

Rozwiązanie nieliniowego równania ruchu wiszącego mostu rurociągowego obciążonego przepływem cieczy (4.8) wiąże się z doбором odpowiedniej metody numerycznego całkowania. W tej pracy zdecydowano się zastosować jedną z klasycznych metod „krok po kroku” – metodę Newmarka. Do obliczeń wybrano wariant warunkowo stabilny z parametrem $\beta = 0$ z powodu efektywności w całkowaniu równań ruchu układów z nieliniowością geometryczną [14]. Wariant ten wiąże się ze spełnieniem dość restrykcyjnego warunku stabilności $\omega_{max}h < 2$, gdzie ω_{max} oznacza największą znaczącą częstość własną, a h jest długością kroku całkowania. Wówczas metoda ta nie wnosi tzw. tłumienia pasożytniczego (numerycznego). Jawny schemat rozwiązania tego typu równań można znaleźć między innymi w pracy Belytschko [4].

Formuły robocze Newmarka po podstawieniu $\beta = 0$ mają postaci [83]:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{i+1} &= \mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_i + 0,5h^2\ddot{\mathbf{q}}_i, \\ \dot{\mathbf{q}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{q}}_i + 0,5h(\ddot{\mathbf{q}}_i + \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}).\end{aligned}\tag{4.17}$$

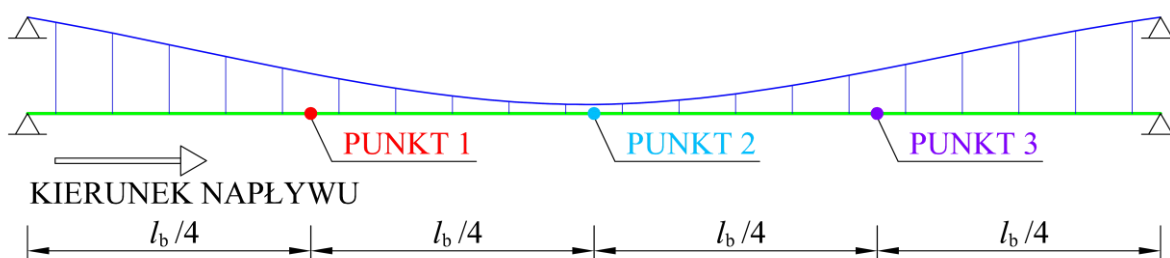
Zakłada się, że warunki początkowe $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ oraz $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$ są znane, natomiast potrzebny do startu wektor przyspieszeń początkowych $\ddot{\mathbf{q}}_0$ wyznacza się z równania (4.8) zapisanego w punkcie $t = 0$. Nieznany w każdym kroku całkowania wektor przyspieszeń $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$ otrzymuje się z warunku kolokacji na końcu kroku, który prowadzi do równania

$$\begin{aligned}[(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}}) + 0,5h(\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})]_{i+1}\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} &= (\tilde{\mathbf{F}})_{i+1} - (\mathbf{K}^{nl})_{i+1}\mathbf{q}_{i+1} + \\ - (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})_{i+1}(\dot{\mathbf{q}}_i + 0,5h\ddot{\mathbf{q}}_i) &- (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})_{i+1}(\mathbf{q}_i + h\dot{\mathbf{q}}_i + 0,5h^2\ddot{\mathbf{q}}_i).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Łatwo zauważyć, że w przyjętym wariantcie metody Newmarka, macierz sztywności geometrycznej $(\mathbf{K}^{nl})_{i+1} = \mathbf{K}^{nl}(\mathbf{q}_{i+1})$ jest obliczana z wykorzystaniem formuły (4.17)₁, następnie rozwiązywane jest równanie kolokacji (4.18) i potem doliczany jest wektor prędkości uogólnionych (4.17)₂. Dzięki temu unika się procedury iteracji rozwiązania w każdym kroku czasowym, która jest niezbędna w innych wariantach metody Newmarka. Belytschko stwierdził, że ominięcie procedury iteracyjnej jest dopuszczalne w układach słabo nieliniowych, przy zachowaniu dostatecznie małej długości kroku, co gwarantuje wspomniany wcześniej restrykcyjny warunek stabilności. Dodatkowo, powyższa procedura

upraszcza się w momencie, gdy napływająca masa całkowicie wypełni rurociąg. Wtedy składniki związane z przepływem masy, tj. $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}(t)$, $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}(t)$, $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}(t)$ oraz $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}(t)$ stają się niezależne od czasu, macierzowe równanie ruchu (4.8) jest zatem układem równań różniczkowych o stałych współczynnikach, ale jest nadal nieliniowe.

W procesie napełniania oraz opróżniania dominuje pionowy ruch rurociągu, co wynika z równania (4.7), gdzie $\tilde{\mathbf{F}}_b^v = \mathbf{0}$, przy czym należy pamiętać, że w dalszym ciągu przepływająca ciecz ma wpływ na sztywność, bezwładność i tłumienie w płaszczyźnie poziomej. W tej pracy uwaga zostanie skupiona zatem na analizie przemieszczeń pionowych. W konsekwencji, na potrzeby wyznaczenia macierzy tłumienia o postaci $\mathbf{C} = 2\alpha\omega_1\mathbf{B}$ przyjęto pierwszą częstość drgań pionowych $\omega_1 = 1,387$ rad/s jako najistotniejszą w tym zadaniu częstość własną. Liczbę tłumienia założono jako $\alpha = 0,01$ ze względu na niskie tłumienie w tego typu konstrukcjach. Obliczenia wykonano obserwując drgania pionowe rurociągu w trzech punktach, wskazanych na rysunku 4.4. Wyniki obliczeń pokazano na kolejnych rysunkach.



Rys. 4.4. Widok położenia punktów obserwacji drgań na długości rurociągu

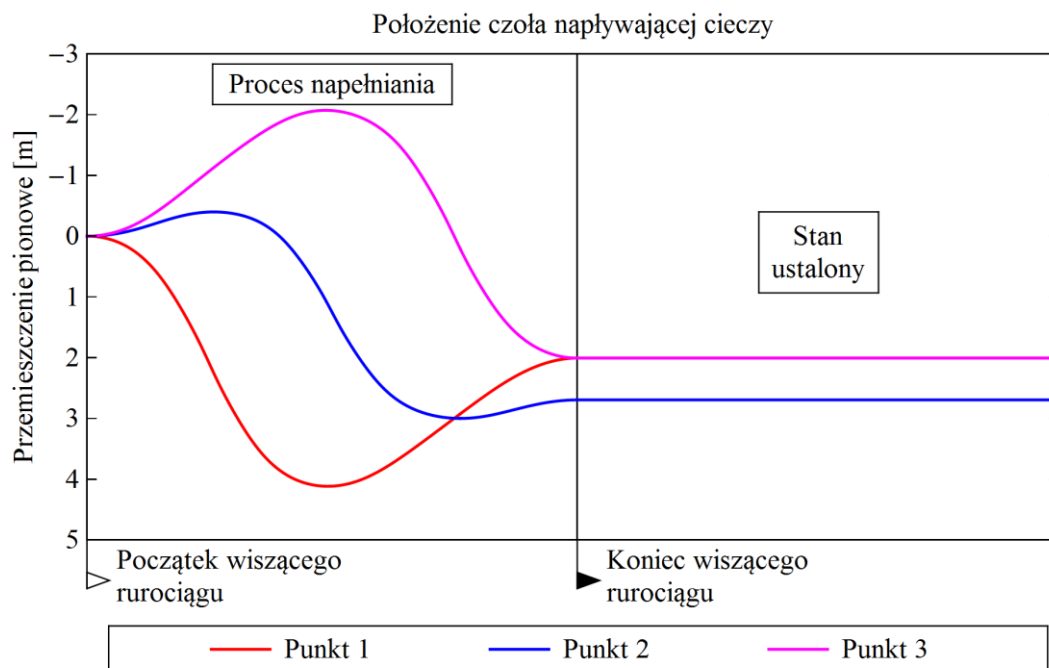
Rozwiązania quasi-statyczne

Na rysunkach 4.5 i 4.6 przedstawiono nieliniowe rozwiązania quasi-statyczne, odpowiednio podczas procesu napełniania oraz opróżniania rurociągu. Przebiegi quasi-statyczne przemieszczeń wyznaczono na podstawie współrzędnych uogólnionych będących rozwiązaniem nieliniowego równania statycznego o postaci

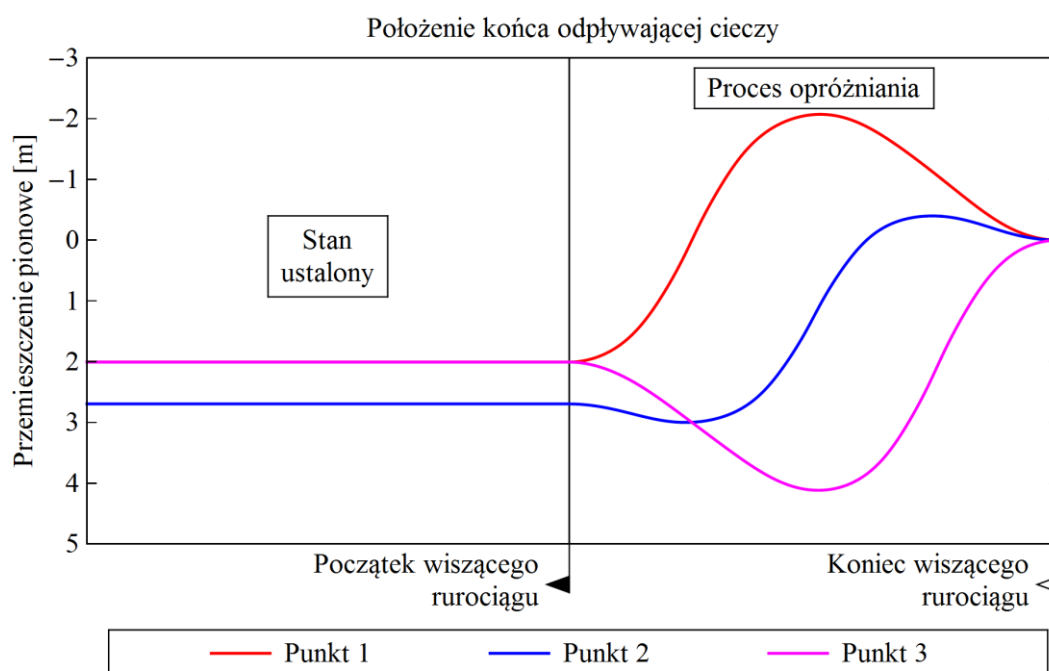
$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^{nl}(\mathbf{q})]\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}(t), \quad (4.19)$$

gdzie czas t jest parametrem określającym położenie czoła lub końca półnieskończonego odcinka masy. Do rozwiązania równania (4.19) zastosowano metodę iteracji prostej w każdym kroku określonym parametrem t . Quasi-statyczne przebiegi liniowe przemieszczeń uzyskano rozwiązując w kolejnych chwilach t standardowy układ równań algebraicznych

$\mathbf{Kq} = \tilde{\mathbf{F}}(t)$. Na rysunkach 4.5 i 4.6 nie pokazano przebiegów liniowych jako tła dla rozwiązań nieliniowych, ponieważ oba te rozwiązania okazały się praktycznie takie same (maksymalne różnice między przemieszczeniami liniowymi i nieliniowymi nie przekraczają 2%). Można zatem stwierdzić, że w przypadku rozwiązań quasi-statycznych wpływ nieliniowości geometrycznej zarówno cięgien jak i rurociągu jest pomijalny.



Rys. 4.5. Przebiegi przemieszczeń quasi-statycznych w trzech punktach rurociągu, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu (rozwiązania nieliniowe)



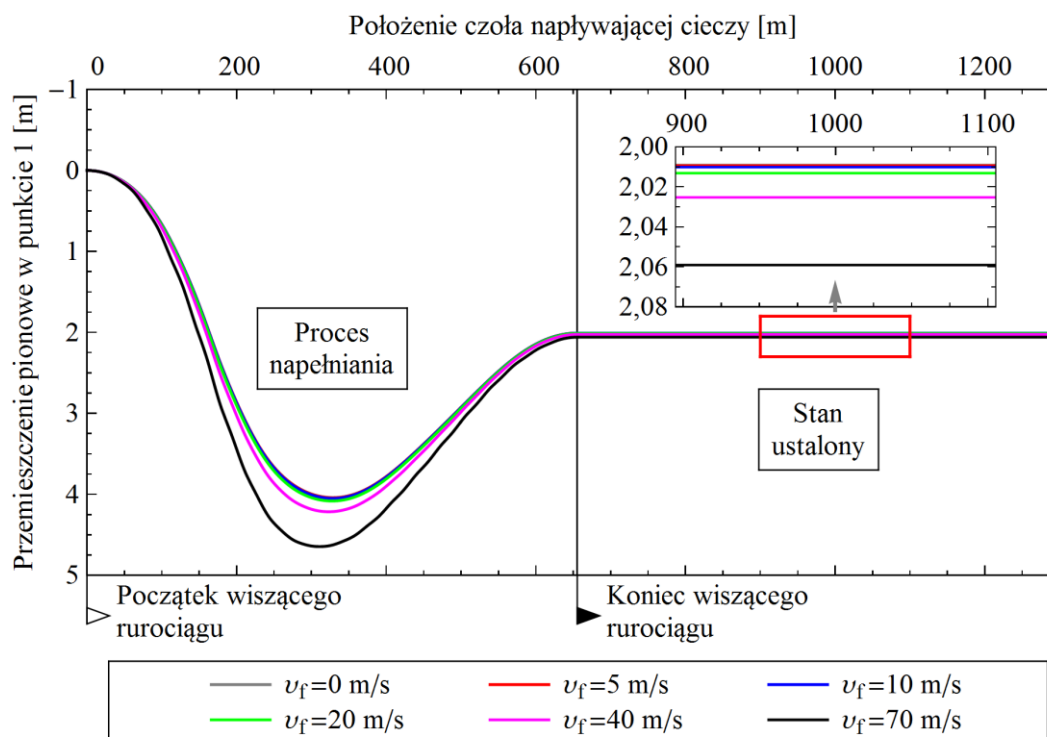
Rys. 4.6. Przebiegi przemieszczeń quasi-statycznych w trzech punktach rurociągu, przed rozpoczęciem procesu opróżniania i w jego trakcie (rozwiązania nieliniowe)

Porównując procesy napełniania oraz opróżniania można zaobserwować spodziewaną symetrię odpowiedzi quasi-statycznych (przebieg procesu opróżniania jest różnicą wartości stanu ustalonego i przebiegu napełniania). Największe przemieszczenia statyczne występują w punktach 1 oraz 3 znajdujących się w $\frac{1}{4}$ oraz $\frac{3}{4}$ rozpiętości wiszącego rurociągu. Są one dwa razy większe niż przemieszczenie w stanie ustalonym, gdy ciecz całkowicie wypełnia rurociąg.

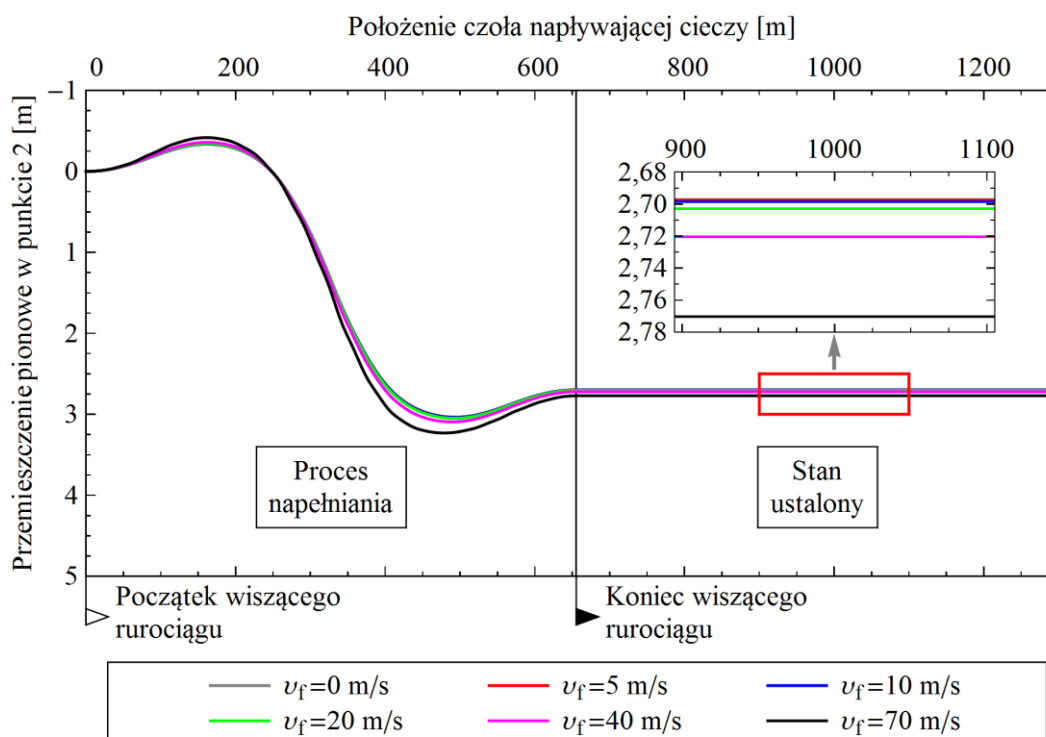
W rozwiązaniu quasi-statycznym, oprócz nieliniowości można także uwzględnić wpływ prędkości przepływu masy. Wpływ ten będzie analizowany w zagadnieniu liniowym, opisanym równaniem statycznym o postaci

$$[\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}(t)]\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}(t). \quad (4.20)$$

Na rysunkach 4.7 i 4.8 pokazano przebiegi quasi-statyczne przemieszczeń rurociągu w trakcie procesu jego napełniania, w punktach odpowiednio 1 i 2. W stanie ustalonym, następującym po procesie napełniania oraz przed procesem opróżniania, pokazano dodatkowo poziom przemieszczeń wyznaczony przy założeniu, że $v_f = 0$ m/s.



Rys. 4.7. Przebieg quasi-statycznego przemieszczenia rurociągu w punkcie 1, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)



Rys. 4.8 Przebieg quasi-statycznego przemieszczenia rurociągu w punkcie 2, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)

Tabela 4.2. Wybrane wartości przemieszczeń quasi-statycznych rurociągu podczas napełniania, w zależności od prędkości przepływu

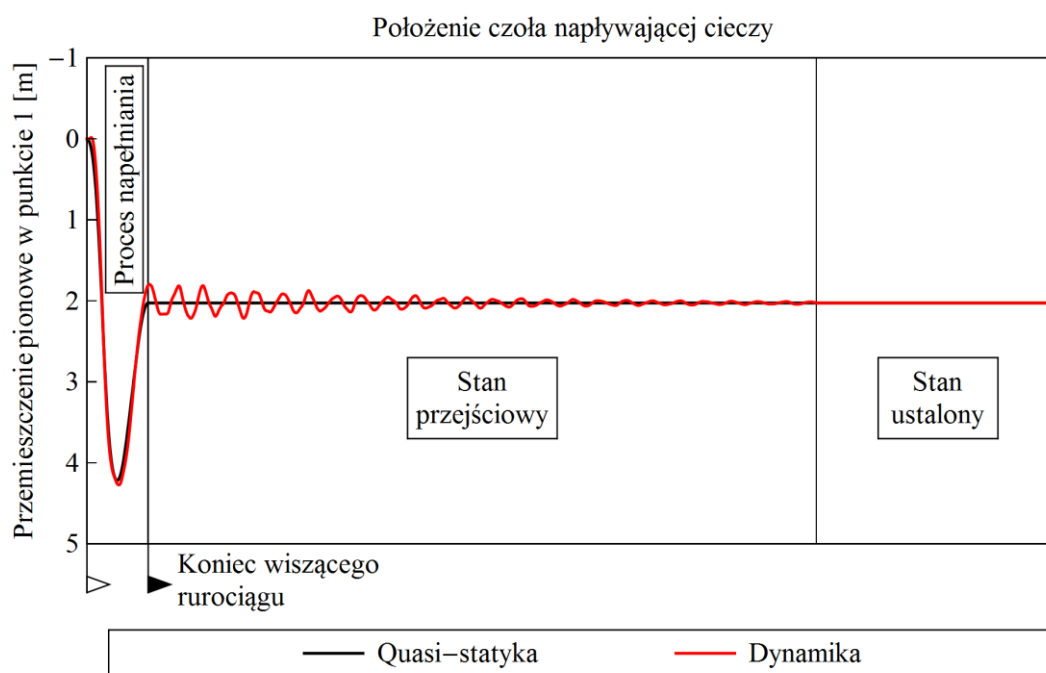
Prędkość przepływu	Punkt 1		Punkt 2	
	Maksymalne przemieszczenie pionowe	Przeszczenie pionowe w stanie ustalonym	Maksymalne przemieszczenie pionowe	Przeszczenie pionowe w stanie ustalonym
[m/s]	[m]	[m]	[m]	[m]
$v_f = 0$	-	2,009	-	2,697
$v_f = 5$	4,043	2,009	3,035	2,697
$v_f = 10$	4,051	2,010	3,038	2,699
$v_f = 20$	4,083	2,013	3,048	2,702
$v_f = 40$	4,215	2,025	3,093	2,720
$v_f = 70$	4,645	2,059	3,230	2,770

Z analizy przebiegów pokazanych na rysunkach 4.7 i 4.8 wynika, że wraz ze wzrostem prędkości ruchu masy rosną wartości maksymalnych przemieszczeń, przy czym przy małych (realnych) prędkościach różnice między rozwiązaniami są pomijalnie małe. Nawet przy prędkości przepływu $v_f = 20$ m/s, maksymalne przemieszczenie statyczne różni się od wyznaczonego w przypadku $v_f = 5$ m/s nie więcej niż o 1%. Natomiast, gdy prędkość jest bliska prędkości krytycznej ($v_f = 70$ m/s), względna różnica wynosi już 15% w przypadku punktu 1 oraz 6% w punkcie 2. Należy tutaj zauważyć, że przy wzroście prędkości przepływu

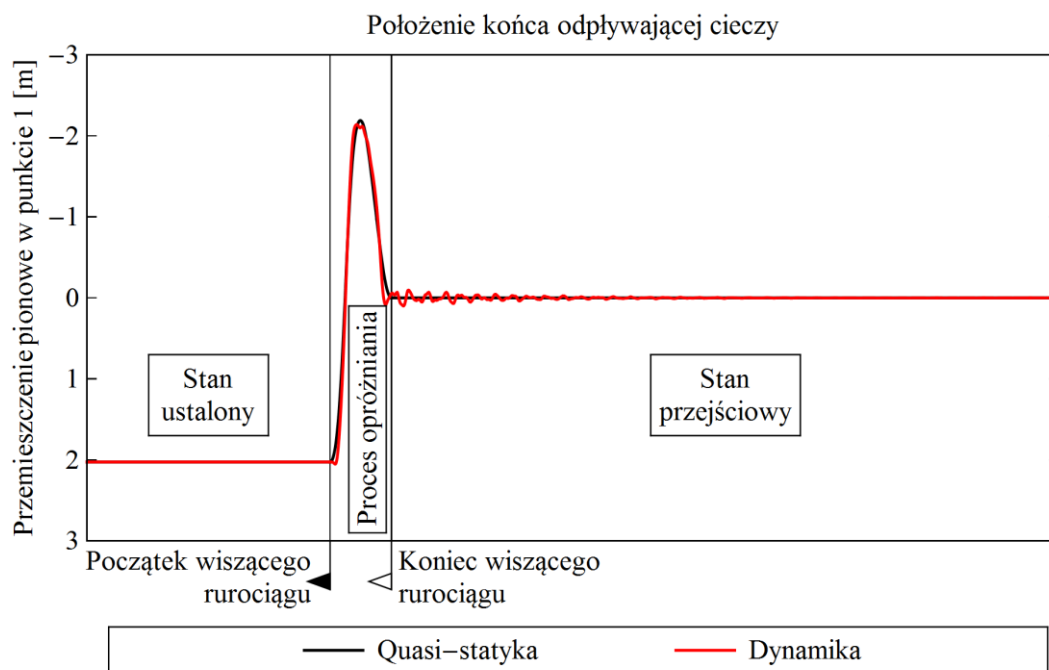
zmianie ulegają również przemieszczenia w stanie ustalonym, jednak wpływ ten nie przekracza 3%. Wartości przemieszczeń maksymalnych oraz przemieszczeń w stanie ustalonym zestawiono w tabeli 4.2.

Rozwiązania dynamiczne

Rysunki 4.9 oraz 4.10 przedstawiają widok przebiegu drgań pionowych rurociągu w punkcie 1, spowodowanych napełnianiem (rys. 4.9) i opróżnianiem (rys. 4.10), gdzie w celu ogólnego zilustrowania założono prędkość przepływu $v_f = 40$ m/s oraz znacząco zwiększono tłumienie ($\alpha = 0,05$). Oba przebiegi można podzielić na trzy etapy. Przykładowo, w przypadku napełniania wyróżnia się: 1) etap napełniania, w którym masa stopniowo wypełnia rurociąg, oraz obserwuje się największe przemieszczenia quasi-statyczne; 2) etap przejściowy, gdzie w początkowym okresie stabilizacji ruchu, po całkowitym wypełnieniu masą, występują największe efekty dynamiczne; 3) stan ustalony, który zaczyna się po zaniku drgań. Analogiczne etapy można wyróżnić w procesie opróżniania rurociągu, jednak efekty dynamiczne w stanie przejściowym są wtedy znacznie mniejsze niż przy napełnianiu. Fakt ten będzie wzięty pod uwagę w dalszych analizach.



Rys. 4.9. Ogólny widok przebiegu pionowych drgań rurociągu w punkcie 1, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu (rozwiązanie liniowe)

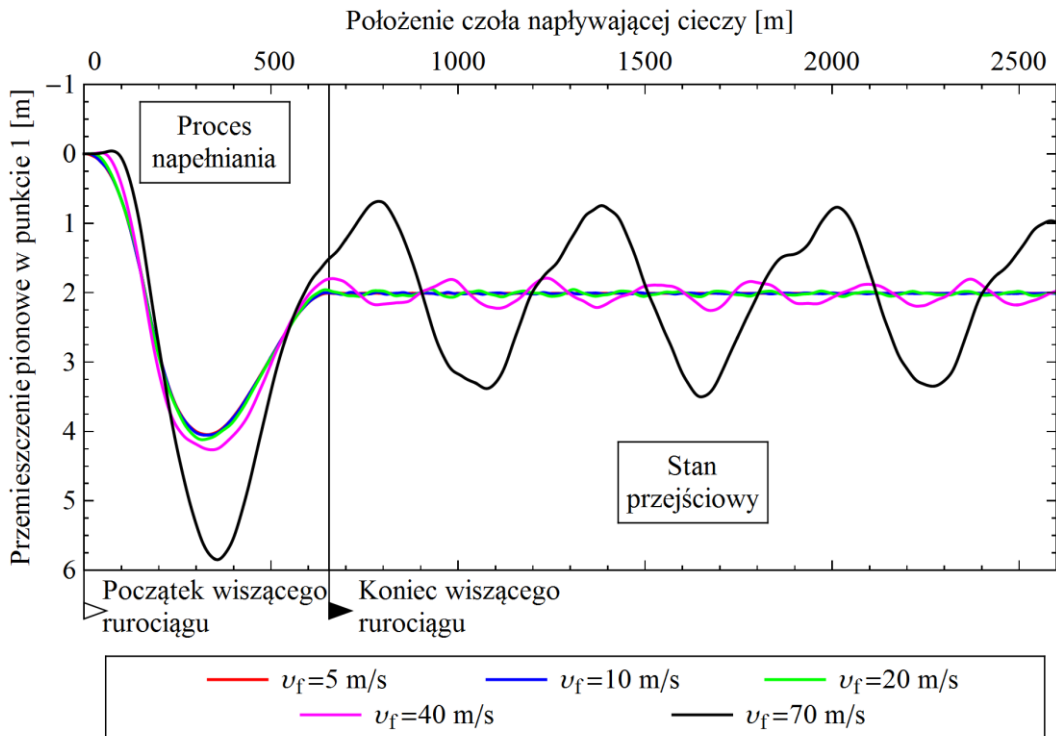


Rys. 4.10. Ogólny widok przebiegu pionowych drgań rurociągu w punkcie 1, przed rozpoczęciem procesu opróżniania i w jego trakcie (rozwiązanie liniowe)

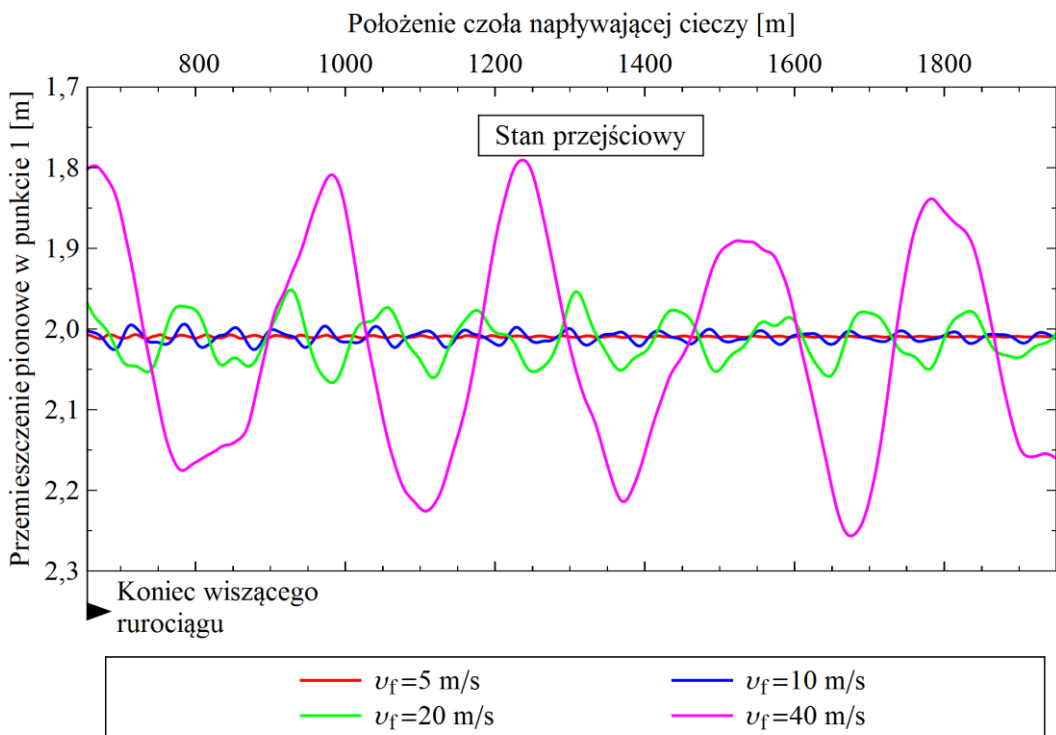
Na rysunkach 4.11 i 4.13 pokazano przebiegi drgań w punkcie 1 oraz 2, spowodowanych napływem masy z różnymi prędkościami. Natomiast na rysunku 4.12 pokazano fragment rozwiązań z rysunku 4.11. Maksymalne amplitudy wybrane z początkowego okresu stabilizacji drgań po całkowitym wypełnieniu rurociągu masą cieczy, zestawiono w tabeli 4.3. W analogiczny sposób, na rysunkach 4.14-4.16 przedstawiono wyniki obliczeń odnoszące się do procesu opróżniania rurociągu. W tabeli 4.4 podano wartości maksymalnych amplitud wybrane z przebiegu drgań następujących po całkowitym opróżnieniu. Wszystkie wymienione rozwiązania dotyczą zagadnienia liniowego.

Tabela 4.3. Maksymalne amplitudy pionowych drgań rurociągu, po jego napełnieniu

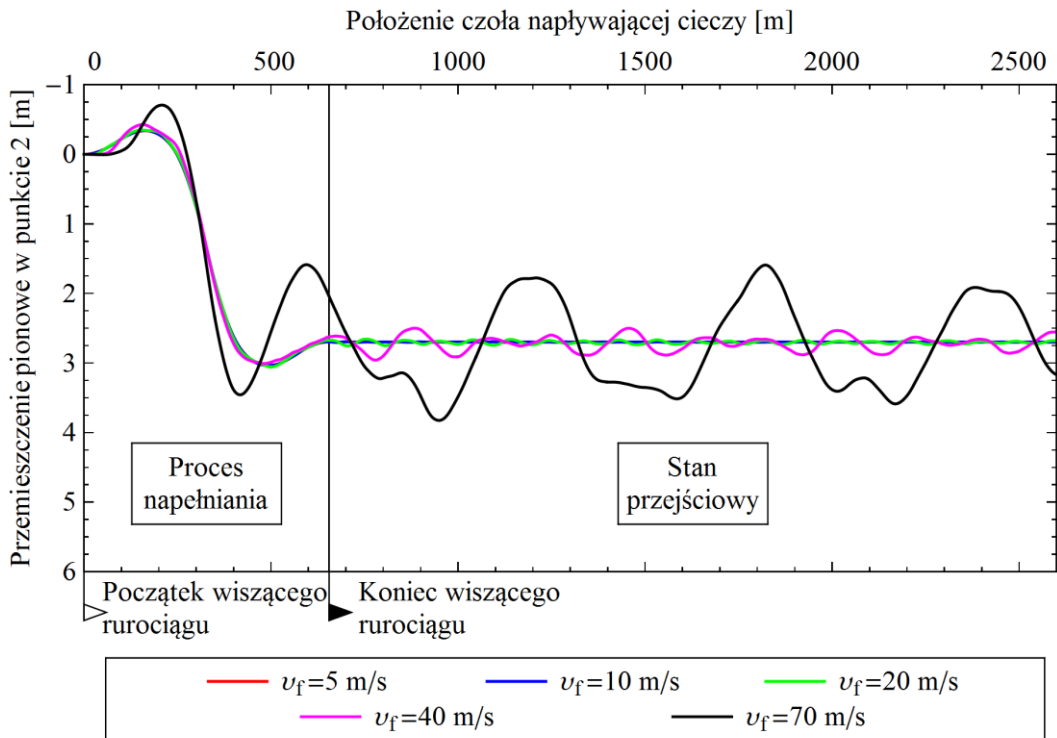
Prędkość przepływu	Punkt 1	Punkt 2
[m/s]	[m]	[m]
$v_f = 5$	0,003	0,002
$v_f = 10$	0,016	0,006
$v_f = 20$	0,062	0,051
$v_f = 40$	0,235	0,238
$v_f = 70$	1,442	1,178



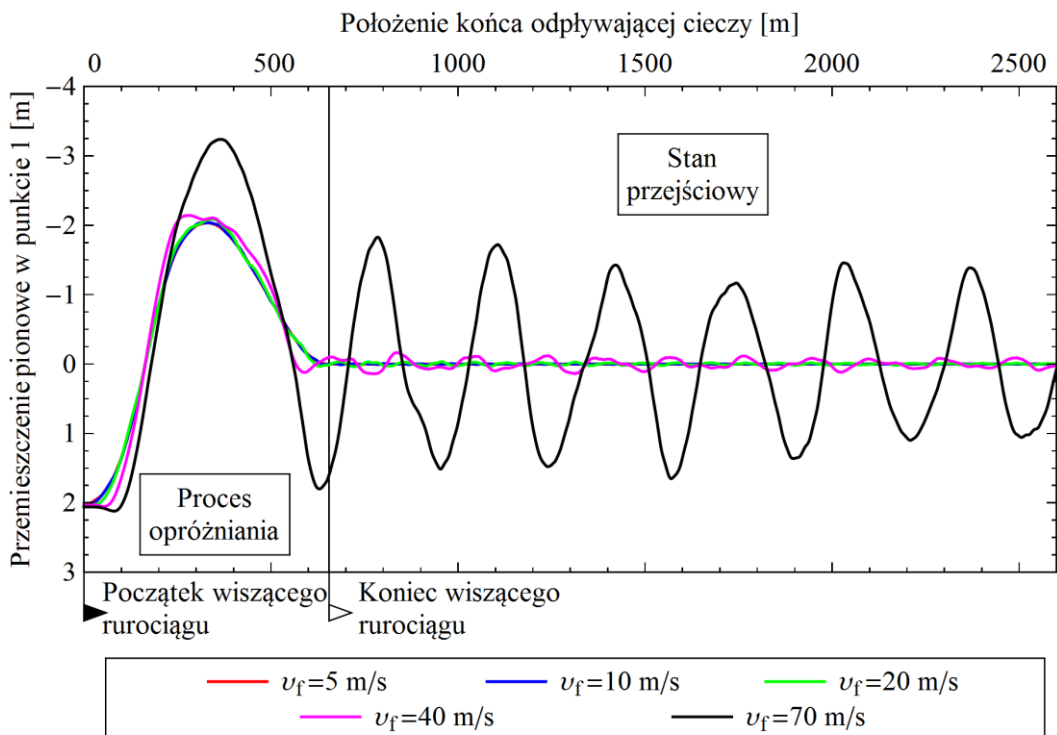
Rys. 4.11. Przebieg pionowych drgań rurociągu w punkcie 1, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)



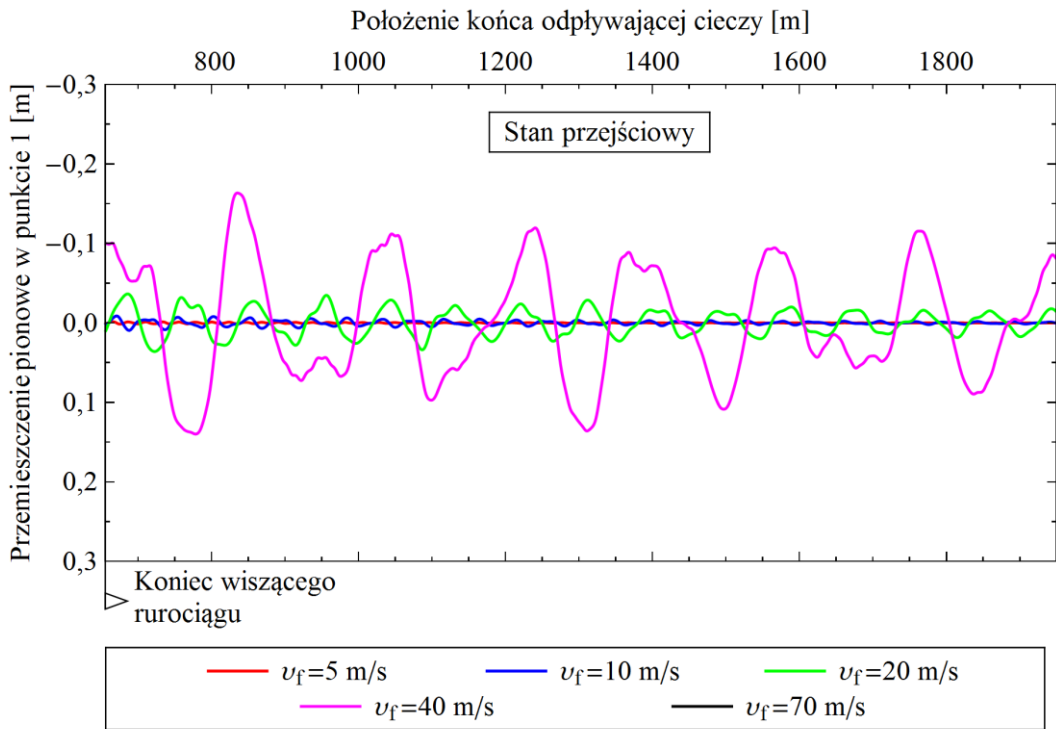
Rys. 4.12. Wybrany fragment przebiegu pionowych drgań w punkcie 1, po napełnieniu rurociągu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)



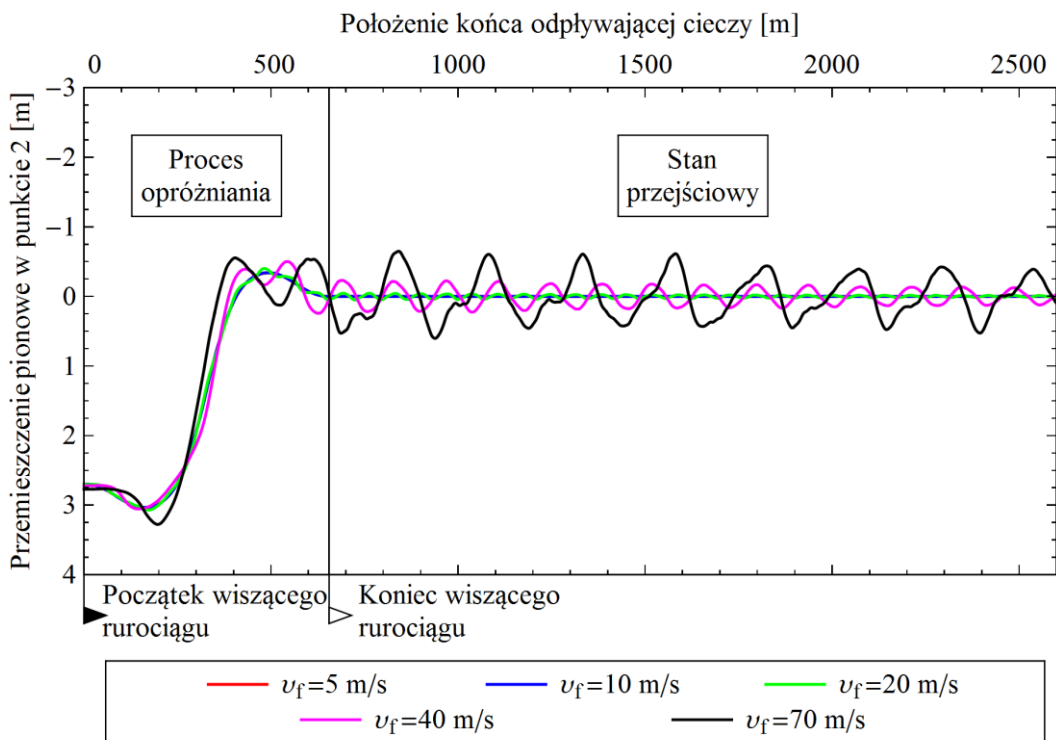
Rys. 4.13. Przebieg pionowych drgań rurociągu w punkcie 2, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)



Rys. 4.14. Przebieg pionowych drgań rurociągu w punkcie 1, w trakcie procesu opróżniania i po opróżnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)



Rys. 4.15. Wybrany fragment przebiegu pionowych drgań rurociągu w punkcie 1, po całkowitym opróżnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)



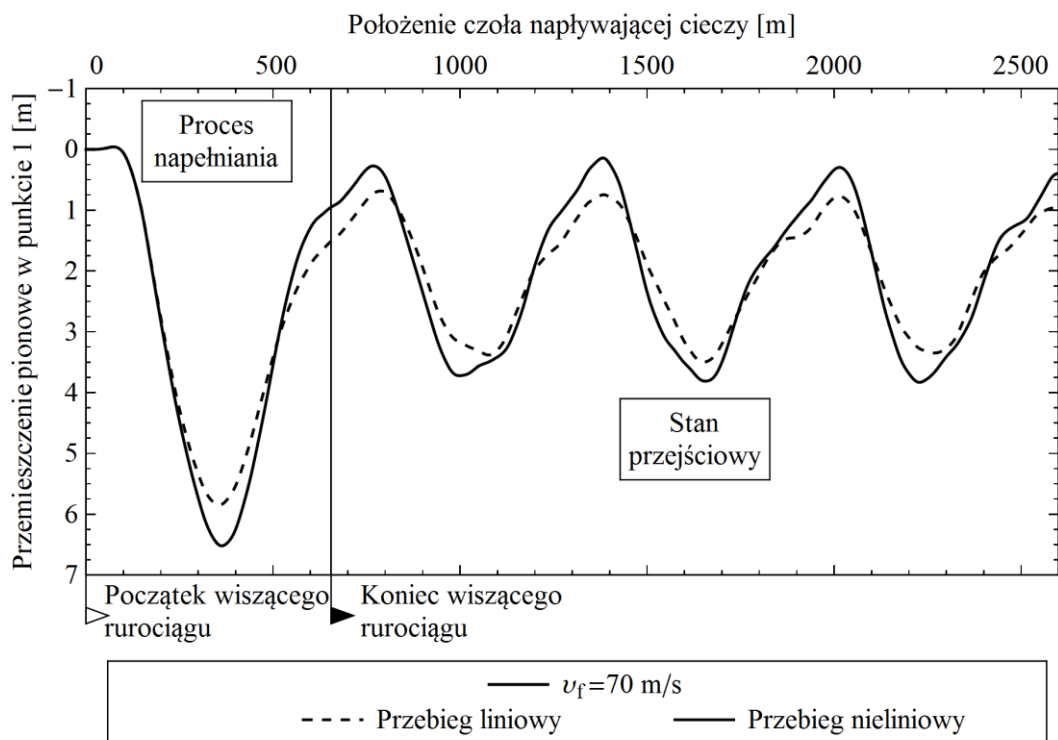
Rys. 4.16. Przebieg pionowych drgań rurociągu w punkcie 2, w trakcie procesu opróżniania i po opróżnieniu, w zależności od prędkości przepływu (rozwiązania liniowe)

Tabela 4.4. Maksymalne wartości amplitud drgań pionowych rurociągu, po jego opróżnieniu

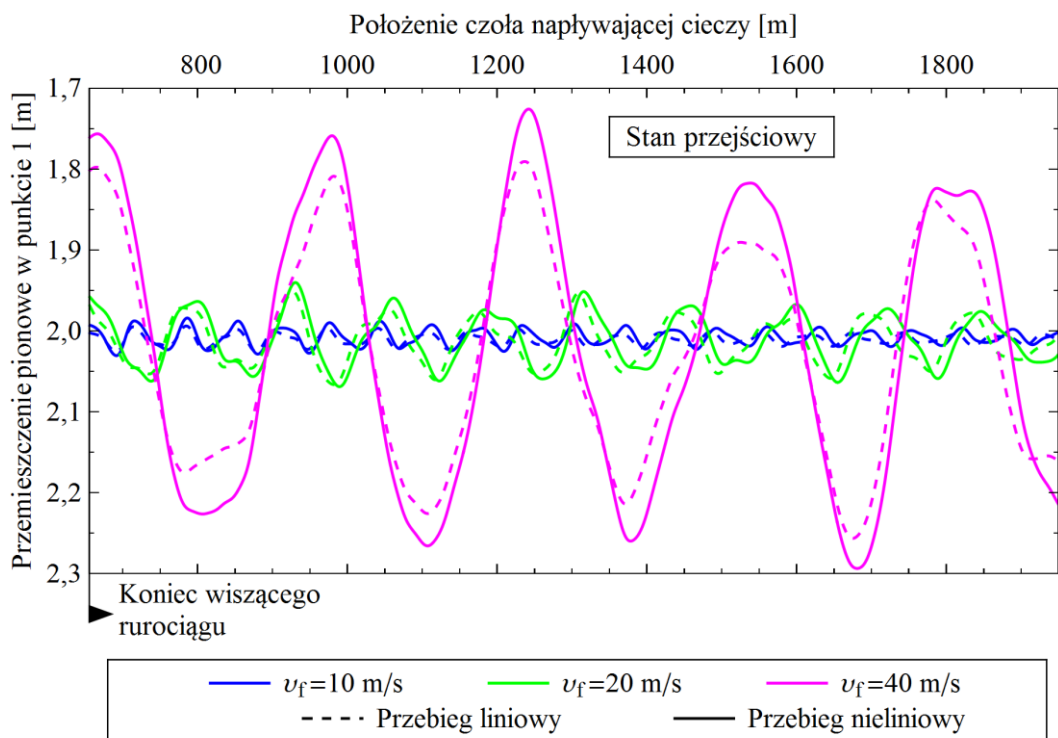
Prędkość przepływu	Punkt 1	Punkt 2
[m/s]	[m]	[m]
$v_f = 5$	0,002	0,001
$v_f = 10$	0,009	0,002
$v_f = 20$	0,036	0,052
$v_f = 40$	0,163	0,231
$v_f = 70$	1,829	0,649

Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, analogicznie jak w przypadku przebiegów quasi-statycznych, że wraz ze wzrostem prędkości cieczy rosną także efekty dynamiczne wynikające z napływu/odpływu. Przy czym, do prędkości napływu/odpływu $v_f = 20$ m/s amplitudy drgań przemieszczeń pionowych są w zasadzie pomijalne (maksymalna amplituda drgań to 0,05 m). Natomiast dla prędkości odpływu $v_f = 70$ m/s amplituda drgań osiąga poziom ponad 1,8 m. Pomimo, że jest to już znacząca amplituda, to zestawiona z rozpiętością mostu 655,3 m daje wynik względny równy 0,3%, a dla porównania towarzyszące przemieszczenie statyczne wynikające z całkowitego napełnienia rurociągu przy tej samej prędkości jest większe i wynosi 2,0 m. Ponadto, porównując wykresy drgań wynikające z procesu napełniania rurociągu z wykresami opróżniania można zauważyć wyraźnie wyższe (o około 30%) amplitudy drgań pionowych (odpowiednio 1,4 m oraz 1,8 m w punkcie 1, przy prędkości cieczy $v_f = 70$ m/s). Zatem widać, że proces opróżniania niesie ze sobą większe ryzyko pojawienia się drgań przekraczających założony poziom.

Na rysunkach 4.17 i 4.18 przedstawiono porównanie rozwiązań liniowych z nieliniowymi, przy czym efekty nieliniowe wynikają tu z uwzględnienia nieliniowości cięgien oraz rurociągu, jak w przypadku prezentowanych wcześniej rozwiązań quasi-statycznych. Przedstawione rozwiązania dotyczą tylko drgań rurociągu w punkcie 1, w trakcie procesu napełniania, ponieważ w tym przypadku odnotowano największe przemieszczenia, a więc co za tym idzie można spodziewać się największych wpływów nieliniowych. W tabeli 4.5 podano maksymalne przemieszczenia rurociągu w punkcie 1, wybrane z przebiegów liniowych i nieliniowych wyznaczonych przy różnych prędkościach przepływu.



Rys. 4.17. Przebieg pionowych drgań rurociągu w punkcie 1, w trakcie procesu napełniania i po napełnieniu, wyznaczony w zagadnieniu liniowym i nieliniowym przy prędkości przepływu $v_f = 70$ m/s



Rys. 4.18. Fragment przebiegu pionowych drgań w punkcie 1, po napełnieniu rurociągu, wyznaczony w zagadnieniu liniowym i nieliniowym przy trzech wybranych prędkościach przepływu

Tabela 4.5. Wartości maksymalnych przemieszczeń dynamicznych rurociągu w punkcie 1, wybrane z całych przebiegów drgań podczas napełniania rurociągu, w zależności od prędkości przepływu

Prędkość przepływu	Przemieszczenie liniowe	Przemieszczenie nieliniowe	Różnica
[m/s]	[m]	[m]	[%]
$v_f = 5$	4,046	4,120	1,83
$v_f = 10$	4,052	4,138	2,11
$v_f = 20$	4,118	4,205	2,12
$v_f = 40$	4,264	4,398	3,14
$v_f = 70$	5,847	6,520	11,51

Z analizy wyników obliczeń pokazanych na rysunkach 4.17 i 4.18 oraz w tabeli 4.5 wynika, że uwzględnienie efektów nieliniowych w analizie drgań spowodowanych napływem masy z prędkościami do $v_f = 40$ m/s nie powoduje istotnych różnic w zakresie przemieszczeń pionowych. Różnice między przebiegami liniowymi i nieliniowymi są zauważalne, ale w zakresie wartości maksymalnych nie przekraczają 3%. Jest to zgodne z oczekiwaniami, ponieważ wartości przemieszczeń są stosunkowo małe wobec rozpiętości rurociągu, chociaż bezwzględnie są duże. Przemieszczenie rzędu 4,4 m w stosunku do rozpiętości 655,3 m stanowi tylko 0,7%. Jedynie w przypadku prędkości napływu $v_f = 70$ m/s, maksymalne przemieszczenie nieliniowe jest znacząco większe od przemieszczenia liniowego, bo o około 12%. Stąd wynika wniosek, że uwzględnienie nieliniowości geometrycznej w analizach dynamicznych mostów rurociągowych obciążonych napływem/odpływem cieczy jest niezbędne tylko w przypadku wystąpienia prędkości przepływu bliskich prędkości krytycznej.

4.5. Podsumowanie

Do analizy drgań spowodowanych przepływem cieczy w rurociągu zastosowano w tej pracy uproszczony model cieczy w postaci półnieskończonego odcinka rozłożonej masy balastowej, poruszającej się z zadaną stałą prędkością wzdłuż rurociągu. Oznacza to, że przepływ cieczy stanowi ruchome obciążenie inercyjne rurociągu, czyli przemieszczająca się ciecz (masa balastowa) drga wraz z rurociągiem. Uwzględnia się zatem siły inercji cieczy wynikające z tego ruchu, a pomija się wzajemną interakcję między cieczą i rurociągiem.

Wyprowadzono wektory sił wzbudzających w przypadku napełniania rurociągu cieczą oraz w przypadku opróżniania, a także w stanie ustalonym, gdy ruchoma ciecz wypełnia całą długość rurociągu. Stwierdzono, że zależne od przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń uogólnionych składniki wektorów sił wzbudzających modyfikują postać macierzy sztywności, tłumienia i bezwładności w równaniu ruchu rurociągowego mostu wiszącego. Wykazano

zatem, że ruch masy cieczy wpływa na wszystkie parametry konstrukcji, tj. sztywność, masę oraz tłumienie. Biorąc ten fakt pod uwagę wykonano, pomijając tłumienie, obszerną analizę zagadnienia własnego konstrukcji mostu, m.in. w zależności od prędkości przepływu cieczy.

Ponieważ zaproponowany model przepływu cieczy daje możliwość obserwacji przemieszczeń konstrukcji spowodowanych napływem lub odpływem ciągłej masy, a także drgań wynikających z ruchu masy z różnymi prędkościami, przeprowadzono w tym zakresie analizy numeryczne rozwiązań quasi-statycznych oraz drgań liniowych i nieliniowych w wybranych punktach rurociągu.

Otrzymane wyniki są generalnie zgodne z rezultatami badań eksperymentalnych przedstawionych w pracy [141]. Jednak należy tu podkreślić, że we wspomnianym artykule zaproponowano opis przemieszczeń rurociągu podczas przepływu kolumny cieczy w postaci krzywej Gaussa, której parametry uzależniono od objętości kolumny cieczy, pola przekroju rurociągu, oraz prędkości świnki. Nie przeprowadzono badań numerycznych, które odpowiadałyby warunkom eksperymentu. Zaproponowany w rozprawie model przepływu cieczy, pomimo że pomija efekty interakcji ciecz-rurociąg, może w znaczący sposób przyczynić się do oceny przemieszczeń quasi-statycznych oraz przynajmniej w zgrubny sposób przybliżyć efekty drgań rurociągu podczas piggingu.

Rozpatrując wyniki badań zagadnienia własnego w zależności od prędkości ruchu masy stwierdzono, że stopniowe zwiększanie prędkości powoduje spadek częstości drgań własnych mostu obejmujących całą konstrukcję, natomiast nie ma wpływu na częstości drgań lokalnych (drgań cięgien). Do prędkości przepływu $v_f = 40$ m/s spadek częstości jest jednak pomijalnie mały, nie przekracza 3%. Przy prędkości $v_f = 70$ m/s, bliskiej prędkości krytycznej powodującej utratę zachowawczej postaci równowagi mostu, spadek częstości pionowych drgań własnych jest wyraźnie widoczny (około 12%), a jest bardzo duży w przypadku częstości stowarzyszonych z formami drgań charakteryzującymi się dominacją ruchu poziomego – osiąga wartość nawet 67%. Ten fakt sugeruje, że wyboczenie rurociągu nastąpi w płaszczyźnie poziomej. Ponadto, można stwierdzić, że przy jednoczesnym działaniu obciążeń zewnętrznych i przepływu cieczy z dużą prędkością, to właśnie obciążenia poziome (na przykład boczny wiatr) będą miały decydujący wpływ na wyężenie statyczne i dynamiczne rurociągu.

Ogólny wniosek, który wypływa z analizy drgań pionowych wiszącego rurociągu, spowodowanych przepływem cieczy, jest następujący: efekty dynamiczne wynikające z napływu/odpływu masy cieczy są pomijalne. Duże amplitudy przemieszczeń, które przypuszczalnie mogłyby doprowadzić do uszkodzenia rurociągu są osiągalne tylko

w przypadku prędkości bliskich prędkości krytycznej, która w przypadku analizowanego mostu wynosi $v_{\text{cr}} = 74,18$ m/s. Porównując tę prędkość z realnymi prędkościami przepływu medium (na przykład w ropociągu Trans-Alaska średnia prędkość wynosi 6 km/h, co daje około 1,7 m/s) można dojść do stwierdzenia, że prezentowane w tej pracy wyniki mają wymiar wyłącznie poznawczy. Niemniej, właśnie z punktu widzenia poznawczego bardzo istotny jest wniosek generalny dotyczący wpływu efektów nieliniowych spowodowanych dużymi przemieszczeniami konstrukcji. Efekty te, zarówno w zagadnieniu quasi-statycznym jak i dynamicznym w sposób widoczny zwiększają przemieszczenia rurociągu, rosną wraz z prędkością przepływu masy (ponieważ rosną przemieszczenia), ale w realnym zakresie prędkości nie mają istotnego znaczenia, zatem można je pominąć w praktycznych obliczeniach inżynierskich.

Znacznie większym zagrożeniem dla bezpieczeństwa konstrukcji, niż efekty dynamiczne, są przemieszczenia statyczne wynikające z ciężaru napływającej lub odpływającej cieczy. Napełnianie lub opróżnianie rurociągu powoduje nierównomierny układ obciążeń, który z kolei prowadzi do wystąpienia dużo większych przemieszczeń (nawet dwukrotnie) niż po całkowitym napełnieniu. O dużym znaczeniu tego problemu świadczy praca [34], gdzie analizowano problem stateczności wiszących mostów rurociągowych po katastrofie, do której doszło w trakcie procesu napełniania rurociągu.

Jak wynika z powyższych wniosków, uwzględnienie efektów dynamicznych przepływu ciągłej masy jako modelu cieczy i efektów nieliniowych związanych z dużymi przemieszczeniami rurociągu ma znaczenie tylko w przypadku ekstremalnych prędkości przepływu. W tym rozdziale uwagę skupiono na przebadaniu wpływu prędkości cieczy na przemieszczenia pionowe wynikające z ruchu masy cieczy. Natomiast wiszące mosty rurociągowie są także poddane działaniu poziomych obciążeń takich jak wiatr, który można uznać za obciążenie podstawowe. W związku z tym, w następnej części pracy zostanie przedstawiona analiza stochastyczna odpowiedzi dynamicznej mostu na działanie buffetingu (wzbudzenia turbulentnego), z uwzględnieniem wpływu prędkości cieczy płynącej w rurociągu w stanie ustalonym (wypełniającej cały rurociąg).

5. Drgania wymuszone turbulencją wiatru

5.1. Wprowadzenie

W większości prac na temat drgań mostów dużych rozpiętości, spowodowanych buffetingiem czyli turbulencją wiatru, analiza odpowiedzi dynamicznej konstrukcji jest przeprowadzana w ujęciu stochastycznym, zazwyczaj w dziedzinie częstotliwości, na podstawie sformułowań zaproponowanych przez Scanlana [114], [115]. W przypadku analiz prowadzonych w dziedzinie częstotliwości korzysta się z metody widmowej, ponieważ parametry obciążenia aerodynamicznego są funkcjami częstotliwości pulsacji wiatru, a dziedzina częstotliwości jest wygodnym środowiskiem do analiz liniowych przy obciążeniach stacjonarnych. Jednak, gdy konieczne jest uwzględnienie nieliniowości konstrukcyjnej lub obciążeń niestacjonarnych, łatwiej jest sformułować problem w dziedzinie czasu. Analiza stochastyczna odpowiedzi konstrukcji w dziedzinie czasu (analiza korelacyjna) wymaga znajomości historii przebiegów czasowych obciążeń spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym i wówczas stosowane są zwykle metody symulacyjne. Obecny stan wiedzy w dziedzinie numerycznych symulacji obciążenia wiatrem przedstawiono w artykule [76].

Pomimo bardzo obszernej literatury dotyczącej zagadnienia buffetingu, w dalszym ciągu powstaje wiele nowych opracowań, w których przedmiotem rozważań są zarówno badania eksperymentalne w tunelach aerodynamicznych jak i analizy teoretyczne. Innowacje zmierzają głównie do zwiększenia dokładności oraz przyspieszenia obliczeń. Jednym ze stosowanych sposobów przyspieszenia obliczeń jest dekompozycja modalna modelu obliczeniowego konstrukcji i poszukiwanie rozwiązań w bazie współrzędnych modalnych, zazwyczaj z ograniczeniem do kilkunastu pierwszych układów modalnych. Przykładowo, takie podejście zastosowali autorzy pracy [10], Boonyapinyo, Miyata i Yamada, którzy rozwiązali łączny problemu flatteru i buffetingu w dziedzinie czasu bazując na modelu mostu zapisanym we współrzędnych modalnych w przestrzeni stanów układu. Podobne zagadnienie przedstawiono w artykule [24], gdzie opisano sposób rozwiązania problemu buffetingu wielomodalnego za pomocą zespolonej dekompozycji modalnej. Zaletą obu proponowanych podejść jest lepsza wydajność numeryczna niż w przypadku rozwiązania w bazie współrzędnych fizycznych. Ponadto, umożliwiają one lepsze zrozumienie procesu tzw. sprzężenia aerodynamicznego, czyli sprzężenia form własnych konstrukcji spowodowanego siłami samowzbudnymi (siły samowzбудne modyfikują sztywność konstrukcji zmieniając w ten sposób jej częstości i kształt form własnych). W pracach naukowych podkreśla się duże

znaczenie tego sprzężenia, które w klasycznym ujęciu zagadnienia flutteru i buffetingu jest pomijane w celu oszacowania wartości tłumienia aerodynamicznego dla poszczególnych form własnych (ang. *mode-by-mode approach* [118]). Jak wykazano jednak w pracy [29], przy dużych prędkościach wiatru bliskich prędkości krytycznej flutteru, zaniedbanie sprzężenia form przy badaniu zjawiska buffetingu może prowadzić do niedoszacowania odpowiedzi konstrukcji. Ponadto, w przypadku mostów o bardzo dużych rozpiętościach wzrasta ryzyko pojawienia się flutteru wielomodalnego spowodowanego sprzężeniem drgań w kierunku pionowym i skrętnym, ponieważ zmniejsza się stosunek częstotliwości drgań pionowych do skrętnych. Prawidłowa analiza odpowiedzi mostu wymaga zatem dokładnej prognozy tłumienia aerodynamicznego oraz zmian kształtów form własnych spowodowanych sprzężeniem aerodynamicznym. W literaturze, przykładowo w [28], [29] oraz [74], proponuje się efektywne sposoby rozwiązania tego zagadnienia.

W ostatnich latach, oprócz wspomnianego wcześniej pomijania sprzężeń aerodynamicznych w analizie buffetingu, kwestionowane są w literaturze także inne uproszczenia stosowane w celu przyspieszenia obliczeń, takie jak stosowanie tzw. teorii quasi-ustalonej do opisu przepływu turbulentnego czy pomijanie nieliniowości aerodynamicznych wynikających z zależności kąta natarcia wiatru od ruchu konstrukcji spowodowanego działaniem wiatru. Na przykład, Chen, Kareem i Matsumoto w pracy [27] zaproponowali oryginalne rozwiązanie łącznego problemu buffetingu i flutteru w dziedzinie czasu, które uwzględnia zależność współczynników aerodynamicznych od częstości pulsacji wiatru, w przeciwieństwie do teorii quasi-ustalonej, która zakłada ich niezależność od częstości pulsacyjnych. Natomiast autorzy pracy [23] zaproponowali rozwiązanie problemu obciążenia mostu porywistym wiatrem z uwzględnieniem nieliniowości aerodynamicznych, podkreślając, że nowoczesne mosty dużych rozpiętości, pomimo bardzo dobrych charakterystyk aerodynamicznych dźwigarów, są bardzo wrażliwe na zmiany kąta natarcia wiatru. Stwierdzili, że nawet pod wpływem turbulencji o niskiej intensywności i przy małych amplitudach drgań konstrukcji może dojść do tak dużych zmian kąta natarcia wiatru, że modelowanie sił aerodynamicznych przy zastosowaniu podejścia liniowego będzie obarczone dużym błędem (w podejściu liniowym siły aerodynamiczne linearyzuje się wokół średniego statycznego stanu przemieszczenia). Jak widać, problem buffetingu jest ciągle aktualny, a zagadnienia takie jak modelowanie sił aerodynamicznych powstałych w wyniku oddziaływania huraganów lub burz, a także sił działających na mosty położone w złożonych warunkach topograficznych wciąż nie są do końca zbadane [26].

W niniejszej rozprawie problem buffetingu będzie rozpatrywany w odniesieniu do wiszącego mostu rurociągowego, w zakresie teorii korelacyjnej (tj. w dziedzinie czasu), z zastosowaniem klasycznej teorii quasi-ustalonej i z pominięciem sił samowzbudnych, oraz wykorzystaniem opisu ruchu za pomocą współrzędnych fizycznych (a nie modalnych) w połączeniu z matematycznym (a nie symulacyjnym) opisem turbulencji wiatru procesami stochastycznymi. W celu pełnego zrozumienia definicji obciążenia mostu buffetingiem przedstawiony zostanie najpierw opis losowego pola wiatru. Następnie sformułowane zostaną siły aerodynamiczne działające na typowy dźwigar mostowy, w klasycznym ujęciu zaproponowanym przez Scanlana. Po tej części wstępnej przedstawiony będzie autorski algorytm analizy drgań wiszącego mostu rurociągowego obciążonego porywistym wiatrem, bazujący na pracach [14] i [17]. Zaprezentowany w końcowej części rozdziału przykład numeryczny pozwoli ocenić efektywność sformułowanego w pracy modelu obliczeniowego konstrukcji, opartego na technice podstruktur, w analizie drgań wiszącego mostu rurociągowego obciążonego buffetingiem.

5.2. Obciążenia aerodynamiczne mostów dużych rozpiętości

5.2.1. Charakterystyka pola porywistego wiatru

Turbulentna natura wiatru ujawniająca się przy jego dużych prędkościach jest spowodowana głównie tarciem powietrza o powierzchnię terenu. Przepływ wiatru zmienia się wtedy w skomplikowany, losowy sposób w czasie i przestrzeni, zatem musi być opisany za pomocą metod statystycznych. Przyjmuje się, że model silnego porywistego wiatru jest złożony z przepływu o stałej prędkości średniej, który jest zdeterminowany przez układy baryczne, oraz nałożonych na tę prędkość, losowych, przestrzenno-czasowych fluktuacji prędkości, które są generowane przez chropowatość podłoża i przeszkody terenowe [152]. Aby opisać matematycznie losowe pole wiatru, wprowadza się prostokątny układ kartezjański x, y, z , który dla wygody obliczeń jest związany z dominującym kierunkiem przepływu w ten sposób, że oś x pokrywa się z kierunkiem prędkości średniej. Wówczas, zależne od czasu t składowe prędkości chwilowej mierzonej w punkcie (x,y,z) definiuje się następująco [55]:

$$\begin{array}{ll}
 \text{składowa wzdłużna} & U(x, y, z, t) = \bar{U} + u(x, y, z, t), \\
 \text{składowa poprzeczna w kier. osi } y & V(x, y, z, t) = v(x, y, z, t), \\
 \text{składowa poprzeczna w kier. osi } z & W(x, y, z, t) = w(x, y, z, t).
 \end{array} \tag{5.1}$$

Zakłada się, że fluktuacje prędkości wiatru u , v oraz w są stacjonarnymi, gaussowskimi procesami stochastycznymi o zerowej wartości oczekiwanej, natomiast prędkość średnia \bar{U} jest obliczana na podstawie 10-cio minutowego czasu obserwacji, chociaż według [152] czas uśredniania porywistego wiatru powinien być większy – od jednej do dwóch godzin.

Pomimo, iż w rzeczywistości wiatr nigdy nie jest idealnie poziomym ruchem mas powietrza, to w praktyce, w tym w inżynierii mostowej przyjmuje się, że istotne znaczenie ma pozioma prędkość przepływu, ponieważ wynikające z niej siły aerodynamiczne mają największy wpływ na konstrukcje budowlane [55]. Zakłada się wtedy, że prędkość średnia (pozioma) \bar{U} zależy od wysokości z nad poziomem terenu, przy czym zależność ta wynika z przyjętego pionowego profilu wiatru. Prędkość średnią oznacza się zwykle symbolem U , gdzie $U = U(z)$. Warto też zauważyć, że składowe poprzeczne turbulencji wiatru v i w są często pomijane, ponieważ są zwykle dużo mniejsze od składowej wzdłużnej u [152].

Podstawowymi parametrami turbulencji są: odchylenie standardowe, intensywność turbulencji, całkowite skale długości oraz funkcja gęstości widmowej prędkości pulsacyjnych [55]. Intensywność turbulencji w kierunku wzdłużnym oblicza się ze wzoru $I_u(z) = \sigma_u(z)/U(z)$, gdzie $\sigma_u(z)$ jest odchyleniem standardowym fluktuacji prędkości wiatru na wysokości z , natomiast w kierunkach poprzecznych (poziomym i pionowym) przyjmuje się, że $\sigma_v(z) \approx 0,75\sigma_u(z)$ i $\sigma_w(z) \approx 0,5\sigma_u(z)$, a stąd można wyznaczyć $I_v(z) = \sigma_v(z)/U(z)$ oraz $I_w(z) = \sigma_w(z)/U(z)$ [55]. Całkowite skale długości dające informacje o średnim rozmiarze wirów w poszczególnych kierunkach x, y, z wyznacza się na podstawie funkcji autokowariancji fluktuacji składowych prędkości wiatru [62]. Najważniejszą charakterystyką wiatru jest gęstość widmowa, określona w dziedzinie częstotliwości, nazywana widmem wiatru. Funkcje spektralne stosowane w budownictwie obejmują zakres pulsacji wiatru o okresie od 1 s do 5 min, co odpowiada częstotliwościom od 1 Hz do ok. 0,003 Hz. Jest to więc zakres, w którym porywy wiatru mogą wzbudzić drgania konstrukcji o niskich częstościach własnych, takich jak mosty wiszące dużych rozpiętości, a szczególnie mosty rurociągowy. Do matematycznego opisu gęstości widmowej wiatru stosowane są najczęściej funkcje: Kaimała, Davenporta, Harrisa lub Karmana [55], [118]. Przykładowo, widmo Kaimała w przypadku składowej turbulencji zgodnej z kierunkiem wiatru ma postać [118]

$$\frac{nS_u(z, n)}{U_*^2} = \frac{200f}{(1+50f)^{5/3}}, \quad (5.2)$$

gdzie $U_* = kU(z)/\ln(z/z_0)$, $k \approx 0,4$, z_0 jest parametrem o wymiarze długości, zależnym od chropowatości podłoża, $f = nz/U(z)$, a $n = \omega/2\pi$ jest mierzona w hercach częstotliwością pulsacyjną wiatru. Funkcje gęstości widmowej składowych turbulencji prostopadłych do kierunku wiatru mogą być w przybliżeniu opisane wzorami [118]:

$$\begin{aligned}\frac{nS_v(z,n)}{U_*^2} &= \frac{15f}{(1+9,5f)^{5/3}}, \\ \frac{nS_w(z,n)}{U_*^2} &= \frac{3,36f}{1+10f^{5/3}}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

5.2.2. Siły aerodynamiczne działające na dźwigary mostów

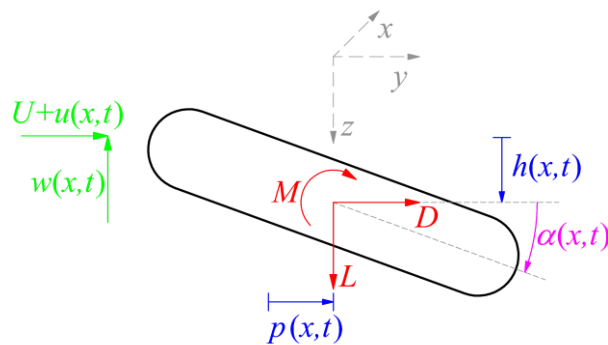
Za najważniejsze z punktu widzenia globalnych drgań złożonych konstrukcji mostowych, takich jak mosty wiszące i podwieszane, uważa się obciążenia aerodynamiczne działające na dźwigar mostu. Stąd, w opisie pola wiatru jest przyjmowany konsekwentnie kartezjański układ współrzędnych x, y, z , który jest związany z osiami głównymi dźwigara, zamiast ze średnim kierunkiem działania wiatru jak to opisano w podpunkcie 5.2.1. Oś x jest zatem osią podłużną dźwigara (poziomą), y jest osią poziomą prostopadłą do x , a z osią pionową (rys. 5.1). Przyjmuje się, że prędkość wiatru działającego na dany przekrój dźwigara ma trzy składowe, w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach $U(x,t) = U + u(x,t)$, $V(x,t) = v(x,t)$ oraz $W(x,t) = w(x,t)$, gdzie U jest średnią poziomą prędkością wiatru działającą w kierunku osi y , a funkcje $u(x,t)$, $v(x,t)$ oraz $w(x,t)$ opisują trzy składowe turbulencji – odpowiednio w kierunkach osi y, x i z , przy czym zwykle pomija się składową $v(x,t)$ działającą wzdłuż osi mostu, ze względu na mały wpływ na stan przemieszczenia konstrukcji. Wszystkie wymienione składowe prędkości wiatru dotyczą danej wysokości z nad poziomem terenu, która wynika z określonego położenia dźwigara mostu.

Wypadkową rozłożonych sił aerodynamicznych działających na obrys dźwigara mostu w przekroju x wyraża się za pomocą sumy trzech składników: średniego obciążenia wiatrem F_s , obciążenia siłami samowzbudnymi wynikającymi z ruchu konstrukcji F_{se} oraz obciążenia wynikającego z turbulencji F_b [55]

$$F_{tot} = F_s + F_{se} + F_b.\tag{5.4}$$

Pod wpływem działania sił aerodynamicznych dźwigar mostu przemieszcza się, jak pokazano na rysunku 5.1. Składowymi stanu przemieszczenia w przekroju x są: przemieszczenie pionowe $h(x,t)$, poziome $p(x,t)$ oraz obrót $\alpha(x,t)$, który równocześnie określa kąt natarcia

wiatru w chwili t . Reprezentacją wypadkowej siły aerodynamicznej w przekroju x , po jej redukcji do środka ścinania przekroju [118], są dwie składowe siły oraz moment: pozioma siła ciągnąca D działająca zgodnie z kierunkiem wiatru (ang. *drag force*), pionowa siła unosząca L (ang. *lift force*) oraz moment odchylający M (ang. *pitching moment*). Przedstawione na rysunku 5.1 zwroty przyjęto jako dodatnie, zgodnie z regułą stosowaną w literaturze [25], [29]. We wcześniejszych opracowaniach, na przykład w monografii Simiu i Scanlana [118], dodatnia siła unosząca ma zwrot skierowany w górę, zgodnie z fizycznym oddziaływaniem wiatru.



Rys. 5.1. Stan przemieszczenia przekroju dźwigara i składowe obciążenia aerodynamicznego

Składowe obciążenia aerodynamicznego, analogicznie do (5.4), wyraża się za pomocą sum trzech składników:

$$\begin{aligned} D &= D_s + D_{se} + D_b, \\ L &= L_s + L_{se} + L_b, \\ M &= M_s + M_{se} + M_b. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Przy czym średnie (statyczne) obciążenia wiatrem w przekroju x wynoszą [55], [118]:

$$\begin{aligned} D_s(x) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B C_D(\alpha_s), \\ L_s(x) &= -\frac{1}{2} \rho U^2 B C_L(\alpha_s), \\ M_s(x) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_M(\alpha_s), \end{aligned} \quad (5.6)$$

gdzie ρ oznacza gęstość powietrza, α_s jest średnim (statycznym) kątem natarcia wiatru oraz B jest szerokością przekroju dźwigara mostu (w niektórych opracowaniach, na przykład w [55], w przypadku siły D_s bierze się wysokość przekroju H zamiast szerokości B). $C_D(\alpha_s)$, $C_L(\alpha_s)$

i $C_M(\alpha_s)$ są współczynnikami oporu aerodynamicznego, zależnymi od kąta natarcia i kształtu dźwigara, wyznaczanymi eksperymentalnie w tunelu aerodynamicznym. Dla uproszczenia oznaczeń przyjęto dalej $C_D(\alpha_s)=C_D$, $C_L(\alpha_s)=C_L$, $C_M(\alpha_s)=C_M$.

Zmienne w czasie siły samowzbudne, zależne od częstości drgań konstrukcji ω są w zagadnieniach aerodynamiki mostów definiowane przy założeniu, że konstrukcja znajduje się w ustalonym przepływie wiatru [28], [118]. Najczęściej są one wyrażane w literaturze następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} D_{se}(x,t) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[KP_1^* \frac{\dot{p}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 P_3^* \alpha + K^2 P_4^* \frac{p}{B} + KP_5^* \frac{\dot{h}}{U} + K^2 P_6^* \frac{h}{B} \right], \\ L_{se}(x,t) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{h}{B} + KH_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 H_6^* \frac{p}{B} \right], \quad (5.7) \\ M_{se}(x,t) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} + KA_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 A_6^* \frac{p}{B} \right], \end{aligned}$$

poprzez pochodne flatterowe (ang. *flutter derivatives*) P_i^* , H_i^* oraz A_i^* ($i=1-6$) zależne od częstości zredukowanej $K = \omega B/U$ [118]. W celu spójnego sformułowania sił aerodynamicznych w dziedzinie czasu, zamiast pochodnych flatterowych stosowane są też impulsowe funkcje przejścia (ang. *impulse response functions*) lub charakterystyczne funkcje przejścia (ang. *indicial response functions*) [25].

Pochodne flatterowe wyznacza się doświadczalnie na podstawie badań sekcji mostu w tunelu aerodynamicznym. Opierając się na wynikach badań pochodnych flatterowych można oszacować możliwość wystąpienia różnych przypadków niestateczności aerodynamicznej, na przykład dodatnie wartości H_1^* mogą wskazywać na możliwość wystąpienia zjawiska lock-in przy wzbudzeniu wirowym, natomiast dodatnie wartości A_2^* ujawniają skłonności do flatteru czysto-skrętnego. Ponadto, dodatnie wartości H_2^* i A_1^* informują o możliwości wystąpienia flatteru wielomodalnego [62].

W większości typowych mostów, drgania spowodowane flatterem są zdominowane przez jedną niesprzężoną formę drgań. W celu rozwiązania tego zagadnienia stosuje się wspomnianą wcześniej metodę „mode-by-mode”. Natomiast w przypadku sprzężenia form, analiza flatteru sprowadza się do rozwiązania nieliniowego zespolonego zagadnienia własnego. W związku z tym, że siły samowzbudne zależą od nieznannej częstości zredukowanej K , to dla każdej wartości własnej wymagane jest przeprowadzenie skomplikowanej procedury iteracyjnej, gdzie należy doprowadzić do zgodności przyjętej

arbitralnie częstości ω z obliczoną częstością modalną [74]. Procedura ta jest bardzo czasochłonna, a ponadto nie może być w pełni zautomatyzowana, gdyż częstości mostów dużych rozpiętości mają zbliżone wartości. Wtedy w każdym kroku iteracji potrzebna jest identyfikacja docelowej formy własnej związanej z badaną częstością własną. Problem ten można rozwiązać bez konieczności uciążliwej iteracji stosując aproksymację pochodnych flatterowych funkcjami wymiernymi (ang. *rational function approximation* – RFA). Wtedy siły samowzbudne zależne od częstości zapisuje się w funkcji czasu, zamiast w dziedzinie częstości [28].

Wspomniane metody oceny niestateczności flatterowej mostu tradycyjnie bazują na wyznaczeniu charakterystyk aerodynamicznych w tunelu aerodynamicznym, a następnie zastosowaniu ich w dalszych analizach teoretycznych. Ostatnio wraz z rozwojem technologii komputerowej możliwe jest także budowanie modeli czysto numerycznych. Wtedy parametry opływu mostu są identyfikowane przy zastosowaniu metod CFD (ang. *Computational Fluid Dynamics*) uwalniając od konieczności przeprowadzania badań eksperymentalnych [61].

Ostatnim składnikiem obciążeń aerodynamicznych (5.5) są siły wynikające z turbulencji wiatru, które są wyrażone następującymi wzorami [25]:

$$\begin{aligned} D_b(x,t) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(2C_D \chi_{Du} \frac{u(x,t)}{U} + (C'_D - C_L) \chi_{Dw} \frac{w(x,t)}{U} \right), \\ L_b(x,t) &= -\frac{1}{2} \rho U^2 B \left(2C_L \chi_{Lu} \frac{u(x,t)}{U} + (C'_L + C_D) \chi_{Lw} \frac{w(x,t)}{U} \right), \\ M_b(x,t) &= \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(2C_M \chi_{Mu} \frac{u(x,t)}{U} + C'_M \chi_{Mw} \frac{w(x,t)}{U} \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

gdzie $C'_D = \left. \frac{dC_D}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_s}$, $C'_L = \left. \frac{dC_L}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_s}$, $C'_M = \left. \frac{dC_M}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_s}$. Funkcje: χ_{Du} , χ_{Dw} , χ_{Lu} , χ_{Lw} , χ_{Mu} , χ_{Mw} są

aerodynamicznymi funkcjami przeniesienia (ang. *aerodynamic transfer functions*), które obrazują zależność między fluktuacjami prędkości wiatru, a obciążeniem aerodynamicznym działającym na konstrukcję [55]. Wartości bezwzględne tych funkcji są nazywane aerodynamicznymi funkcjami admitancji [25]. Są one wyznaczone eksperymentalnie, a ich postać zależy od częstości pulsacji wiatru oraz od kształtu przekroju poprzecznego dźwigara. Do matematycznego opisu admitancji najczęściej stosuje się funkcje Searsa [55]. Szczegółowy opis i przegląd literaturowy sposobów wyznaczania funkcji admitancji przedstawiono w pracy [35]. Opierając się na badaniach eksperymentalnych oraz analitycznych stwierdzono zależność występującą między pochodnymi flatterowymi

i funkcjami admitancji. Okazuje się, że wyznaczone eksperymentalnie pochodne flutterowe zawierają informacje o funkcjach admitancji. Podobną zależność można zaobserwować w dziedzinie czasu między impulsowymi lub charakterystycznymi funkcjami przejścia, a funkcjami admitancji.

W praktyce, w celu przyspieszenia obliczeń lub gdy funkcje admitancji nie są znane stosuje się tzw. teorię quasi-ustaloną. Jest ona najczęściej stosowana w przypadku analizy buffetingu w dziedzinie czasu. Teoria ta daje jednak poprawne wyniki tylko przy bardzo dużych prędkościach wiatru, gdy zależny od częstotliwości pulsacji wiatru efekt „pamięci” przepływu nieustalonego jest pomijalny [25]. Przy rzeczywistych prędkościach przepływ wokół przekroju mostu jest nieustalony i niewspółmierny do teorii quasi-ustalonej [26]. W analizie problemu wzbudzenia turbulentnego według teorii quasi-ustalonej zakłada się, że wartości współczynników aerodynamicznych nie zależą od częstości pulsacji wiatru, wówczas funkcje admitancji są równe jedności.

Jeszcze większym uproszczeniem jest pominięcie wpływu sił samowzbudnych w analizie drgań spowodowanych buffetingiem. Należy pamiętać, że siły samowzbudne powodują modyfikację reakcji sprężystych układu i sił oporów ruchu (tłumienia), zatem pominięcie ich w obliczeniach może prowadzić do dużych błędów w oszacowaniu sił aerodynamicznych. Niemniej jednak, w wielu pracach przyjmuje się powyższe uproszczenie [10], podobnie jak w niniejszej rozprawie, gdzie główny nacisk został położony na pokazanie ogólnego sposobu postępowania. W przyszłych pracach badawczych autor planuje uzupełnić przedstawiany dalej algorytm o pominięte siły aerodynamiczne (samowzbudne).

W dalszej części pracy, jako podstawę analizy drgań losowych spowodowanych turbulentnym przepływem wiatru przyjęto łączne formuły sił aerodynamicznych, zapisane następująco:

$$\begin{aligned}
 D &= D_s + D_b = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[C_D \left(1 + 2 \frac{u(x,t)}{U} \right) + (C'_D - C_L) \frac{w(x,t)}{U} \right], \\
 L &= L_s + L_b = -\frac{1}{2} \rho U^2 B \left[C_L \left(1 + 2 \frac{u(x,t)}{U} \right) + (C'_L + C_D) \frac{w(x,t)}{U} \right], \\
 M &= M_s + M_b = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[C_M \left(1 + 2 \frac{u(x,t)}{U} \right) + C'_M \frac{w(x,t)}{U} \right],
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

tzn. z uwzględnieniem średnich sił statycznych, ale z pominięciem sił samowzbudnych i przy założeniu teorii quasi-ustalonej, podobnie jak w pracy [10].

Należy zauważyć, że w przypadku mostów wiszących i wantowych dużych rozpiętości, należałoby uwzględnić oprócz obciążeń dźwigara także obciążenia aerodynamiczne cięgien i pylonów [29]. Obciążenia te pominięto jako wykraczające poza przyjęty zakres rozprawy, biorąc pod uwagę fakt, że problemy aerodynamiki pylonów i cięgien różnią się jakościowo od zagadnień dotyczących aerodynamiki dźwigarów mostowych i są zazwyczaj rozważane w literaturze odrębnie.

5.3. Algorytm analizy drgań wiszącego mostu rurociągowego spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym

Do analizy zostanie zastosowane podejście polegające na poszukiwaniu rozwiązań w dziedzinie czasu, czyli w zakresie teorii korelacyjnej. Rozwiązania te będą wyprowadzone za pomocą aparatu matematycznego teorii procesów stochastycznych, przy założeniu, że model obliczeniowy wiszącego mostu rurociągowego jest modelem liniowym, co oznacza, że nieliniowości konstrukcyjne wynikające ze zmiany kształtu cięgien i ewentualnych dużych przemieszczeń cięgien i rurociągu zostaną pominięte. W proponowanym algorytmie analizy korelacyjnej losowych drgań mostu będzie wykorzystana ogólna koncepcja zaprezentowana w monografii [14], która polega na podziale obciążeń aerodynamicznych wzdłuż całkowitej rozpiętości mostu na skończoną liczbę segmentów oraz przyjęciu założenia, że intensywności obciążeń aerodynamicznych działających na wybrany segment mostu są stałe w sensie ich rozkładu na długości tego segmentu, ale zmieniają się losowo w czasie zgodnie z założonym modelem losowego pola prędkości wiatru. Tego typu podejście jest unikalne w rozwiązaniach analitycznych zagadnienia buffetingu, natomiast jest często stosowane w procedurach symulacji losowego pola wiatru działającego na mosty o dużych rozpiętościach (por. [19]).

5.3.1. Założenia

Zgodnie z założeniami powszechnie stosowanymi w literaturze związanej z aerodynamiką mostów, przyjęto, że losowe pole wiatru jest przepływem poziomym, prostopadłym do osi podłużnej mostu, o stałej prędkości średniej U na którą nakłada się losowa turbulencja o dwóch składowych: składowej wzdłużnej $u(x,t)$ i poprzecznej pionowej $w(x,t)$ (rys. 5.1). Pominięto poziomą poprzeczną składową turbulencji $v(x,t)$ o kierunku równoległym do podłużnej osi mostu. Obie rozważane składowe turbulencji są stacjonarnymi losowymi funkcjami czasu typu Gaussa o zerowej wartości oczekiwanej [55], niejednorodnymi w przestrzeni [58]. Założono, że są to procesy nieskorelowane, czyli wzajemnie niezależne, co jest istotnym ale często stosowanym w literaturze

uproszczeniem [19]. Ponadto przyjęto, że obowiązuje quasi-ustalona teoria przepływu i pominięto wpływ sił samowzbudnych.

Losowe pole prędkości wiatru podzielono wzdłuż rozpiętości mostu na n sekcji (segmentów) o długości d_j , gdzie $j = 1, 2, \dots, n$ jest numerem sekcji, oraz zastąpiono ciągłe funkcje losowe $u(x,t)$ i $w(x,t)$ dwóch zmiennych x i t zbiorami funkcji losowych $u_j(t)$ i $w_j(t)$ zależnych tylko od czasu. Założono, że losowe fluktuacje prędkości wiatru będące konkretnymi realizacjami funkcji losowej $u_j(t)$ lub $w_j(t)$ są takie same w każdym przekroju na długości danej sekcji „ j ”, ale różne w poszczególnych sekcjach. Poza tym, we wszystkich sekcjach są one opisane procesami stochastycznymi tego samego typu i o tych samych charakterystykach, tj. stacjonarnymi procesami gaussowskimi o takiej samej gęstości widmowej i o zerowej wartości oczekiwanej. Każdy z tych procesów jest skorelowany w czasie, poza tym zarówno procesy $u_j(t)$ jak i procesy $w_j(t)$ są skorelowane przestrzennie w obrębie swoich grup $j = 1, 2, \dots, n$, co pozwala uwzględnić fakt, iż korelacja losowej turbulencji wiatru maleje wzdłuż rozpiętości mostu.

Opisana dyskretyzacja ciągłych funkcji losowych $u(x,t)$ i $w(x,t)$ względem zmiennej przestrzennej x prowadzi do ich zamiany na dwa wektorowe procesy stochastyczne $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), \dots, w_n(t)]^T$ złożone ze stacjonarnych procesów Gaussa. Przyjęto, że procesy składowe reprezentują losowe fluktuacje prędkości wiatru w punktach położonych w środku kolejnych sekcji, zatem $u_j(t) = u(x_j, t)$ i $w_j(t) = w(x_j, t)$, gdzie x_j jest współrzędną środka segmentu mierzoną wzdłuż rozpiętości dźwigara mostu.

Należy tutaj zauważyć, że według Flagi [58] aproksymacja rozkładu gęstości prawdopodobieństwa losowych fluktuacji prędkości wiatru, przez rozkład normalny (rozkład Gaussa) daje coraz lepsze wyniki wraz ze wzrostem wysokości nad powierzchnią terenu. Jednak w warstwie przyziemnej powietrza (poniżej wysokości 100 m), a zwłaszcza nad terenami miejskimi rozkład gęstości prawdopodobieństwa może już znacząco odbiegać od rozkładu normalnego. Dyrbye i Hansen [55] z kolei twierdzą, że do wysokości 100-200 m założenie rozkładu normalnego jest uzasadnione, przy czym tylko dla zakresu fluktuacji ± 3 odchylenia standardowe. Mimo tych niejednoznaczności, aproksymacja składowych turbulencji wiatru procesami gaussowskimi jest powszechnie stosowana w literaturze [76] i na tej podstawie została przyjęta za obowiązującą w niniejszej rozprawie.

Założenie, że proces wzbudzenia jest procesem normalnym powoduje, że odpowiedź konstrukcji także jest procesem normalnym (gaussowskim) i pierwsze dwa momenty w pełni określają rozkład prawdopodobieństwa odpowiedzi [131]. W związku z tym, w tej pracy ograniczono analizę problemu drgań mostu spowodowanych oddziaływaniem buffetingu do

teorii korelacyjnej, wyznaczając dwa pierwsze momenty odpowiedzi układu, czyli wartość oczekiwaną oraz funkcję kowariancyjną.

5.3.2. Związki korelacyjne procesu turbulencji wiatru

Aby w pełni opisać siły aerodynamiczne działające na podwieszony rurociąg, potrzebne jest określenie wzajemnych korelacji między procesami $u_j(t)$ tworzącymi wektorowy proces stochastyczny $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, który opisuje w sposób dyskretny poziomą składową losowej fluktuacji prędkości wiatru $u(x,t)$, zależnej od czasu t i zmiennej przestrzennej x mierzonej wzdłuż rozpiętości mostu. Potrzebne są też wzajemne korelacje procesów $w_j(t)$ tworzących wektorowy proces $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), \dots, w_n(t)]^T$ opisujący pionową składową turbulencji. Dla przejrzystości zapisu, w dalszej części przedstawiono tylko związki korelacyjne procesów $u_j(t)$, ponieważ w przypadku procesów składowych $w_j(t)$ obowiązują analogiczne zależności.

Przyjęcie założenia o stacjonarności procesów $u_j(t)$ powoduje, że potrzebne do analizy zagadnienia w dziedzinie czasu funkcje wzajemnych kowariancji $C_{u_j u_k}(t_1, t_2)$ i korelacji $K_{u_j u_k}(t_1, t_2)$ nie zależą od chwil czasowych t_1 i t_2 , ale od ich różnicy $\tau = t_2 - t_1$, wtedy $C_{u_j u_k}(t_1, t_2) = C_{u_j u_k}(\tau)$ oraz $K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = K_{u_j u_k}(\tau)$ [131]. Funkcje wzajemnych kowariancji $C_{u_j u_k}(\tau)$ można wyznaczyć na podstawie wzajemnych gęstości widmowych $S_{u_j u_k}(\omega)$ (ang. *cross-spectral densities*), ponieważ tworzą one parę transformat Fouriera [58], [131]:

$$\begin{aligned} C_{u_j u_k}(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} S_{u_j u_k}(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \\ S_{u_j u_k}(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_{u_j u_k}(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \end{aligned} \quad (5.10)$$

przy czym powyższe wzory dotyczą widm dwustronnych, gdzie $-\infty < \omega < +\infty$. W inżynierii wiatrowej korzysta się z widma jednostronnego [55], [58], [118], tzn. zdefiniowanego w zakresie częstości $0 < \omega < +\infty$ (np. przy obliczaniu spektrum wiatru ze wzorów empirycznych (5.2), (5.3)). Ponadto, w rozważanym tu przypadku procesów o zerowej wartości oczekiwanej kowariancje wzajemne są równe wzajemnym korelacjom, tzn. $C_{u_j u_k}(\tau) = K_{u_j u_k}(\tau)$. Uwzględniając powyższe uwagi, funkcję wzajemnych korelacji można zapisać wzorem [55]

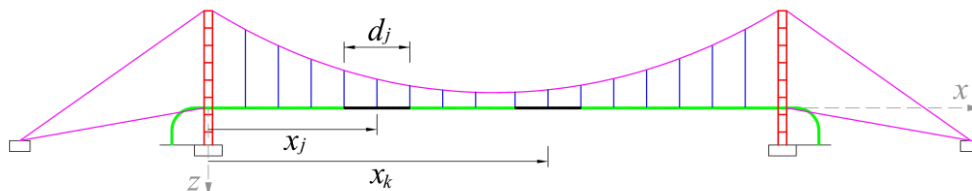
$$K_{u_j u_k}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{u_j u_k}(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (5.11)$$

Po podstawieniu $k = j$, wzór (5.11) określa autokorelacje procesów składowych $K_{u_j u_j}(\tau) = K_u(\tau)$, które są jednakowe dla wszystkich procesów $u_j(t)$, co wynika z przyjętego na wstępie założenia, że są to procesy tego samego typu i o takich samych charakterystykach, czyli mają jednakowe gęstości spektralne $S_{u_1 u_1}(\omega) = \dots = S_{u_j u_j}(\omega) = S_{u_n u_n}(\omega) = S_u(\omega)$. Gęstość widmową $S_u(\omega)$ przyjmuje się na podstawie danego spektrum wiatru, na przykład określonego funkcją (5.2).

Dyskretyzacja ciągłej funkcji losowej $u(x,t)$ względem zmiennej przestrzennej x pozwala uwzględnić korelację tej funkcji w przestrzeni poprzez wprowadzenie funkcji koherencji $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega)$ procesów składowych $u_j(t)$, zależnej od odległości między procesami δ_{jk} . W tym celu, podobnie jak w pracy [19] zdefiniowano wzajemne gęstości widmowe wzorem

$$S_{u_j u_k}(\omega) = \sqrt{S_{u_j u_j}(\omega) S_{u_k u_k}(\omega)} \text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = S_u(\omega) \text{coh}(\delta_{jk}, \omega), \quad (5.12)$$

gdzie funkcja koherencji $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega)$ zanika wraz z odległością $\delta_{jk} = |x_j - x_k|$ między punktami o współrzędnych x_j i x_k , określającymi położenie środka sekcji „j” oraz „k”, zgodnie z przyjętą dyskretyzacją pola wiatru wzdłuż rozpiętości mostu i podziałem zawieszzonego rurociągu na sekcje (rys. 5.2). Po podstawieniu zależności (5.12) do (5.11) otrzymuje się wzór na korelację wzajemną procesów składowych $u_j(t)$ i $u_k(t)$, który uwzględnia fakt zanikania korelacji między fluktuacjami prędkości wiatru obserwowanymi w dwóch różnych punktach dźwigara, wraz z odległością między tymi punktami.



Rys. 5.2. Podział rurociągu na sekcje

Funkcję koherencji wyznacza się zwykle w sposób przybliżony, korzystając na przykład z modelu Davenporta

$$\text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = \exp\left(-\frac{\lambda\omega\delta_{jk}}{2\pi U}\right), \quad (5.13)$$

gdzie λ jest bezwymiarowym współczynnikiem ustalonym doświadczalnie. Zależy on od średniej prędkości wiatru, rodzaju terenu i wysokości nad terenem. Im wyżej nad terenem, tym mniejsze są wartości współczynnika λ . Porównanie wartości współczynnika λ według różnych źródeł literaturowych można znaleźć w monografii Flagi [58]. Przykładowo, Żurański [152] podaje, że wartości współczynnika λ wahają się w granicach od 6 do 8. Ze wzoru (5.13) wynika, że przestrzenna funkcja korelacji wzajemnej turbulencji wiatru (5.11), która informuje o korelacji między dwoma procesami wyznaczonymi w dwóch punktach, ale z wydarzeń w tym samym czasie, maleje eksponencjalnie, gdy rośnie odległość między sekcjami $\delta_{jk} = |x_j - x_k|$.

Należy tu zauważyć, że w przypadku, gdy $j = k$ otrzymuje się $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = 1$. Wówczas wzór (5.11) opisuje funkcję korelacji własnej (autokorelację) $K_{u_j, u_j}(\tau) = K_u(\tau)$, która przedstawia korelację czasową procesu składowego $u_j(t)$, czyli korelację turbulencji wiatru w tym samym punkcie przestrzeni, ale z wydarzeń odsuniętych od siebie o czas τ . Przyjmując $\tau = 0$ otrzymuje się wzór wiążący gęstość widmową i wariancję fluktuacji prędkości wiatru

$$K_u(0) = \sigma_u^2 = \int_0^{\infty} S_u(\omega) d\omega, \quad (5.14)$$

przy czym jest on prawdziwy tylko w przypadku, gdy funkcja korelacyjna jest tożsama z kowariancyjną (gdy proces ma zerową wartość średnią). Warto w tym miejscu wspomnieć o różnym nazewnictwie stosowanym w literaturze, bowiem w literaturze anglojęzycznej (na przykład [55], [118]) autokorelację nazywa się unormowaną funkcją autokorelacyjną $k_u(\tau) = K_u(\tau) / \sigma_u^2$.

5.3.3. Obciążenie aerodynamiczne działające na podwieszony rurociąg

Analizując obciążenia aerodynamiczne we wzorach (5.9) założono, że w dalszych rozważaniach konsekwentnie pominięte zostanie obciążenie momentowe, ze względu na wcześniejsze ustalenia wprowadzone na etapie formułowania równania ruchu rurociągu (por. podpunkt 3.3.2), gdzie nie uwzględniono drgań skrętnych jako mało znaczących w rozważanym modelu wiszącego mostu rurociągowego. Ponadto, gdyby przyjąć, że most

przenosi tylko jeden rurociąg, który jest idealnie gładkim walcem kołowym to, na podstawie ogólnie znanego w literaturze problemu przepływu wokół walca kołowego, współczynnik oporu aerodynamicznego $C_D = 1,2$ niezależnie od kierunku działania wiatru (przy założeniu przepływu ustalonego w podkrytycznym zakresie liczby Reynoldsa), zatem także $C'_D = 0$. Ponadto, $C_L = 0$ oraz $C'_L = 0$ ze względu na symetrię przekroju. W dalszych rozważaniach przyjęto jednak, że ze względu na osprzęt, na przykład pomosty robocze lub elementy podwieszenia, współczynniki te w ogólnym przypadku nie są zerowe.

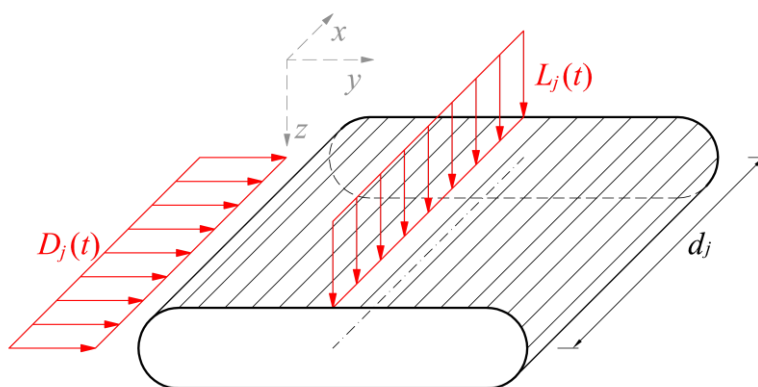
Na podstawie zależności (5.9) i biorąc pod uwagę założenie o pominięciu momentu aerodynamicznego oraz przyjęty w pracy model pola wiatru, obciążenia aerodynamiczne rozłożone równomiernie wzdłuż każdej wydzielonej sekcji podwieszonego rurociągu można zapisać następującymi formułami:

$$\begin{aligned} D_j(t) &= \rho B C_D f_j^u(t) + \rho B (C'_D - C_L) f_j^w(t) = D^u f_j^u(t) + D^w f_j^w(t), \\ L_j(t) &= -\rho B C_L f_j^u(t) - \rho B (C'_L + C_D) f_j^w(t) = L^u f_j^u(t) + L^w f_j^w(t), \end{aligned} \quad (5.15)$$

gdzie

$$f_j^u(t) = 1/2 U^2 + U u_j(t), \quad f_j^w(t) = 1/2 U w_j(t), \quad (5.16)$$

oraz $D^u = \rho B C_D$, $D^w = \rho B (C'_D - C_L)$, $L^u = -\rho B C_L$, $L^w = -\rho B (C'_L + C_D)$, $j = 1 \dots n$.



Rys. 5.3. Obciążenia aerodynamiczne działające na sekcję podwieszonego rurociągu

Obciążenia aerodynamiczne (5.15) stanowią odpowiednio poziomą i pionową składową czynnego obciążenia rurociągu $\Delta \hat{p}_b(x_b, t)$, które jest podstawą obliczenia wektora uogólnionych sił wzbudzających $\hat{\mathbf{F}}_b$, występującego w równaniu ruchu (3.53). W celu sformułowania algorytmu analizy korelacyjnej losowych drgań spowodowanych obciążeniem

aerodynamicznym (5.15), przyjęto, że wektor wzbudzenia $\hat{\mathbf{F}}_b$ jest sumą wektorów $(\hat{\mathbf{F}}_b)_j$ opisujących wymuszenia składowe rozumiane jako obciążenie siłami aerodynamicznymi tylko jednej wydzielonej sekcji dźwigara. Korzystając z oznaczeń wprowadzonych w podpunkcie 3.3.2 oraz wzorów (3.45) i (3.46) otrzymuje się zatem

$$\hat{\mathbf{F}}_b = \sum_{j=1}^n (\hat{\mathbf{F}}_b)_j, \quad (\hat{\mathbf{F}}_b)_j = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{F}}_b^w)_j \\ (\hat{\mathbf{F}}_b^v)_j \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

gdzie

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{F}}_b^w)_j &= \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T (\hat{\mathbf{F}}_{be}^w)_j, \\ (\hat{\mathbf{F}}_b^v)_j &= \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T (\hat{\mathbf{F}}_{be}^v)_j. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Należy mieć na uwadze, że wektory sił wzbudzających elementów skończonych belki są niezerowe tylko w przypadku, gdy dotyczą elementów położonych w obrębie wydzielonej sekcji o numerze „ j ” i mają wtedy następującą postać:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{F}}_{be}^w)_j &= \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w (\Delta \hat{p}_{bez})_j dx = \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w L_j(t) dx = L_j(t) \mathbf{L}_{ej}, \\ (\hat{\mathbf{F}}_{be}^v)_j &= \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^v (\Delta \hat{p}_{bey})_j dx = \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^v D_j(t) dx = D_j(t) \mathbf{D}_{ej}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ej} &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy el. } e \text{ nie należy do sekcji } j \\ \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^w dx = \left[\frac{l_{be}}{2}, -\frac{l_{be}}{12}, \frac{l_{be}}{2}, \frac{l_{be}}{12} \right]^T & \text{gdy el. } e \text{ należy do sekcji } j \end{cases} \\ \mathbf{D}_{ej} &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy el. } e \text{ nie należy do sekcji } j \\ \int_0^{l_{be}} \mathbf{N}_{be}^v dx = \left[\frac{l_{be}}{2}, \frac{l_{be}}{12}, \frac{l_{be}}{2}, -\frac{l_{be}}{12} \right]^T & \text{gdy el. } e \text{ należy do sekcji } j \end{cases} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Po podstawieniu (5.15) do formuł (5.19), wzory (5.18) przyjmują postaci:

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{F}}_b^w)_j &= f_j^u(t)L^u \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{L}_{ej} + f_j^w(t)L^w \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{L}_{ej}, \\
(\hat{\mathbf{F}}_b^v)_j &= f_j^u(t)D^u \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \mathbf{D}_{ej} + f_j^w(t)D^w \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \mathbf{D}_{ej},
\end{aligned} \tag{5.21}$$

a wówczas wektor sił wzbudzających (5.17) będący sumą wektorów, które opisują wymuszenia składowe, można zapisać w ogólnej formie

$$\hat{\mathbf{F}}_b = \sum_{j=1}^n (\hat{\mathbf{F}}_b)_j = f_j^u(t)\hat{\mathbf{F}}_{bj}^u + f_j^w(t)\hat{\mathbf{F}}_{bj}^w, \tag{5.22}$$

która ułatwi dalsze rozważania, bowiem w tym zapisie funkcje losowe (5.16) są jasno wyodrębnione. Porównując ze sobą wzory (5.17), (5.21) oraz (5.22) łatwo jest zauważyć, że

$$\hat{\mathbf{F}}_{bj}^u = \begin{bmatrix} L^u \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{L}_{ej} \\ D^u \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \mathbf{D}_{ej} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}}_{bj}^w = \begin{bmatrix} L^w \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^w)^T \mathbf{L}_{ej} \\ D^w \sum_{e=1}^{n_b} (\mathbf{A}_{be}^v)^T \mathbf{D}_{ej} \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

Należy tu zwrócić uwagę, że indeksy górne „ u ” i „ w ” we wzorze (5.22) odnoszą się konsekwentnie do składowych $u_j(t)$ i $w_j(t)$ turbulencji wiatru, podczas gdy w (5.23) występuje pewien trudny do uniknięcia brak konsekwencji oznaczeń, ponieważ indeksy górne „ w ” i „ v ” w macierzach transformacji \mathbf{A}_{be}^w i \mathbf{A}_{be}^v są oznaczeniem pionowych i poziomych przemieszczeń rurociągu, stosowanym też we wzorach (5.17)-(5.21) w przypadku wektorów $(\hat{\mathbf{F}}_b^w)_j$ i $(\hat{\mathbf{F}}_b^v)_j$ oraz \mathbf{N}_{be}^w i \mathbf{N}_{be}^v .

5.3.4. Równanie ruchu mostu rurociągowego i jego rozwiązanie

Równanie ruchu mostu rurociągowego obciążonego losową turbulencją wiatru zostanie sformułowane z uwzględnieniem przepływu cieczy przez rurociąg, przy założeniu, że model obliczeniowy mostu jest liniowy i rurociąg jest całkowicie wypełniony przepływającą cieczą. Wyprowadzone w punkcie 4.2, nieliniowe równanie ruchu wiszącego mostu rurociągowego obciążonego ciągłą ruchomą masą ma postać (4.8). Po pominięciu nieliniowego składnika macierzy sztywności \mathbf{K}^{nl} wynikającego z dużych przemieszczeń cięgien i rurociągu, uzupełnieniu wektora prawej strony równania o wektor wzbudzania turbulencją wiatru $\mathbf{F}(t)$ oraz uwzględnieniu, że zarówno macierze układu jak i wektor wzbudzania związane z przepływem masy cieczy są w tym przypadku niezależne od czasu (tj.

$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}(t) = \tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{K}}(t) = \tilde{\mathbf{K}}$ i $\tilde{\mathbf{F}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}$, por. punkt 4.2), liniowe równanie ruchu mostu przyjmuje postać

$$(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}} + \mathbf{F}(t). \quad (5.24)$$

Z relacji (5.22) i procedury agregacji podstruktur opisanej w punkcie 3.4 wynika, że po agregacji równań ruchu podstruktur wektor wzbudzenia drgań turbulencją wiatru jest sumą wektorów wynikających z obciążeń poszczególnych sekcji mostu, zatem

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^u f_j^u(t) + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^w f_j^w(t). \quad (5.25)$$

W powyższym wzorze wektor wzbudzenia odpowiadający jednemu segmentowi obciążenia aerodynamicznego ma postać sumy iloczynów funkcji losowych $f_j^u(t)$, $f_j^w(t)$ i wektorów liczbowych \mathbf{F}_j^u , \mathbf{F}_j^w wynikających z obciążeń segmentowych (5.23) oraz procedury techniki podstruktur.

Pominięcie nieliniowego składnika macierzy sztywności układu \mathbf{K}^{nl} w równaniu (5.24), równoznaczne z przyjęciem założenia, że model obliczeniowy mostu jest liniowy, daje możliwość rozwiązania tego równania z wykorzystaniem zasady superpozycji. Wówczas, wynikającą z rozwiązania łączną odpowiedź rozważanej konstrukcji można wyznaczyć jako sumę dwóch niezależnych rozwiązań: odpowiedzi układu wymuszonej ruchem cieczy i wzbudzonej oddziaływaniem turbulentnego wiatru.

W dalszych rozważaniach przyjęto, że podwieszony rurociąg poddany obciążeniu wiatrem jest całkowicie wypełniony ruchomą masą cieczy i znajduje się w stanie ustalonym drgań, co oznacza, że nieustalone drgania mostu występujące po napływie cieczy wygasły (por. rysunek 4.9). Jak wynika z analiz przedstawionych w rozdziale 4, rozwiązanie ustalone równania $(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}$, niezależne od warunków początkowych w chwili napływu cieczy, sprowadza się do niezerowego i niezależnego od czasu wektora przemieszczeń uogólnionych \mathbf{q} , który przekłada się na określony rozkład pionowych przemieszczeń rurociągu. Przemieszczenia poziome rurociągu są zerowe z uwagi na symetrię mostu względem płaszczyzny pionowej XZ.

Wobec powyższego, rozważany problem sprowadza się do rozwiązania równania ruchu o postaci $(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} = \mathbf{F}(t)$, z zerowymi warunkami

początkowymi, gdzie wektor $\mathbf{F}(t)$ jest określony wzorem (5.25). Na podstawie tego rozwiązania można wyznaczyć dowolną odpowiedź mostu (przemieszczenie lub siłę wewnętrzną w wybranym punkcie konstrukcji), która nakłada się na wartość ustalonej odpowiedzi wynikającej z przepływu cieczy. Ograniczenie rozważań do drgań liniowych pozwala także w tym przypadku na określenie odpowiedzi mostu jako sumy odpowiedzi na wymuszenia składowe, rozumiane jako obciążenie siłami aerodynamicznymi jednej sekcji dźwigara. Dowolna odpowiedź mostu $R(t)$ może być wtedy przedstawiona w postaci sumy funkcji losowych $R_j(t)$ opisujących odpowiedź mostu na działanie losowych obciążeń poszczególnych sekcji mostu, które tworzą łącznie wektor wzbudzenia (5.25), zatem $R(t) = R_1(t) + \dots + R_n(t)$. Należy zauważyć, że każda z odpowiedzi składowych jest z kolei sumą odpowiedzi na wymuszenie wzdłużną turbulencją wiatru $u_j(t)$ (w kierunku prędkości średniej) i turbulencją $w_j(t)$ w kierunku poprzecznym, czyli $R_j(t) = R_j^u(t) + R_j^w(t)$. Odpowiedzi składowe $R_j^u(t)$ i $R_j^w(t)$ wyznacza się niezależnie, rozwiązując kolejno następujące równania ruchu mostu rurociągowego:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} &= \mathbf{F}_j^u f_j^u(t), \\ (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} &= \mathbf{F}_j^w f_j^w(t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Mając na uwadze, że losowe funkcje $f_j^u(t)$, $f_j^w(t)$ są całkowalnymi funkcjami czasu, podzielono je myślowo na różniczkowe impulsy $f_j^u(\tau)d\tau$, $f_j^w(\tau)d\tau$ [82]. Wtedy każda odpowiedź składowa $R_j(t)$ może być obliczona poprzez sumowanie po czasie rozwiązań odpowiadających poszczególnym impulsom za pomocą następujących całek splotowych:

$$\begin{aligned} R_j^u(t) &= \int_0^t H_{R_j}^u(t-\tau) f_j^u(\tau) d\tau, \\ R_j^w(t) &= \int_0^t H_{R_j}^w(t-\tau) f_j^w(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdzie funkcje $H_{R_j}^u(t-\tau)$ oraz $H_{R_j}^w(t-\tau)$ oznaczają odpowiedzi konstrukcji $R_j^u(t)$ oraz $R_j^w(t)$ na impulsy jednostkowe działające w chwili τ . Są to funkcje analogiczne do impulsowej funkcji przejścia, którą stosuje się w teorii układów o jednym dynamicznym stopniu swobody. Funkcje przejścia $H_{R_j}^u(t-\tau)$ oraz $H_{R_j}^w(t-\tau)$ wyznacza się numerycznie na podstawie rozwiązania równań ruchu:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} &= \mathbf{F}_j^u \delta(t - \tau), \\
(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} &= \mathbf{F}_j^w \delta(t - \tau),
\end{aligned}
\tag{5.28}$$

przyjmując zerowe warunki początkowe, przy czym $\delta(t - \tau)$ oznacza funkcję delta Diraca.

Podstawiając funkcje losowe (5.16) do rozwiązań (5.27) oraz rozdzielając każdą z losowych odpowiedzi układu $R_j^u(t)$ i $R_j^w(t)$ na dwa składniki, tj. wartość oczekiwaną ($\bar{\quad}$) i losową fluktuację ($\hat{\quad}$), otrzymano:

$$\begin{aligned}
R_j^u(t) &= \frac{1}{2} U^2 \int_0^t H_{R_j^u}^u(t - \tau) d\tau + U \int_0^t u_j(\tau) H_{R_j^u}^u(t - \tau) d\tau = \bar{R}_j^u(t) + \hat{R}_j^u(t), \\
R_j^w(t) &= \frac{1}{2} U \int_0^t w_j(\tau) H_{R_j^w}^w(t - \tau) d\tau = \hat{R}_j^w(t).
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

Wtedy całkowita odpowiedź mostu będąca sumą wszystkich odpowiedzi składowych ma postać

$$R(t) = \sum_{j=1}^n \bar{R}_j^u(t) + \sum_{j=1}^n \hat{R}_j^u(t) + \sum_{j=1}^n \hat{R}_j^w(t).
\tag{5.30}$$

5.3.5. Charakterystyki probabilistyczne odpowiedzi mostu

Przedstawiony w niniejszym podpunkcie pracy algorytm analizy korelacyjnej losowych drgań mostu został opisany w pracach współautorskich [16], [17]. We wspomnianych artykułach zaproponowano niestacjonarny model wiatru charakteryzujący się wprowadzeniem dodatkowego, zmiennego w czasie składnika średniej prędkości wiatru, który daje możliwość analizy efektów wzmocnienia rezonansowego. Składnik ten, opisany funkcją harmoniczną o częstotliwości zbliżonej do częstotliwości własnej drgań mostu jest rozumiany jako wiodąca pulsacja wiatru, która występuje w momencie wystąpienia drgań rezonansowych. Na zmienną w czasie prędkość średnią wiatru nakłada się losowa fluktuacja prędkości o dwóch składowych – wzdłużnej i poprzecznej do kierunku prędkości średniej. Pomimo, iż w niniejszej pracy założono klasyczny stacjonarny model wiatru, to schemat funkcjonowania algorytmu jest analogiczny.

Jak już wcześniej wspomniano, poszukiwana odpowiedź mostu $R(t)$ jest procesem stochastycznym, ponieważ obciążenie aerodynamiczne mostu jest losowe. Analizę probabilistyczną odpowiedzi mostu na to obciążenie ograniczono do teorii korelacyjnej,

wyznaczając dwa pierwsze momenty odpowiedzi układu, czyli wartość oczekiwaną oraz funkcję kowariancyjną.

Zgodnie ze wcześniejszymi założeniami, obie rozważane składowe turbulencji są stacjonarnymi losowymi funkcjami czasu typu Gaussa o zerowej wartości oczekiwanej, zatem $E[u_j(t)] = 0$ oraz $E[w_j(t)] = 0$. Wówczas ze wzorów (5.29) wynika, iż $E[\widehat{R}_j^u(t)] = 0$ i $E[\widehat{R}_j^w(t)] = 0$, oraz wartość oczekiwana odpowiedzi mostu (5.30) wynosi

$$E[R(t)] = \sum_{j=1}^n \bar{R}_j^u(t) = \frac{1}{2} U^2 \sum_{j=1}^n \int_0^t H_{R_j}^u(t-\tau) d\tau. \quad (5.31)$$

Mając na uwadze wzory (5.29) i przyjęte założenie, że rozważane dwie składowe turbulencji wiatru są wzajemnie niezależne, funkcja kowariancji odpowiedzi mostu

$$C_{RR}(t_1, t_2) = E[R(t_1) \cdot R(t_2)] - E[R(t_1)] \cdot E[R(t_2)], \quad (5.32)$$

po wykonaniu stosownych obliczeń ma postać

$$\begin{aligned} C_{RR}(t_1, t_2) &= E \left[\sum_{j=1}^n \widehat{R}_j^u(t_1) \cdot \sum_{k=1}^n \widehat{R}_k^u(t_2) \right] + E \left[\sum_{j=1}^n \widehat{R}_j^w(t_1) \cdot \sum_{k=1}^n \widehat{R}_k^w(t_2) \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{\widehat{R}_j^u \widehat{R}_k^u}(t_1, t_2) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{\widehat{R}_j^w \widehat{R}_k^w}(t_1, t_2), \end{aligned} \quad (5.33)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_{\widehat{R}_j^u \widehat{R}_k^u}(t_1, t_2) &= U^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} H_{R_j}^u(t_1 - \tau_1) K_{u_j u_k}(\tau_1, \tau_2) H_{R_k}^u(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \\ K_{\widehat{R}_j^w \widehat{R}_k^w}(t_1, t_2) &= \frac{1}{4} U^2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} H_{R_j}^w(t_1 - \tau_1) K_{w_j w_k}(\tau_1, \tau_2) H_{R_k}^w(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Korelacje wzajemne $K_{\widehat{R}_j^u \widehat{R}_k^u}(t_1, t_2)$ i $K_{\widehat{R}_j^w \widehat{R}_k^w}(t_1, t_2)$ składowych odpowiedzi mostu tworzą macierze korelacyjne wektorowych procesów stochastycznych $\widehat{\mathbf{R}}^u(t)$ i $\widehat{\mathbf{R}}^w(t)$ składających się z n procesów składowych $\widehat{R}_j^u(t)$ oraz $\widehat{R}_j^w(t)$. Jak wynika ze wzoru (5.34), wynikają one ze wzajemnych korelacji $K_{u_j u_k}(\tau_1, \tau_2)$ i $K_{w_j w_k}(\tau_1, \tau_2)$ składowych procesów turbulencji, które są tu stacjonarnymi procesami normalnymi, zatem $K_{u_j u_k}(\tau_1, \tau_2) = K_{u_j u_k}(\tau_2 - \tau_1)$ oraz

$K_{w_j w_k}(\tau_1, \tau_2) = K_{w_j w_k}(\tau_2 - \tau_1)$ (por. wzór (5.11)). Całki splotowe występujące w formułach (5.34) mogą być wyznaczone tylko numerycznie, ponieważ funkcje przejścia $H_{Rj}^u(t - \tau)$ oraz $H_{Rj}^w(t - \tau)$ nie mają postaci analitycznej (ich przebiegi są wyznaczane w dyskretnym zbiorze punktów czasowych, który wynika z numerycznego całkowania równań ruchu konstrukcji).

Wariancja odpowiedzi mostu $\sigma_R^2(t) = C_{RR}(t, t)$ wynika bezpośrednio z funkcji kowariancji (5.33) zapisanej dla $t_1 = t_2 = t$. Podstawiając zależności (5.34) do (5.33) oraz uwzględniając, że $t_1 = t_2 = t$ otrzymano

$$\begin{aligned} \sigma_R^2(t) = & U^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^t H_{Rj}^u(t - \tau_1) K_{u_j u_k}(\tau_2 - \tau_1) H_{Rk}^u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \frac{1}{4} U^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^t H_{Rj}^w(t - \tau_1) K_{w_j w_k}(\tau_2 - \tau_1) H_{Rk}^w(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Obliczenie wariancji na podstawie powyższego wzoru wymaga dużej mocy obliczeniowej i jest bardzo czasochłonne ze względu na konieczność numerycznego wyznaczania wartości wielu całek podwójnych. W celu szybkiego oszacowania wariancji rozpatrzono dwa hipotetyczne warianty rozwiązania, w których korelacje wzajemne $K_{u_j u_k}(\tau_2 - \tau_1)$ i $K_{w_j w_k}(\tau_2 - \tau_1)$ składowych procesów turbulencji nie wynikają z założonego spektrum wiatru, jak to opisuje wzór (5.11), lecz są aproksymowane poprzez dwie przeciwstawne idealizacje matematyczne: korelację stałą i korelację typu „biały szum”.

W pierwszym wariancie przyjęto, że każdy z procesów składowych $u_j(t)$ n -wymiarowego wektorowego procesu stochastycznego $\mathbf{u}(t)$ opisującego wzdłużną turbulencję wiatru jest stacjonarnym procesem normalnym o autokorelacji stałej $K_{u_j u_j}(\tau) = \sigma_u^2$, jednakowej dla wszystkich procesów składowych, przy czym wprowadzono oznaczenie $\tau = \tau_2 - \tau_1$. Podobnie, dla każdego procesu $w_j(t)$ tworzącego wektor $\mathbf{w}(t)$, odnoszący się do turbulencji poprzecznej, przyjęto stałą autokorelację $K_{w_j w_j}(\tau) = \sigma_w^2$. Jako stałe wartości funkcji autokorelacyjnych przyjęto wariancje procesów σ_u^2 oraz σ_w^2 , które oblicza się według wzoru (5.14), odpowiednio na podstawie założonego spektrum wiatru $S_u(\omega)$ oraz $S_w(\omega)$. Korelacje wzajemne procesów składowych, obliczone z uwzględnieniem funkcji koherencji (por. wzór (5.12)) można zapisać wówczas następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} K_{u_j u_k}(\tau) &= \alpha_{jk}^u \sigma_u^2, \\ K_{w_j w_k}(\tau) &= \alpha_{jk}^w \sigma_w^2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

gdzie $\alpha_{jk}^u = \int_0^\infty S_u(\omega) \text{coh}(\delta_{jk}, \omega) d\omega / \int_0^\infty S_u(\omega) d\omega$, $\alpha_{jk}^w = \int_0^\infty S_w(\omega) \text{coh}(\delta_{jk}, \omega) d\omega / \int_0^\infty S_w(\omega) d\omega$.

Podstawiając wzory (5.36) do zależności (5.35) otrzymano rozwiązanie

$$\sigma_R^2(t) = U^2 \sigma_u^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^u h_j^u(t) h_k^u(t) + \frac{1}{4} U^2 \sigma_w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^w h_j^w(t) h_k^w(t), \quad (5.37)$$

gdzie $h_j^u(t) = \int_0^t H_{Rj}^u(t-\tau) d\tau$ oraz $h_j^w(t) = \int_0^t H_{Rj}^w(t-\tau) d\tau$.

Drugi z wariantów zakłada, że funkcje autokorelacyjne procesów $u_j(t)$ i $w_j(t)$ mają charakter impulsowy typu biały szum: $K_{u_j u_j}(\tau) = \sigma_u^2 \delta(\tau)$ oraz $K_{w_j w_j}(\tau) = \sigma_w^2 \delta(\tau)$. Funkcje korelacji wzajemnej są wtedy określone wzorami:

$$\begin{aligned} K_{u_j u_k}(\tau) &= \alpha_{jk}^u \sigma_u^2 \delta(\tau), \\ K_{w_j w_k}(\tau) &= \alpha_{jk}^w \sigma_w^2 \delta(\tau). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Wariancja odpowiedzi mostu po podstawieniu (5.38) do (5.35) wynosi

$$\sigma_R^2(t) = U^2 \sigma_u^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^u g_{jk}^u(t) + \frac{1}{4} U^2 \sigma_w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^w g_{jk}^w(t), \quad (5.39)$$

gdzie $g_{jk}^u(t) = \int_0^t H_{Rj}^u(t-\tau) H_{Rk}^u(t-\tau) d\tau$ oraz $g_{jk}^w(t) = \int_0^t H_{Rj}^w(t-\tau) H_{Rk}^w(t-\tau) d\tau$.

Ze wzoru (5.31) wynika, że wartość oczekiwana odpowiedzi aerodynamicznej mostu $R(t)$ nie jest stała. Również po podstawieniu do wzoru (5.33) (z uwzględnieniem (5.34)) zależności $K_{u_j u_k}(t_1, t_2) = K_{u_j u_k}(t_2 - t_1)$ oraz $K_{w_j w_k}(t_1, t_2) = K_{w_j w_k}(t_2 - t_1)$ okazuje się, że kowariancja jest funkcją zmiennych t_1 oraz t_2 , a nie ich różnicy $t_2 - t_1$. Stąd wynika, że w ogólnym przypadku odpowiedź konstrukcji nie jest procesem stacjonarnym. Jest to spowodowane zakłóceniem wprowadzonym przez warunki początkowe [131]. W przypadku analizy drgań ustalonych, gdzie zaburzenie wprowadzone przez warunki początkowe nie ma już wpływu na rozwiązanie, zależności (5.29) mają postaci:

$$R_j^u(t) = \frac{1}{2}U^2 \int_{-\infty}^t H_{R_j}^u(t-\tau)d\tau + U \int_{-\infty}^t u_j(t)H_{R_j}^u(t-\tau)d\tau = \bar{R}_j^u(t) + \hat{R}_j^u(t),$$

$$R_j^w(t) = \frac{1}{2}U \int_{-\infty}^t w_j(t)H_{R_j}^w(t-\tau)d\tau = \hat{R}_j^w(t).$$
(5.40)

Wówczas, po wprowadzeniu podstawienia $\theta = t - \tau$ otrzymuje się odpowiednio wartość oczekiwaną odpowiedzi mostu

$$E[R(\infty)] = \frac{1}{2}U^2 \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} H_{R_j}(\theta)d\theta,$$
(5.41)

oraz wariancję

$$\sigma_R^2(\infty) = U^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H_{R_j}^u(\theta_1)K_{u_j, u_k}(\theta_2 - \theta_1)H_{R_k}^u(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+ \frac{1}{4}U^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H_{R_j}^w(\theta_1)K_{w_j, w_k}(\theta_2 - \theta_1)H_{R_k}^w(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2.$$
(5.42)

W tym przypadku odpowiedź konstrukcji (ustalona) jest również stacjonarnym procesem normalnym.

Wariancja odpowiedzi konstrukcji w stanie ustalonym, obliczona przy założeniu, że wzajemne korelacje składowych procesów turbulencji wiatru są aproksymowane wzorem (5.37), wynosi

$$\sigma_R^2(\infty) = U^2 \sigma_u^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^u \int_0^{\infty} H_{R_j}^u(\theta)d\theta \cdot \int_0^{\infty} H_{R_k}^u(\theta)d\theta +$$

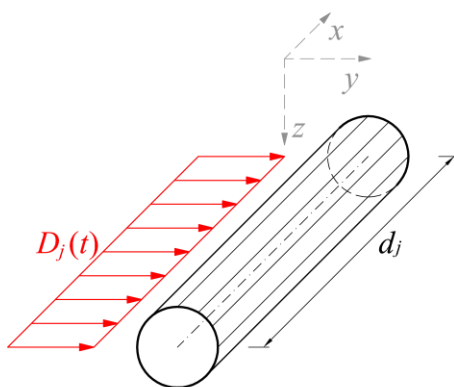
$$+ \frac{1}{4}U^2 \sigma_w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^w \int_0^{\infty} H_{R_j}^w(\theta)d\theta \cdot \int_0^{\infty} H_{R_k}^w(\theta)d\theta.$$
(5.43)

Natomiast jeśli wprowadzone jest założenie o przyjęciu funkcji autokorelacyjnej typu „biały szum”, to w stanie ustalonym wariancja (5.39) wynosi

$$\sigma_R^2(\infty) = U^2 \sigma_u^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^u \int_0^{\infty} H_{R_j}^u(\theta)H_{R_k}^u(\theta)d\theta + \frac{1}{4}U^2 \sigma_w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^w \int_0^{\infty} H_{R_j}^w(\theta)H_{R_k}^w(\theta)d\theta. \quad (5.44)$$

5.4. Analiza numeryczna odpowiedzi mostu spowodowanej jednoczesnym oddziaływaniem wzbudzenia turbulentnego oraz ruchu masy

Zaproponowana w punkcie 5.3 metoda posłuży do przeprowadzenia analiz numerycznych mających na celu wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych losowej odpowiedzi przykładowego rurociągowego mostu wiszącego, w zakresie wartości oczekiwanych oraz wariancji przemieszczeń dźwigara rurociągowego. Obliczenia zostaną wykonane na podstawie numerycznego modelu mostu przedstawionego w rozdziale 4, ale ograniczonego do teorii drgań liniowych – zgodnie z założeniami metody podanymi w podpunkcie 5.3.4.



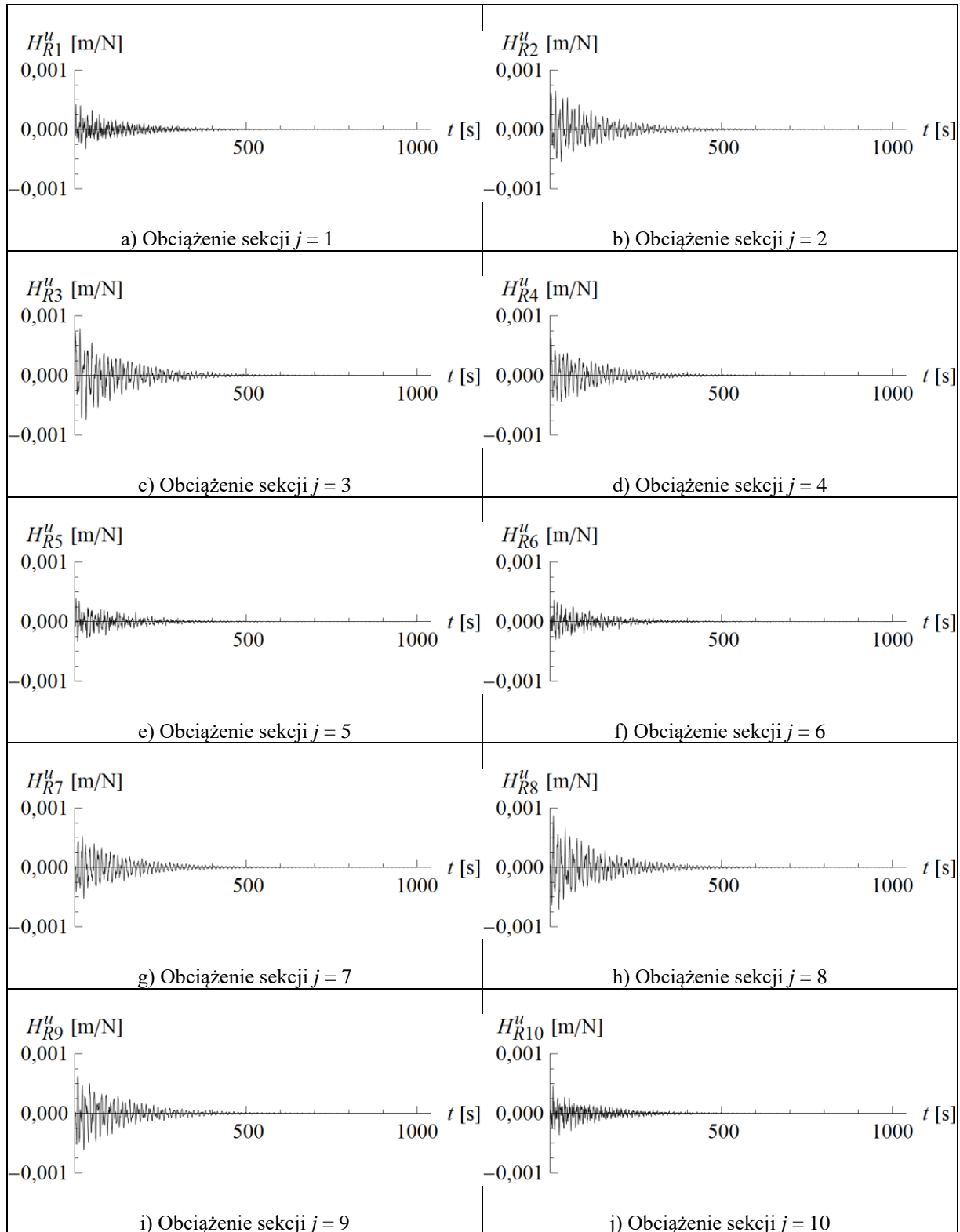
Rys. 5.4. Przyjęte do obliczeń obciążenie aerodynamiczne działające na sekcję podwieszoną rurociągu

Obciążenie dźwigara siłami aerodynamicznymi ograniczono tylko do siły bocznej (rys. 5.4), wskutek przyjęcia założenia, podobnego jak w pracy [19], że wpływ pionowej składowej turbulencji wiatru $w(x,t)$ jest pomijalnie mały oraz założenia, że rurociąg jest idealnie gładkim walcem kołowym (nie uwzględniono osprzętu rurociągu, por. podpunkt 5.3.3). Wówczas obciążenia aerodynamiczne (5.15) segmentu belki o przekroju rurowym sprowadzają się jedynie do siły poziomej

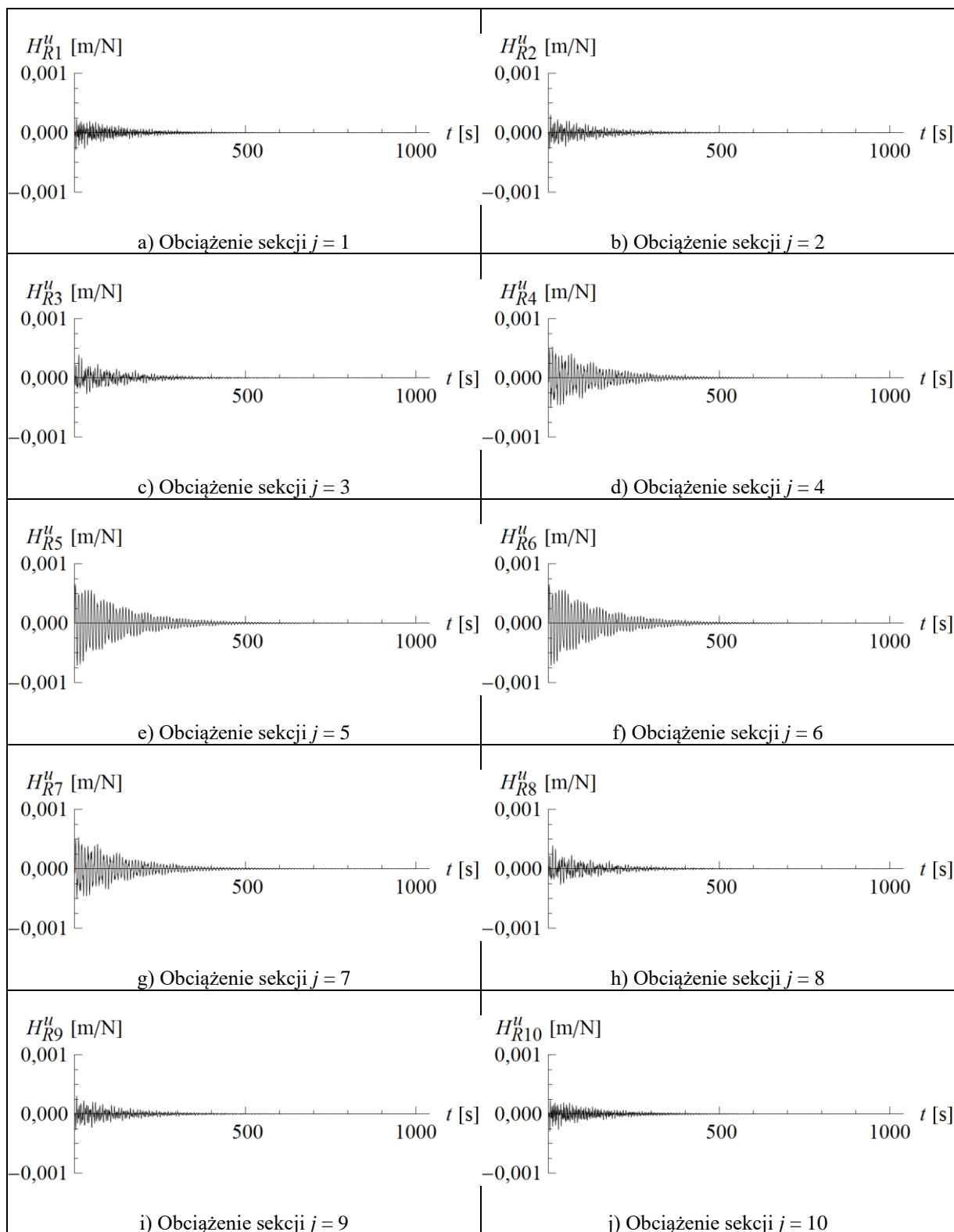
$$D_j(t) = \rho B C_D f_j''(t) D' f_j''(t). \quad (5.45)$$

Do obliczeń przyjęto, że gęstość powietrza wynosi $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ (przy założeniu temperatury 20°C), natomiast współczynnik aerodynamiczny $C_D = 1,2$. Widmo wiatru założono w postaci funkcji spektralnej Kaimala (5.2), przyjmując parametr chropowatości podłoża $z_0 = 0,03 \text{ m}$ oraz wysokość dźwigara nad poziomem terenu $z = 25 \text{ m}$. Funkcję koherencji (5.13) obliczono zakładając bezwymiarowy współczynnik $\lambda = 7$. Dźwigar mostu podzielono na $n = 10$ sekcji. Do obliczeń przyjęto liczbę tłumienia $\alpha = 0,01$, przy czym wymiarowy współczynnik

tłumienia μ potrzebny do określenia macierzy tłumienia układu $\mathbf{C} = \mu\mathbf{B}$ został określony ze względu na pierwszą poziomą formę własną rurociągu pustego, której odpowiada częstotliwość własna $f_1 = 0,131$ Hz.



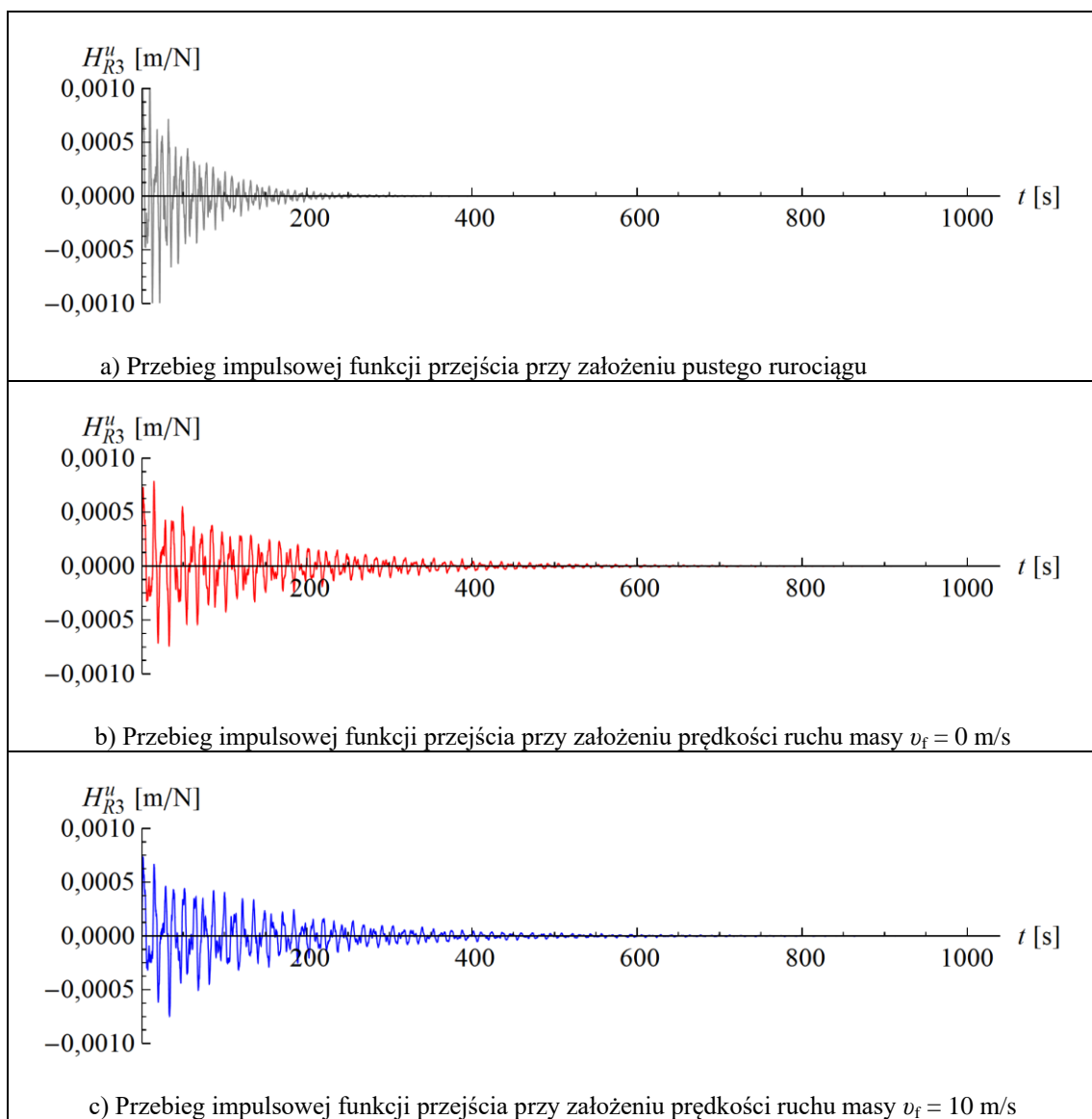
Rys. 5.5. Zestawienie przebiegów impulsowych funkcji przejścia dotyczących poziomego przemieszczenia punktu 1



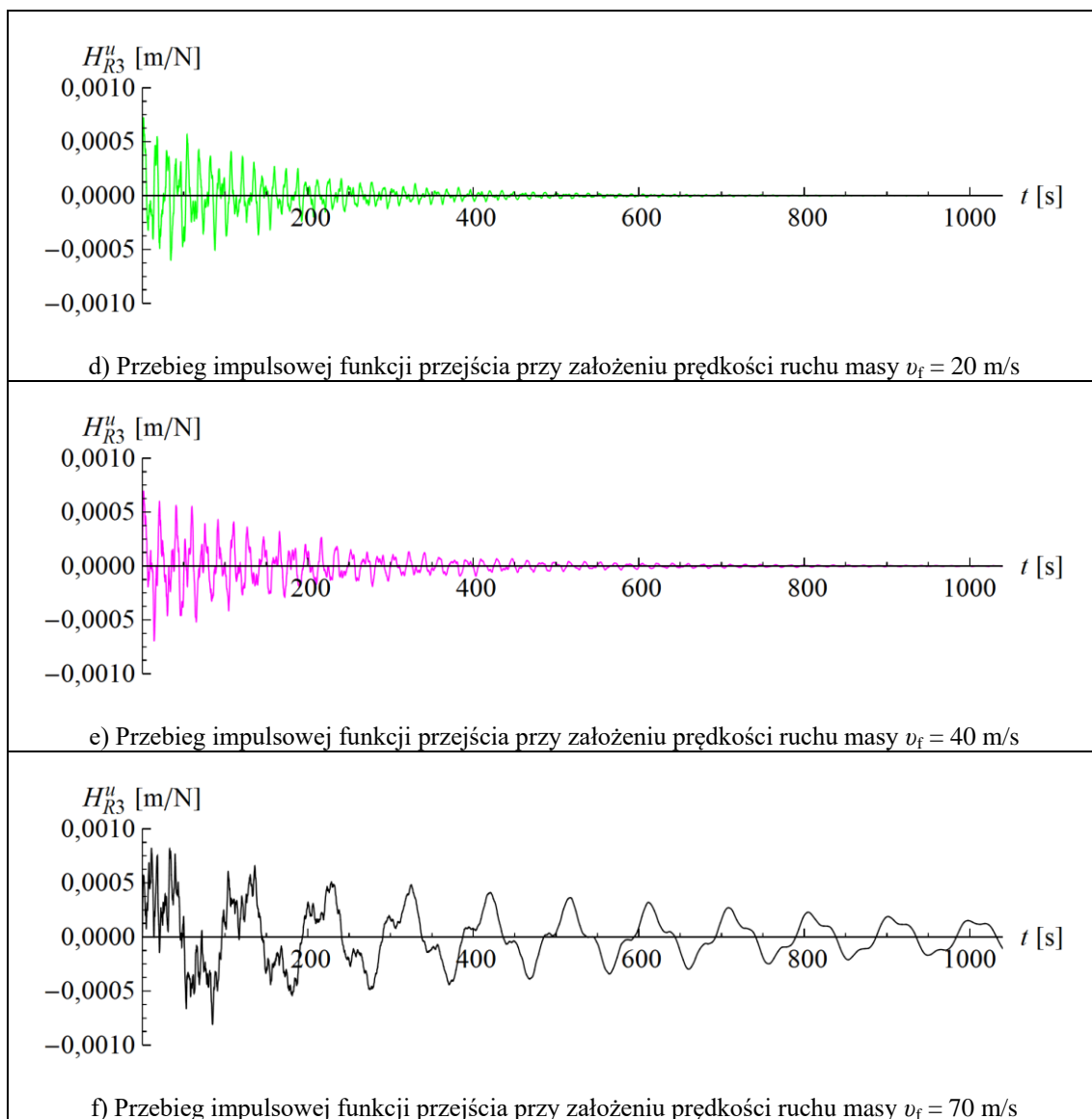
Rys. 5.6. Zestawienie przebiegów impulsowych funkcji przejścia dotyczących poziomego przemieszczenia punktu 2

Analizie poddano tylko poziome drgania dźwigara rurociągowego, biorąc pod uwagę fakt, że są to drgania dominujące w przypadku przyjętego scenariusza obciążenia rurociągu (obciążenie wyłącznie poziomymi siłami aerodynamicznymi). W pierwszej kolejności,

wyznaczono przebiegi czasowe wszystkich impulsowych funkcji przejścia $H_{Rj}^u(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, gdzie $n = 10$. Funkcje te są podstawą obliczenia odpowiedzi konstrukcji, co wynika ze wzorów (5.27) – (5.30). Na rysunkach 5.5 i 5.6 przedstawiono przebiegi impulsowych funkcji przejścia wynikających z obciążenia kolejnych sekcji rurociągu (10 sekcji), wygenerowane przy założeniu, że masa cieczy wypełniająca rurociąg jest nieruchoma ($v_f = 0$ m/s). Pokazane na rysunkach funkcje dotyczą poziomego przemieszczenia rurociągu, odpowiednio w punkcie 1 – rysunek 5.5 i w punkcie 2 – rysunek 5.6. Położenie punktów 1 i 2 zaznaczono na rysunku 4.4 – punkt 1 jest zlokalizowany w $\frac{1}{4}$ rozpiętości dźwigara rurociągowego, a punkt 2 w $\frac{1}{2}$ rozpiętości.



Rys. 5.7. Zestawienie przebiegów impulsowej funkcji przejścia dotyczącej poziomego przemieszczenia punktu 1, przy obciążeniu sekcji $j = 3$

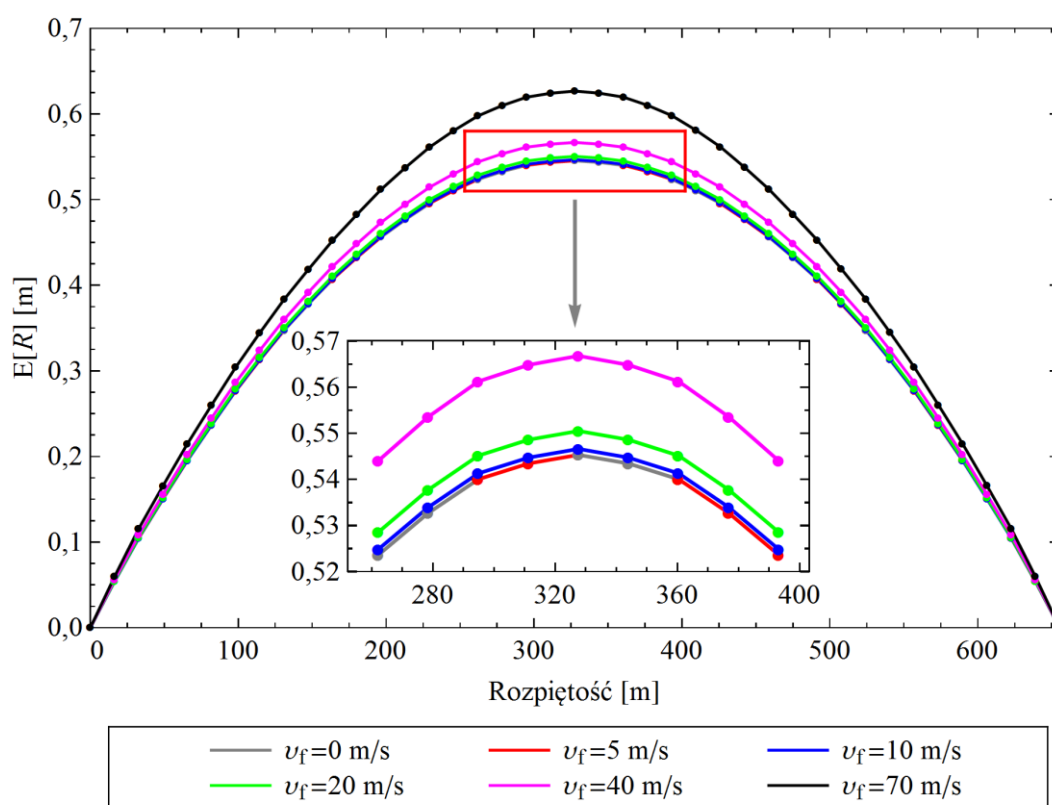


Rys. 5.7 (c.d.). Zestawienie przebiegów impulsowej funkcji przejścia dotyczącej poziomego przemieszczenia punktu 1, przy obciążeniu sekcji $j = 3$

Na rysunku 5.7 przedstawiono zestawienie przebiegów wybranej impulsowej funkcji przejścia $H''_{R3}(t)$, które wygenerowano przy różnych prędkościach masy cieczy przepływającej przez rurociąg. Jak widać, już na etapie wyznaczania funkcji przejścia ruchoma masa w rurociągu znacząco wpływa na postać tych funkcji, zatem nie można jej pominąć w analizie drgań spowodowanych turbulentnym wiatrem. Stwierdzono, że zanikanie przebiegu impulsowej funkcji przejścia w przypadku mostu, którego rurociąg jest wypełniony nieruchomą masą cieczy jest zdecydowanie wolniejsze niż w przypadku mostu z rurociągiem pustym. Wynika to z wprowadzenia do układu dodatkowej masy. Wnioski, jakie wynikają z analizy kolejnych przebiegów, wyznaczanych przy coraz większych prędkościach przepływu masy, są zbliżone z tymi sformułowanymi w rozdziale 4, gdzie analizowano

drżania rurociągu spowodowane ruchem przepływającej cieczy. Do prędkości ruchu $v_f = 40$ m/s różnice w przebiegach impulsowych funkcji przejścia są w zasadzie niezauważalne, natomiast wraz z dalszym wzrostem prędkości można zaobserwować stopniowe wydłużanie okresu oscylacji, a także dłuższy czas zanikania impulsowych funkcji przejścia w wyniku malejącej sztywności poziomej rurociągu. Po osiągnięciu prędkości większych od prędkości krytycznej $v_{fcr} = 74,18$ m/s przebieg impulsowych funkcji przejścia staje się rozbieżny.

Kolejnym krokiem badań numerycznych było obliczenie wartości oczekiwanych poziomych drgań wiszącego rurociągu, w 40 punktach rozłożonych wzdłuż całej jego rozpiętości (co 16,3825 m). Obliczenia przeprowadzono na podstawie wzoru (5.41), czyli w stanie ustalonym wymuszonych drgań konstrukcji. Na rysunku 5.8 przedstawiono wartości oczekiwane przemieszczeń wygenerowane przy różnych prędkościach ruchu masy wewnątrz rurociągu, gdy średnia prędkość wiatru wynosi $U = 20$ m/s.

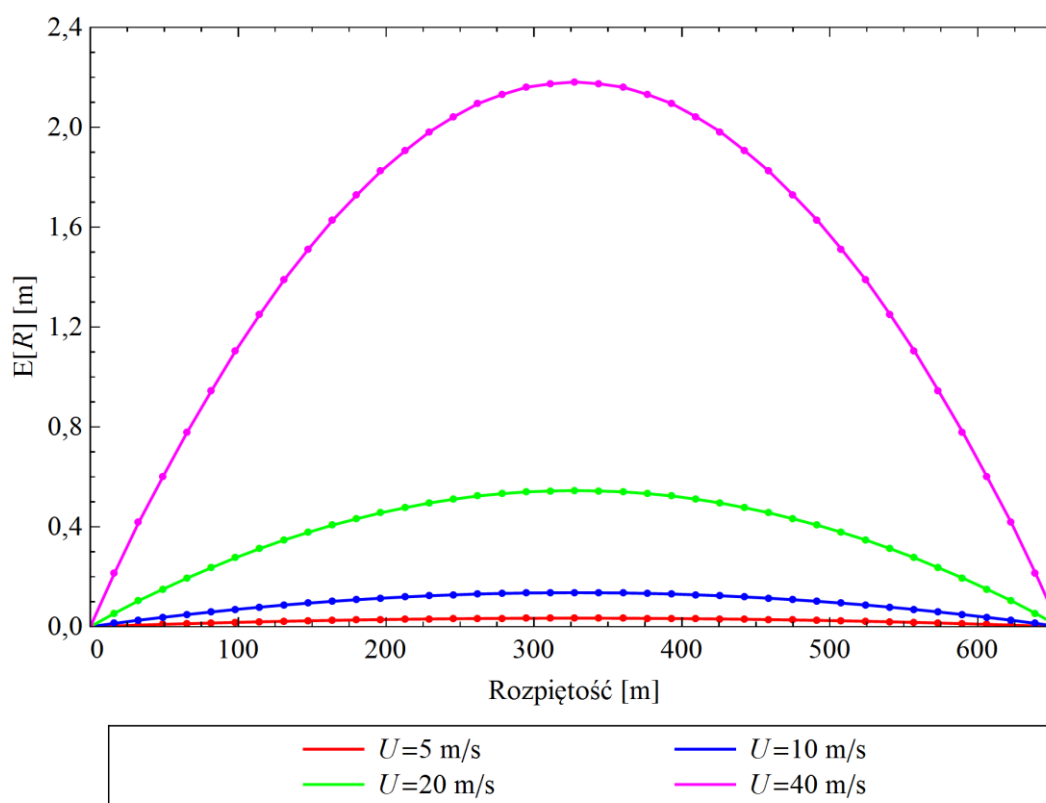


Rys. 5.8. Wartości oczekiwane poziomych drgań rurociągu spowodowanych oddziaływaniem turbulentnego wiatru o prędkości średniej $U = 20$ m/s, w zależności od prędkości przepływu cieczy w rurociągu

Na podstawie analizy wykresów przedstawionych na rysunku 5.8 można zauważyć, że wartość oczekiwana odpowiedzi jest taka sama dla rurociągu pustego i rurociągu wypełnionego nieruchomą masą ($v_f = 0$ m/s). Natomiast, gdy prędkość ruchu masy wewnątrz

rurociągu wynosi kolejno $v_f = 10, 20, 40, 70$ m/s, to wartość oczekiwana poziomych drgań w środku rozpiętości mostu wzrasta odpowiednio o 0,2, 0,9, 3,9, oraz 14,9%, w porównaniu do sytuacji, gdy $v_f = 0$ m/s. Analogicznie jak w przypadku impulsowych funkcji przejścia można stwierdzić, że wpływ ruchu masy na drgania spowodowane oddziaływaniem turbulentnego wiatru jest pomijalny przy prędkościach przepływu mniejszych od $v_f = 40$ m/s.

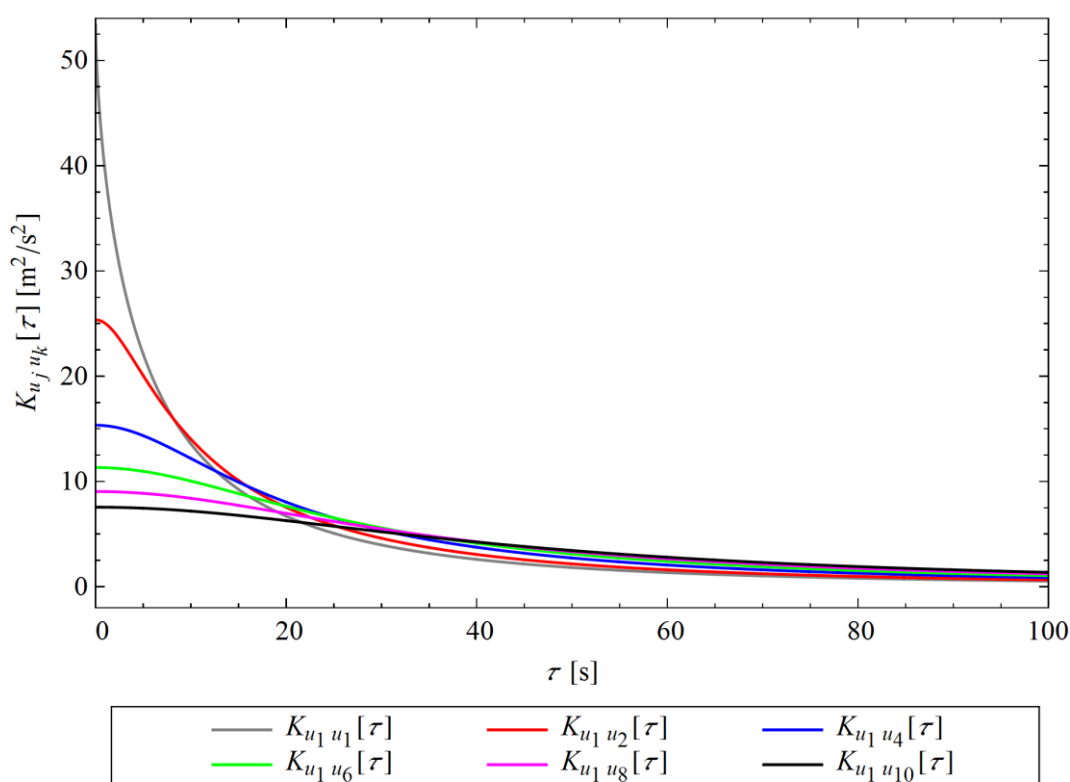
Na kolejnym rysunku (rys. 5.9) przedstawiono zależność wartości oczekiwanych poziomych drgań dźwigara wiszącego mostu rurociągowego od średniej prędkości wiatru. Wartości oczekiwane wyznaczono przy założeniu, że rurociąg jest wypełniony nieruchomą masą cieczy ($v_f = 0$ m/s).



Rys. 5.9. Wartości oczekiwane poziomych drgań rurociągu wypełnionego nieruchomą masą cieczy ($v_f = 0$ m/s), w zależności od średniej prędkości wiatru

Ze wzoru (5.41) oraz (5.42) wynika, że wartość oczekiwana jak i wariancja są proporcjonalne do kwadratu średniej prędkości wiatru, co w przypadku wartości oczekiwanej obrazuje rysunek 5.9. Widać zatem, że największy wpływ na wartość oczekiwaną odpowiedzi mostu ma średnia prędkość wiatru, a prędkość ruchu masy wewnątrz rurociągu ma znaczenie drugorzędne. W tym miejscu należy także wspomnieć, że wiatry których prędkość przekracza 25 m/s są wiatrami huraganowymi mogącymi spowodować uszkodzenia konstrukcji.

Podobną analizę przeprowadzono dla wariancji poziomych drgań mostu. Punktem wyjścia w obliczeniach wariancji jest wyznaczenie funkcji korelacyjnych składowych wektorowego procesu turbulencji wiatru. Zgodnie z definicją korelacji przestrzenno-czasowych (5.11) uwzględniających funkcję koherencji (5.13), funkcje korelacyjne zanikają eksponencjalnie do zera przy zwiększaniu interwału czasowego τ , a także maleją wraz ze wzrostem odległości pomiędzy analizowanymi punktami. Prawidłowości te są widoczne na rysunku 5.10, który zawiera wykresy wybranych funkcji korelacyjnych obliczonych na podstawie widma Kaimala (5.2) i funkcji koherencyjnej Davenporta (5.13), przy założeniu, że średnia prędkość wiatru wynosi $U = 20$ m/s.

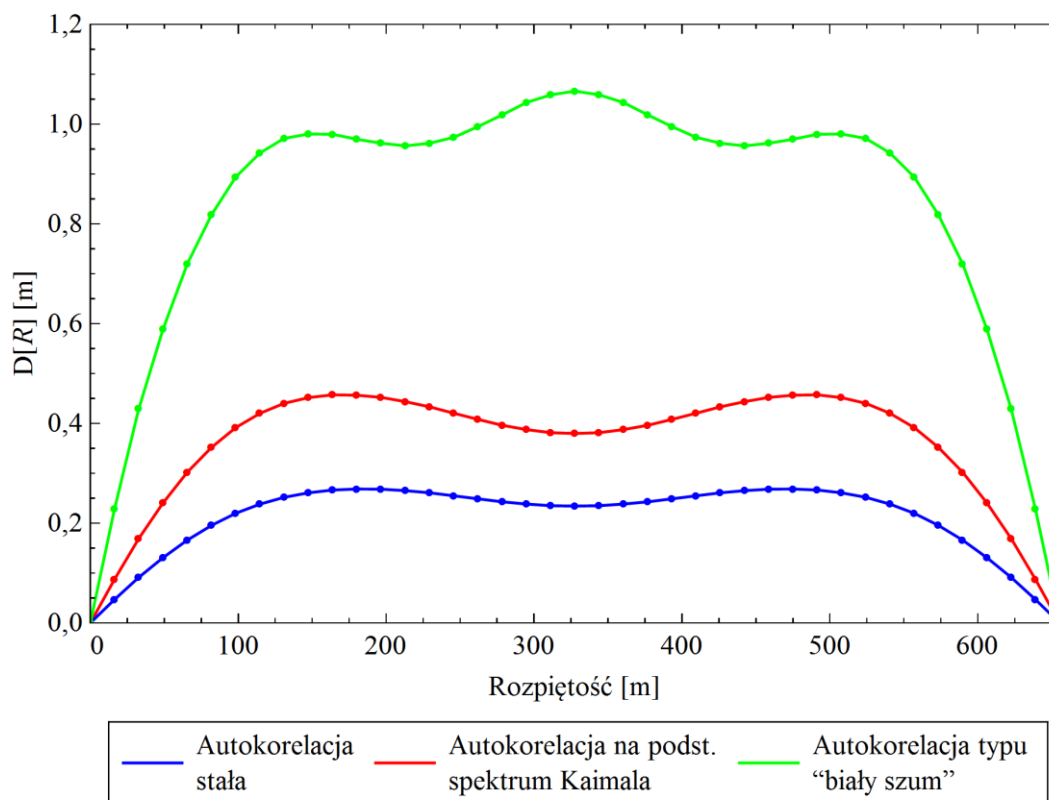


Rys. 5.10. Wybrane funkcje korelacyjne opisujące losową fluktuację prędkości wiatru, zdefiniowane na podstawie widma Kaimala i funkcji koherencyjnej Davenporta

Funkcje korelacyjne oraz zaprezentowane wcześniej impulsowe funkcje przejścia (rys. 5.5 oraz 5.6) stanowią podstawę obliczenia wariancji odpowiedzi mostu. Obliczenia te wykonano w obranym zbiorze punktów wzdłuż rozpiętości rurociągu i w odniesieniu do drgań poziomych, na podstawie wzoru (5.42), czyli w stanie ustalonym drgań i przy założeniu, że funkcje autokorelacyjne i korelacji wzajemnej wynikają ze spektrum Kaimala (5.2). Dodatkowo wyznaczono także wariancje według wzorów przybliżonych (5.43) i (5.44), sformułowanych w celu wstępnego oszacowania wariancji (5.42), której obliczenie

jest bardzo czasochłonne. Występującą we wzorach (5.43) i (5.44) wariancję turbulencji wiatru σ_u^2 obliczono za pomocą relacji (5.14), z wykorzystaniem widma Kaimala (5.2). Należy tu podkreślić, że zarówno obliczenia funkcji korelacyjnych (5.11) jak i obliczenia wariancji turbulencji wiatru (5.14) musiały być ponawiane dla każdej rozważanej średniej prędkości wiatru U , ponieważ gęstość widmowa wiatru (5.2) jest uzależniona od tej prędkości.

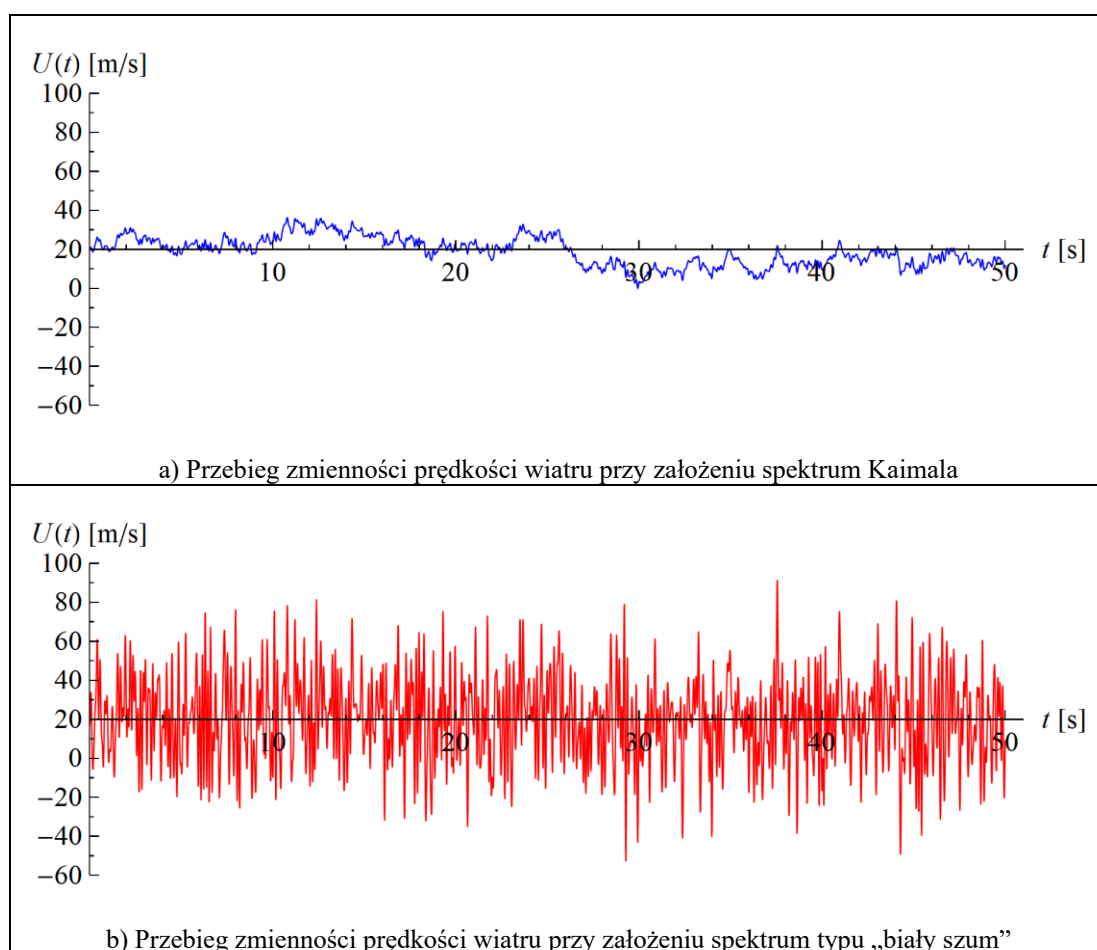
W pierwszej kolejności rozpatrzono przypadek, gdy średnia prędkość wiatru wynosi $U = 20$ m/s, a prędkość ruchu cieczy wewnątrz rurociągu jest zerowa ($v_f = 0$ m/s). Wyznaczono wariancje poziomych drgań dźwigara mostu (rurociągu), a następnie, na ich podstawie – odchylenia standardowe. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 5.11.



Rys. 5.11. Odchylenia standardowe poziomych drgań rurociągu, wyznaczone przy założeniu trzech różnych wariantów autokorelacji (i korelacji wzajemnych) składowych wektorowego procesu turbulencji wiatru

Zgodnie z oczekiwaniami, odchylenie standardowe obliczone przy założeniu korelacji wynikających ze spektrum Kaimala znajduje się pomiędzy rozwiązaniami, w których założono dwie skrajne idealizacje matematyczne procesu opisującego turbulencje wiatru. Przy założeniu stałej korelacji fluktuacji wiatru wartość odchylenia standardowego przemieszczenia poziomego w środku rozpiętości dźwigara jest o 38% mniejsza w odniesieniu do rozwiązania, gdzie korelacje oblicza się na podstawie funkcji gęstości

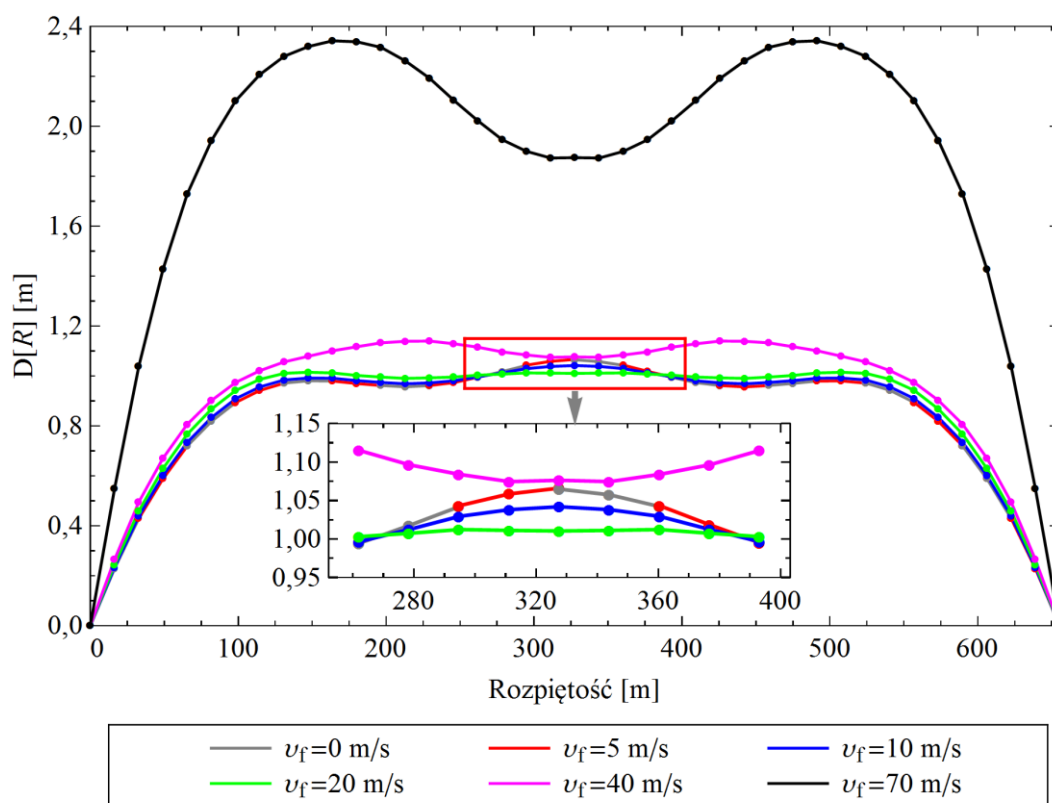
widmowej Kaimala. Natomiast w rozwiązaniu, gdzie przyjęto funkcje korelacji typu „biały szum”, wartość odchylenia jest większa o 180%. Znaczna różnica między tymi rozwiązaniami jest spowodowana tym, że w przypadku założenia funkcji korelacyjnej typu „biały szum” funkcja gęstości widmowej jest stała w całym paśmie częstotliwości, tj. na każdy odcinek szerokości pasma przypada taka sama moc procesu. Można to zaobserwować w przykładowych symulacjach numerycznych prędkości wiatru (rys. 5.12a oraz 5.12b), gdzie założona średnia prędkość wiatru wynosi $U = 20$ m/s, a składowe turbulencji wiatru wyznaczono korzystając z funkcji gęstości widmowej Kaimala oraz „biały szum”. Symulacje wykonano przy zastosowaniu klasycznej metody skończonych sum funkcji cosinus o losowej fazie, w przedziale częstotliwości od 0 do 50 rad/s [120].



Rys. 5.12. Zestawienie przykładowych przebiegów zmienności wiatru w zależności od założonej funkcji gęstości widmowej

W skrajnym przypadku, gdy obliczenie wariancji według wzoru (5.42) okazuje się zbyt kłopotliwe, można w przybliżeniu wyznaczyć wariancję jako wartość średnią rozwiązań (5.43) i (5.44), lub tak jak w tej pracy, przyjąć wariant konserwatywny zakładający korelacje typu „biały szum”. Do dalszych analiz wybrano rozwiązanie konserwatywne (na korzyść

bezpieczeństwa) i wyznaczono odchylenia standardowe poziomych przemieszczeń dźwigara mostu, w zależności od prędkości przepływu cieczy w rurociągu (rys. 5.13). Podobnie jak w przypadku wartości oczekiwanych drgań poziomych stwierdzono, że do prędkości ruchu masy $v_f = 40$ m/s nie obserwuje się istotnych różnic między rozwiązaniami. Dopiero przy prędkości $v_f = 70$ m/s, bliskiej prędkości krytycznej, nie można pominąć wpływu ruchu masy w analizach drgań mostu spowodowanych oddziaływaniem wiatru.



Rys. 5.13. Odchylenia standardowe poziomych drgań mostu w zależności od prędkości ruchu masy w rurociągu

5.5. Podsumowanie

W uwagach wstępnych omówiono zjawisko wzbudzenia turbulentnego oraz metody analizy drgań spowodowanych tym oddziaływaniem wiatru. Następnie przedstawiono ogólną charakterystykę pola wiatru oraz definicje obciążeń aerodynamicznych mostów o dużych rozpiętościach. Po tym wprowadzeniu sformułowano autorski algorytm analizy drgań wiszącego mostu rurociągowego, spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym. Zdefiniowano obciążenia aerodynamiczne rurowego dźwigara mostowego, w uproszczonej postaci, tzn. z pominięciem sił samowzbudnych, stosując metodę podziału pola ciśnienia wiatru na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu, uwzględniając przestrzenną i czasową korelację turbulencji. Przyjęto, że składowe zmiennych w czasie fluktuacji prędkości wiatru

są opisane stacjonarnymi procesami Gaussa, co dało możliwość skorzystania ze szczególnych własności tego typu procesów stochastycznych (można je określić w pełni jeśli znana jest gęstość widmowa albo funkcja korelacyjna opisująca korelacje względem czasu). Pomimo, że przypadek ten obejmuje tylko wąski zakres możliwych przebiegów obciążeń losowych, takie podejście jest usprawiedliwione faktem, że w praktyce korzysta się z symulacji pola wiatru głównie przy użyciu rozkładów gaussowskich [76].

Wyprowadzono formuły umożliwiające wyznaczenie dowolnej odpowiedzi rozważanego mostu na działanie losowego pola wiatru, oraz charakterystyk probabilistycznych tej odpowiedzi, ale analizy numeryczne ograniczono tylko do drgań poziomych w wybranych punktach rurociągowego dźwigara mostowego. Przyjęto założenie, że wymuszenie i odpowiedź konstrukcji analizuje się w ramach teorii korelacyjnej, gdzie do opisu procesów stochastycznych wystarczą momenty rzędu pierwszego i drugiego, czyli wartość oczekiwana i funkcja kowariancyjna (a za tym idzie – wariancja). Ze względu na czasochłonność wyznaczania wariancji na podstawie założonego widma wiatru, rozważono dodatkowo dwa skrajne przypadki wyidealizowanych rozwiązań, które wykorzystano do oszacowania zakresu, w którym znajduje się wartość wariancji. Te dwa skrajne rozwiązania sformułowano przyjmując do opisu turbulencji stacjonarny proces gaussowski, z funkcją korelacyjną typu „biały szum” oraz funkcją korelacyjną stałą.

Rozwiązań poszukiwano z uwzględnieniem ruchu masy wewnątrz rurociągu. Na podstawie wyników badań numerycznych stwierdzono, że w przypadku prędkości przepływu mniejszych od $v_f = 40$ m/s wpływ ruchu masy na drgania spowodowane oddziaływaniem turbulentnego wiatru jest pomijalnie mały. Natomiast w przypadku prędkości $v_f = 70$ m/s bliskiej prędkości krytycznej obserwuje się znaczący wzrost zarówno wartości oczekiwanej jak i wariancji drgań poziomych. Jest to spowodowane malejącą sztywnością poziomą wiszącego rurociągu, co można było zaobserwować w analizie zagadnienia własnego.

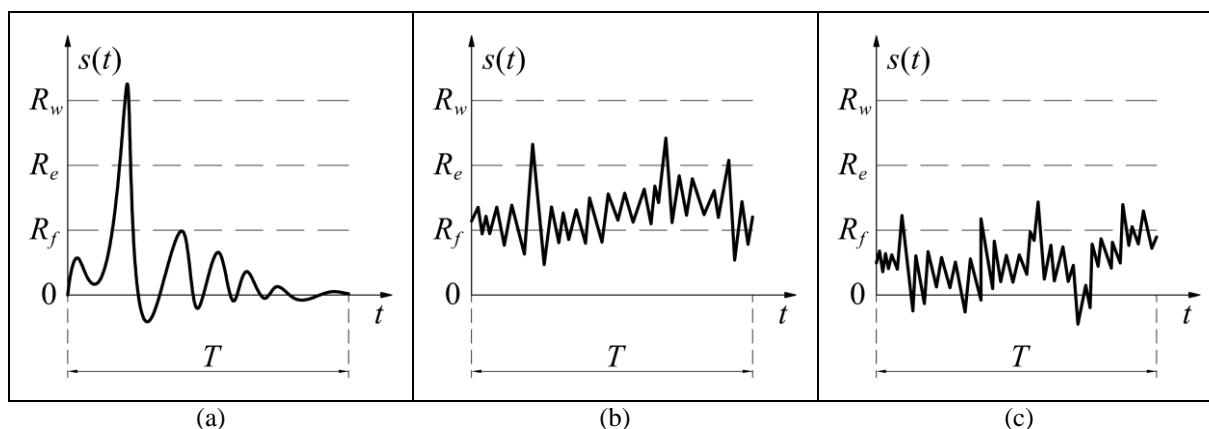
Należy w tym miejscu podkreślić, że czym innym jest wyznaczenie średnich wartości odpowiedzi, a czym innym obserwacja samej odpowiedzi konstrukcji. Analiza drgań spowodowanych konkretną realizacją sił o naturze losowej jest odrębnym zagadnieniem, w którym niezbędnym elementem jest znajomość przebiegu obciążenia, wyznaczonego na przykład przy zastosowaniu metod symulacyjnych. Jednak takie jednostkowe określenie odpowiedzi konstrukcji, wyrażonej za pośrednictwem przemieszczenia lub naprężenia nie jest wystarczająca na tyle, aby wskazać czy konstrukcja w trakcie eksploatacji będzie bezpieczna. Stąd powstaje pytanie jak drgania stochastyczne w danych warunkach wpływają na możliwość wystąpienia uszkodzeń konstrukcji. Problem ten analizuje się w ramach teorii

niezawodności w aspekcie tzw. pierwszego przekroczenia, gdzie wyznacza się prawdopodobieństwo zdarzenia, że odpowiedź konstrukcji będzie się znajdować w określonym bezpiecznym przedziale lub przewyższy pewną wartość graniczną.

6. Niezawodność w sensie problemu pierwszego przekroczenia

6.1. Wprowadzenie

W przypadku drgań losowych możliwe jest tylko określenie prawdopodobieństwa wystąpienia uszkodzenia czy ewentualnego zniszczenia konstrukcji w danym przedziale czasu, lub też wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych (na przykład wartości oczekiwanej) czasu życia konstrukcji [131].



Rys. 6.1. Losowe przebiegi odpowiedzi konstrukcji podczas przekroczenia stanów granicznych [9]:

- przekroczenie naprężeń niszczących,
- nagromadzenie odkształceń trwałych,
- kumulacja pęknięć zmęczeniowych

Na rysunku 6.1 przedstawiono trzy grupy możliwych przebiegów losowych odpowiedzi konstrukcji, obrazujące główne zjawiska związane z przekroczeniem założonych stanów granicznych [9]. Pierwsza grupa (rys. 6.1a) dotyczy konstrukcji, które znalazły się w sytuacji niebezpiecznej pod wpływem działania krótkotrwałych obciążeń niestacjonarnych prowadzących do przekroczenia wartości naprężeń niszczących R_w . Takim obciążeniem może być na przykład huragan, trzęsienie ziemi lub wypadek komunikacyjny, które można przedstawić w postaci niestacjonarnego procesu stochastycznego. Głównym celem rozważań w tym przypadku jest wyznaczenie prawdopodobieństwa przynajmniej jednokrotnego przekroczenia założonego poziomu granicznego przy realizacji stochastycznego procesu drgań. Kolejna grupa przebiegów (rys. 6.1b) ilustruje zjawisko nagromadzania się trwałych odkształceń w konstrukcjach, które są poddane działaniu obciążeń stochastycznych stacjonarnych lub quasi-stacjonarnych. Przyjmuje się, że prawdopodobieństwo przekroczenia naprężeń granicznych R_w jest małe, a głównym problemem jest znalezienie rozkładu prawdopodobieństwa pojawienia się skumulowanych odkształceń trwałych o określonej wartości, pojawiających się po przekroczeniu granicy plastyczności R_e , na końcu założonego

czasu eksploatacji T . W końcu, do trzeciej grupy (rys. 6.1c) zalicza się zjawiska kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, które powstają w konstrukcji stopniowo, po przekroczeniu granicy wytrzymałości zmęczeniowej R_f , pod wpływem działania długotrwałych obciążeń stochastycznych. Tak jak poprzednio zakłada się, że przeciążenia ponad naprężenia niszczące są bardzo mało prawdopodobne, więc zadanie sprowadza się do badania stopniowego rozwoju pęknięć zmęczeniowych. Warto zwrócić uwagę, że w prowadzonych rozważaniach uwagę skupia się raczej na określaniu rozkładu ekstremalnych wartości badanej wielkości niż na badaniu rozkładu tej wielkości. Przedstawione grupy efektów, jakie towarzyszą drganiom stochastycznym, bada się z zastosowaniem teorii niezawodności.

Terminem niezawodność (ang. *reliability*), według definicji podanej przez Bołotina [9], określa się zdolność układu (np. mechanicznego) do wypełniania jego funkcji w danych warunkach eksploatacji. Przeciwnym pojęciem w teorii niezawodności jest awaria (ang. *failure*) rozumiana jako zaprzestanie wypełniania chociażby jednej funkcji układu. Należy tutaj podkreślić, że awaria rzadko jest związana ze zniszczeniem konstrukcji. Zwykle jest ona konsekwencją stopniowego nagromadzania się uszkodzeń, odkształceń trwałych lub zużycia, które po osiągnięciu granicznych wartości prowadzą do zakłóceń normalnej pracy układu. Najczęściej stosowaną miarą niezawodności jest prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy konstrukcji, czyli prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia, że w założonym przedziale czasu, w określonych warunkach użytkowania, nie nastąpi ani jedna awaria [9]. W literaturze, wielu autorów utożsamia niezawodność konstrukcji z podaną powyżej definicją. Tak rozumiane znaczenie niezawodności będzie stosowane w niniejszej pracy. W celu uzupełnienia podanej definicji należy wprowadzić dodatkowo pojęcie trwałości, to znaczy czasu życia (eksploatacji) konstrukcji T mierzony od momentu oddania jej do użytku, aż do utraty zdolności do pracy [9]. W rzeczywistych konstrukcjach niezawodność $p_r(t)$ jest funkcją czasu t , gdzie $t \in (0, T)$. Zatem prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy konstrukcji w założonym przedziale czasu eksploatacji T wynosi $p_r(T)$, natomiast prawdopodobieństwo awarii konstrukcji, nazywane czasem zawodnością lub awaryjnością jest równe $p_f(T) = 1 - p_r(T)$. Przyjmuje się, że niezawodność na początku eksploatacji konstrukcji ($T = 0$) jest równa jedności, tj. $p_r(0) = 1$. Z kolei gdy $T \rightarrow \infty$, to prawdopodobieństwo zdarzenia, że w czasie T nie nastąpi żadna awaria dąży do zera, czyli $\lim_{T \rightarrow \infty} p_r(T) = 0$. Związek między funkcją gęstości rozkładu trwałości $f_T(T)$ i niezawodnością $p_r(t)$ jest określony wzorem

$$f_T(T) = -\left. \frac{dp_r(t)}{dt} \right|_{t=T}. \quad (6.1)$$

Bołotin w swojej monografii [9] dzieli awarie na dwie grupy:

- awarie o charakterze przewyższenia losowego, rozumianego jako przekroczenie pewnego granicznego stanu, takiego jak: kruche pęknięcie, granica plastyczności lub sprężystości w dowolnym punkcie konstrukcji dla której nie są dopuszczalne odkształcenia trwałe, dopuszczalne przemieszczenie;
- awarie powstałe wskutek stopniowej, nieodwracalnej kumulacji uszkodzeń w konstrukcji, prowadzącej w konsekwencji do pęknięcia zmęczeniowego lub nagromadzenia się odkształceń plastycznych lub odkształceń spowodowanych pełzaniem.

Wymienionym rodzajom awarii odpowiadają dwa podstawowe zagadnienia teorii niezawodności. Jeżeli awaria ma charakter przewyższenia losowego, to rozwiązanie tego problemu wiąże się z oceną niezawodności w sensie pierwszego przejścia/przekroczenia (ang. *first passage* lub *first crossing*). Natomiast jeśli awaria jest równoznaczna z pęknięciem zmęczeniowym spowodowanym kumulacją uszkodzeń materiału, wtedy postawione zagadnienie nosi nazwę niezawodności zmęczeniowej konstrukcji (ang. *fatigue*).

Literatura dotycząca metod oceny niezawodności konstrukcji obciążonych dynamicznie, a w szczególności problemu pierwszego przekroczenia i niezawodności zmęczeniowej jest bardzo obszerna. Spośród najwcześniejszych monografii, w których można znaleźć podstawowe rozwiązania tych zagadnień należy wymienić między innymi monografie Bołotina [9], Crandalla i in. [41], którego styl wyprowadzenia oraz oznaczenia przejęło wielu późniejszych autorów, Lina [85], Robsona i in. [111] oraz Newlanda [96]. W kolejnych latach metody te były rozwijane, czego dowodem jest duża liczba publikacji i rozdziałów w książkach, autorów takich jak na przykład Madsen, Krenk i Lind [89], Soong i Grigoriu [121], Nigam i Narayanam [98], Wirsching, Peaz i Ortiz [138], Lin i Cai [86], Sólnes [123] i Svetlitsky [130]. Z prac polskich autorów należy przytoczyć przede wszystkim monografie Sobczyka i Spencera [120], Iwankiewicza [73], Chmielewskiego i Zembatego [31] oraz Śniadego [131].

Zastosowane w niniejszej rozprawie ujęcie teorii niezawodności dotyczy przede wszystkim konstrukcji poddanych losowemu obciążeniu dynamicznemu. Należy tutaj podkreślić, że jeśli jakkolwiek parametr obciążenia ma charakter losowy, to zarówno obciążenie jak i każda odpowiedź konstrukcji są losowymi funkcjami czasu (procesami

stochastycznymi), niezależnie od tego czy parametry samej konstrukcji są losowe, czy deterministyczne. Natomiast jeżeli wszystkie parametry obciążenia zmiennego są deterministyczne, to proces obciążenia jest deterministyczną funkcją czasu, a odpowiedź konstrukcji jest losowa tylko wtedy gdy którykolwiek parametr konstrukcji jest losowy. Przy czym, należy zaznaczyć, że odpowiedź konstrukcji jest procesem stochastycznym pomimo tego, że własności konstrukcji są na ogół opisane zmiennymi losowymi, a nie procesami stochastycznymi. Wymienione grupy możliwych zagadnień należy uzupełnić o przypadek, w którym konstrukcja jest poddana działaniu obciążeń statycznych, ale parametry określające nośność konstrukcji (na przykład wymiary elementów lub własności materiałowe) i obciążenia (na przykład wartości sił) są opisane zmiennymi losowymi. Wówczas korzysta się z metod rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej do wyznaczania miar niezawodności. Takie ujęcie teorii niezawodności jest zupełnie odrębnym zagadnieniem i nie będzie tutaj omawiane.

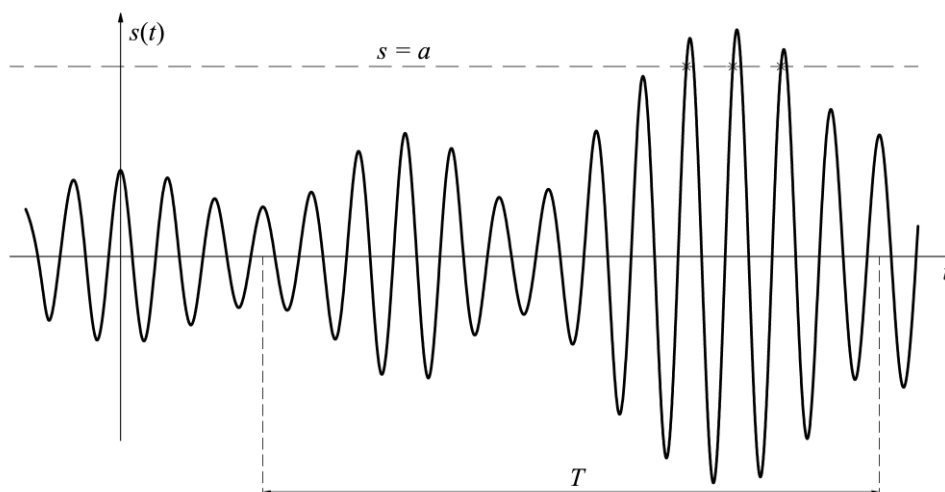
Z uwagi na losowy charakter odpowiedzi mostu rurociągowego pod wpływem wzbudzenia turbulentnego, bardzo ważnym zagadnieniem jest zarówno kumulacja efektów zmęzeniowych w poszczególnych elementach konstrukcyjnych jak i analiza ewentualnych przekroczeń dopuszczalnych wartości przemieszczeń lub naprężeń. W niniejszej pracy omówiony zostanie tylko problem pierwszego przekroczenia, a następnie na podstawie wyprowadzonych zależności oraz wyników analiz odpowiedzi konstrukcji spowodowanych oddziaływaniem buffetingu wyznaczone zostaną podstawowe miary niezawodności, tj. średnia liczba przekroczeń w jednostce czasu oraz prawdopodobieństwo przekroczenia dopuszczalnych przemieszczeń przynajmniej jeden raz.

6.2. Prawdopodobieństwo przekroczenia założonego poziomu granicznego

Problem pierwszego przejścia jest jednym z najtrudniejszych w teorii stochastycznej dynamiki konstrukcji. Obecnie, matematycznie dokładne rozwiązania są dostępne tylko w prostych przypadkach szczególnych lub, w ograniczonym zakresie, w przypadku procesów, które mogą być traktowane jako dyfuzyjny proces Markowa [86]. Przedstawione poniżej rozwiązania podstawowe bazują na wyprowadzeniach podanych w monografiach Newlanda [96] i Śniadego [131].

W typowej analizie problemu pierwszego przekroczenia zakłada się, że dany jest niestacjonarny proces stochastyczny $S(t)$, którego dowolna realizacja $s(t)$ jest funkcją ciągłą i posiadającą pierwszą pochodną $\dot{s}(t)$ w przedziale czasu $(t, t + T)$. Ponadto, dany jest pewien

stały graniczny poziom a , którego przekroczenia są badane (w przypadku ogólniejszym zakłada się, że poziom a może zmieniać się w czasie). Funkcja $s(t)$ może być tu interpretowana na przykład jako jeden z przebiegów losowego przemieszczenia, siły wewnętrznej lub naprężenia w danym punkcie konstrukcji, natomiast poziom a może oznaczać wartość krytyczną analizowanej wielkości. Przykładowa realizacja $s(t)$ procesu $S(t)$ wraz z przekroczeniami poziomu a została przedstawiona na rysunku 6.2.



Rys. 6.2. Przekroczenia poziomu a przez przykładową realizację $s(t)$ procesu stochastycznego $S(t)$

W celu określenia niezawodności konstrukcji w sensie pierwszego przekroczenia, rozumianej jako prawdopodobieństwo nieprzekroczenia przez proces $S(t)$ poziomu a w czasie $(t, t + T)$, wprowadza się pojęcie średniej liczby przekroczeń w jednostce czasu $v_a^+(t)$ nazywanej średnią intensywnością przekroczeń. Indeks górny „+” oznacza tu, że analizowane są przekroczenia w kierunku wartości większych niż a , czyli przekroczenia z dodatnią prędkością. Niech $n_a^+(t, t + T)$ oznacza proces stochastyczny zliczający liczbę przekroczeń poziomu a przez proces $S(t)$ w okresie czasu T . Jeśli znana jest średnia intensywność przekroczeń $v_a^+(t)$, to wartość oczekiwaną liczbę przekroczeń $N_a^+(t, t + T) = E[n_a^+(t, t + T)]$ oblicza się ze wzoru

$$N_a^+(t, t + T) = \int_t^{t+T} v_a^+(\tau) d\tau. \quad (6.2)$$

Jeżeli proces $S(t)$ jest stacjonarny to $v_a^+(t) = v_a^+ = \text{const}$, wówczas średnia liczba przekroczeń jest proporcjonalna do interwału czasowego T

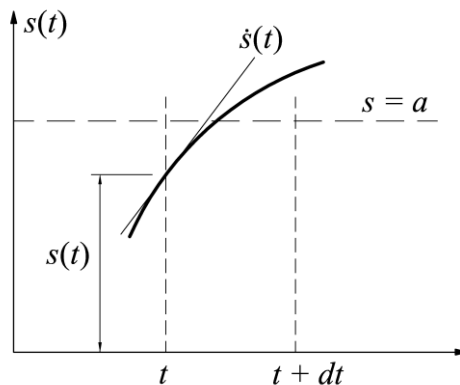
$$N_a^+(t, t+T) = v_a^+ T. \quad (6.3)$$

Jak wspomniano wcześniej, niezawodność konstrukcji $p_r(T)$ w zadanym okresie czasu T jest prawdopodobieństwem zdarzenia, że w tym okresie nie nastąpi żadna awaria rozumiana jako przekroczenie poziomu granicznego a . Biorąc pod uwagę (6.2), można to zapisać wzorem

$$p_r(T) = P\{N_a^+(t, t+T) = 0\}. \quad (6.4)$$

Obliczenie niezawodności według wzoru (6.4) wymaga określenia funkcji $v_a^+(t)$. W tym celu należy najpierw ustalić, jakie warunki konieczne muszą być spełnione w chwili t , aby wystąpiło przekroczenie poziomu a przez funkcję $s(t)$ w przedziale $(t, t+dt)$. Warunki te wynikają z rysunku 6.3 i mają następujące postaci (Newland [96]):

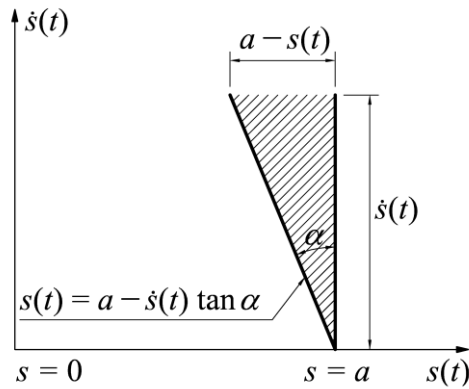
$$s(t) < a \quad \text{oraz} \quad \dot{s}(t) \geq \frac{a-s(t)}{dt}. \quad (6.5)$$



Rys. 6.3. Przekroczenie poziomu a przez funkcję $s(t)$ w chwili t

Ponieważ funkcje $s(t)$ oraz $\dot{s}(t)$ są tu realizacjami procesu stochastycznego $S(t)$ oraz procesu $\dot{S}(t)$, który jest pochodną średniokwadratową procesu $S(t)$, to aby spełnić warunki (6.5) w dowolnej chwili czasowej t należy określić łączny rozkład zmiennych losowych jakimi są wartości funkcji $s(t)$ oraz $\dot{s}(t)$ w chwili t . Rozkład ten opisuje łączna (dwuwymiarowa) funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa procesów $S(t)$ i $\dot{S}(t)$, oznaczona dalej symbolem $f_{s\dot{s}}(s, \dot{s}, t)$.

Na rysunku 6.4 zaznaczono obszar, w którym muszą znajdować się wartości $s(t)$ oraz $\dot{s}(t)$, aby nastąpiło przekroczenie założonego poziomu a .



Rys. 6.4. Obszar przekroczenia założonego poziomu a

Z rysunku 6.4 i z definicji łącznej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wynika, iż prawdopodobieństwo, że obie wartości leżą w zaznaczonym regionie wynosi

$$\begin{aligned}
 P\{\text{przekroczenie poziomu } a \text{ w czasie } (t, t + dt)\} &= \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{a - \dot{s}(t) \tan \alpha}^a f_{s\dot{s}}(s, \dot{s}, t) ds d\dot{s}, \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

przy czym $\tan \alpha = (a - s(t)) / \dot{s}(t)$. Równocześnie, na podstawie rysunku 6.3: $\tan \alpha = (a - s(t)) / dt$, zatem $\tan \alpha = dt$. Gdy $dt \rightarrow 0$, wtedy także $\alpha \rightarrow 0$, zatem można przyjąć, że spełniona jest następująca równość [96]

$$f_{s\dot{s}}(s, \dot{s}, t) = f_{s\dot{s}}(s = a, \dot{s}, t). \quad (6.7)$$

Wtedy funkcja podcałkowa we wzorze (6.6) nie jest już funkcją zmiennej s , więc

$$\int_{a - \dot{s}(t) \tan \alpha}^a f_{s\dot{s}}(a, \dot{s}, t) ds = f_{s\dot{s}}(a, \dot{s}, t) \dot{s}(t) dt. \quad (6.8)$$

W związku z założeniem, że dt jest bardzo małe, w przedziale czasowym $(t, t + dt)$ może nastąpić tylko jedno przekroczenie poziomu a , zatem średnia intensywność przekroczeń jest w tym przedziale stała, a stąd wynika, że

$$N_a^+(t, t + dt) = v_a^+(t) dt, \quad (6.9)$$

przez analogię do wzoru (6.3). Można wtedy stwierdzić, że prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu granicznego (6.6) jest wprost równe średniej liczbie przekroczeń w czasie dt

$$P\{\text{przekroczenie poziomu } a \text{ w czasie } (t, t + dt)\} = v_a^+(t)dt. \quad (6.10)$$

Podstawiając zależność (6.8) do (6.6) z uwzględnieniem równości (6.10), oraz dzieląc obustronnie przez dt otrzymuje się ogólny wzór określający średnią intensywność przekroczeń

$$v_a^+(t) = \int_0^{\infty} \dot{s}(t) f_{s\dot{s}}(a, \dot{s}, t) d\dot{s}. \quad (6.11)$$

Wzór (6.11) jest prawdziwy dla każdej dwuwymiarowej funkcji gęstości $f_{s\dot{s}}(s, \dot{s}, t)$, jednak w praktyce nie jest ona znana i wtedy aproksymuje się tę funkcję najbardziej zbliżoną gęstością prawdopodobieństwa lub na przykład za pomocą szeregu zaproponowanego w pracy [110]. Szczególną grupę procesów stanowi tu proces Gaussa. Jeżeli przyjmiemy, że proces $S(t)$ jest stacjonarnym procesem gaussowskim, to jego funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa nie zależy od czasu, pochodna tego procesu $\dot{S}(t)$ jest też procesem Gaussa, a korelacja procesu i jego pierwszej pochodnej jest równa zero [9]. Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest wtedy iloczynem odpowiednich gęstości gaussowskich i ma postać

$$f_{s\dot{s}}(s, \dot{s}) = f(s)f(\dot{s}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{(s-m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{s}}} \exp\left(-\frac{\dot{s}^2}{2\sigma_{\dot{s}}^2}\right), \quad (6.12)$$

gdzie m_s i σ_s oznaczają odpowiednio wartość średnią i odchylenie standardowe procesu $S(t)$, a $\sigma_{\dot{s}}$ jest odchyleniem standardowym procesu $\dot{S}(t)$, którego dodatnie i ujemne wartości uważa się za jednakowo prawdopodobne [9]. Po podstawieniu zależności (6.12) do wzoru (6.11) otrzymuje się

$$v_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s} \exp\left(-\frac{(a-m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right). \quad (6.13)$$

Powyższy wzór jako pierwszy wyprowadził Rice [108], [109] zakładając, że proces $S(t)$ jest gaussowskim procesem wąskopasmowym. Jednak później wykazano, że jest on także ważny bez tego założenia [86].

Należy tutaj zauważyć, że zakres stosowalności stacjonarnego procesu gaussowskiego do modelowania losowych drgań konstrukcji budowlanych jest ograniczony. Przede

wszystkim musi być znana wartość oczekiwana i wariancja procesu drgań, które są niezbędne do określenia gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Następnie musi być spełnione założenie o niezależności wszystkich zakłóceń prowadzących do losowości odpowiedzi konstrukcji, wówczas taki proces asymptotycznie dąży do procesu normalnego. Pierwsze wymaganie najczęściej jest spełnione, ponieważ stosunkowo łatwo można wyznaczyć dwa pierwsze momenty procesu drgań. Jednak drugie założenie w przypadku konstrukcji budowlanych przeważnie nie jest prawdziwe, ponieważ często zdarza się, że obciążenia są ze sobą skorelowane.

Przedstawione zależności można uogólnić przyjmując, że poziom graniczny nie jest stały, lecz jest opisany dowolną funkcją różniczkowalną $a(t)$. Poziom ten może być utożsamiany na przykład z nośnością konstrukcji $R(t)$, która w ogólnym przypadku będzie maleć w wyniku degradacji spowodowanej zmęczeniem materiału, starzeniem lub efektami reologicznymi.

Wyznaczenie średniej liczby przekroczeń w jednostce czasu nie jest jeszcze wystarczające, aby określić prawdopodobieństwo zdarzenia danego wzorem (6.4). Oszacowanie tego prawdopodobieństwa można otrzymać czyniąc dodatkowe założenia. Jeżeli założyć, że przekroczenia poziomu granicznego a przez proces $S(t)$ są bardzo rzadkie, co jest uzasadnione ponieważ poziom ten dla prawidłowo zaprojektowanej konstrukcji powinien być duży wyższy od poziomu odpowiedzi konstrukcji, to ich modelem mógłby być proces Poissona. Jest on stochastycznym procesem punktowym (przy czym jego realizacja jest funkcją skokową), zliczającym liczbę zdarzeń w danym przedziale czasu. Ponadto, zakłada się, że przyrosty procesu są niezależne oraz że prawdopodobieństwo wystąpienia w danej chwili więcej niż jednego zdarzenia jest wielkością pomijalnie małą, zatem zdarzenia zachodzą pojedynczo. Intensywność procesu Poissona $\lambda > 0$ jest równa średniej liczbie punktów w jednostce czasu. Jeżeli $\lambda = \text{const}$ to taki proces jest nazywany jednorodnym procesem Poissona. Natomiast, gdy intensywność jest funkcją czasu $\lambda = \lambda(t)$, to proces Poissona nazywa się niejednorodnym, dla którego prawdopodobieństwo zdarzenia, że w danym przedziale czasu (t_i, t_j) liczba zdarzeń $N(t_i, t_j)$ jest równa k wynosi [131]

$$p_k(t_i, t_j) = P\{N(t_i, t_j) = k\} = \frac{\Lambda^k(t_i, t_j)}{k!} \exp(-\Lambda(t_i, t_j)), \quad (6.14)$$

gdzie $t_i < t_j$. Funkcja $\Lambda(t_i, t_j)$ określająca średnią liczbę zdarzeń w przedziale (t_i, t_j) ma postać

$$\Lambda(t_i, t_j) = \int_{t_i}^{t_j} \lambda(t) dt, \quad (6.15)$$

przy czym, w przypadku procesu jednorodnego $\Lambda(t_i, t_j) = \lambda(t_j - t_i)$.

Zakładając aproksymację procesu $N_a^+(t, t+T)$ zliczającego średnią liczbę przekroczeń za pomocą niejednorodnego procesu Poissona, prawdopodobieństwo zdarzenia, że badany proces stochastyczny $S(t)$ nie przekroczy poziomu a w przedziale $(t, t+T)$, czyli niezawodność w sensie pierwszego przekroczenia jest określona wzorem

$$p_r(t, t+T) = P\{N_a^+(t, t+T) = 0\} = \exp\left(-\int_t^{t+T} v_a^+(\tau) d\tau\right). \quad (6.16)$$

Powyższy wzór otrzymano podstawiając (6.2) do zależności (6.14) oraz przyjmując że $k = 0$. Z kolei prawdopodobieństwo awarii wynosi

$$p_f(t, t+T) = 1 - P\{N_a^+(t, t+T) = 0\} = 1 - \exp\left(-\int_t^{t+T} v_a^+(\tau) d\tau\right). \quad (6.17)$$

Jeżeli proces stochastyczny $S(t)$ opisujący badaną odpowiedź konstrukcji jest stacjonarnym procesem Gaussa, wtedy $v_a^+(t) = v_a^+ = \text{const}$, a zależności (6.16) i (6.17) mają wtedy postać, odpowiednio

$$p_r(T) = P\{N_a^+(t, t+T) = 0\} = \exp(-v_a^+ T), \quad (6.18)$$

oraz

$$p_f(T) = 1 - P\{N_a^+(t, t+T) = 0\} = 1 - \exp(-v_a^+ T), \quad (6.19)$$

gdzie v_a^+ jest wyznaczone ze wzoru (6.13). Z analizy powyższych prawdopodobieństw wynika, że nie zależą one od wyboru chwili początkowej t w której rozpoczyna się obserwacja procesu.

W tym miejscu trzeba podkreślić, że przedstawione rozwiązania są tylko przybliżone, ponieważ jak już wcześniej wspomniano zależności (6.16)-(6.19) są ważne tylko wtedy, gdy przekroczenia są niezależne, czyli losowo rozłożone w czasie. Natomiast jak wykazano w pracy [31], założenie o niezależności przewyższeń jest prawdziwe jedynie asymptotycznie,

gdy poziom przewyższeń dąży do nieskończoności. Co więcej, w związku z tym, że przewyższenia mają tendencję do grupowania się, czyli są stochastycznie zależne, to interwał pomiędzy zgrupowanymi przewyższeniami będzie dłuższy niż średni odstęp między przekroczeniami poziomu granicznego [96]. Wówczas prawdopodobieństwo awarii dla interwału czasowego T będzie mniejsze niż to wynikające wzorów (6.17) i (6.19). Problem zależności stochastycznej następujących po sobie przewyższeń rozwiązuje się analizując przewyższenia poziomu granicznego a przez obwiednię procesu i uwzględniając tzw. kwalifikowaną liczbę przewyższeń [31]. Alternatywnym podejściem do analizy problemów niezawodności jest zastosowanie teorii dyfuzyjnych procesów Markowa, jednak rozwiązania te są bardzo złożone i stąd trudne do wyznaczenia w praktycznych zagadnieniach dynamiki konstrukcji.

Prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu granicznego jest podstawową miarą w analizie niezawodności konstrukcji w sensie pierwszego przekroczenia. Równoważną miarą oceny niezawodności konstrukcji jest wartość oczekiwana czasu, który upływa do pierwszego przekroczenia. Czas ten można oszacować na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa, która z kolei wynika z prawdopodobieństw danych wzorami (6.17) oraz (6.19) [96]. Oznaczając przez T_f zmienną losową charakteryzującą czas, po którym proces $S(t)$ osiąga poziom graniczny a oraz przyjmując, że czas jest mierzony od chwili $t = 0$, prawdopodobieństwo zdarzenia, że po czasie T_f nastąpi pierwsze przekroczenie wynosi

$$p_{T_f}(T) = P\{T_f \leq T\} = 1 - P\{N_a^+(0, T) = 0\}. \quad (6.20)$$

Prawdopodobieństwo pierwszego przekroczenia w przedziale czasowym $(T, T + dT)$ można obliczyć z zależności $f_{T_f} dT$, które z kolei musi być takie same jak przyrost prawdopodobieństwa awarii w czasie $(T, T + dT)$. Następnie zakładając, że proces $S(t)$ jest stacjonarnym procesem Gaussa otrzymano [96]

$$f_{T_f}(T) dT = \frac{d}{dT} (1 - \exp(-v_a^+ T)) dT, \quad (6.21)$$

co po przekształceniach daje

$$f_{T_f}(T) = v_a^+ \exp(-v_a^+ T), \quad (6.22)$$

gdzie f_{T_f} oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej T_f . Wtedy wartość oczekiwana czasu do pierwszego przekroczenia wynosi

$$E[T_f] = \int_0^{\infty} T f_{T_f}(T) dT = \frac{1}{v_a^+}. \quad (6.23)$$

Ostatecznie, podstawiając zależność (6.13) do (6.23) otrzymano wartość oczekiwaną czasu do pierwszego przekroczenia poziomu granicznego a przez gaussowski proces stacjonarny $S(t)$

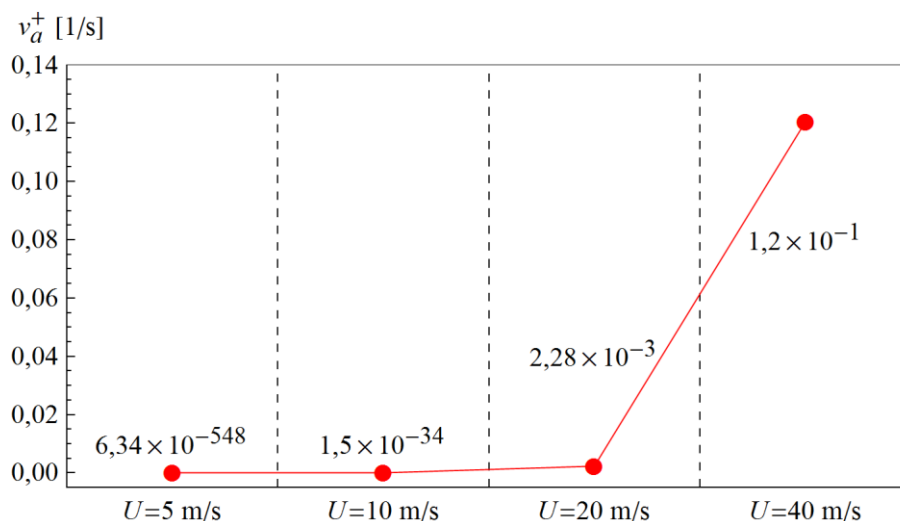
$$E[T_f] = 2\pi \frac{\sigma_s}{\sigma_s} \exp\left(\frac{(a - m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right). \quad (6.24)$$

Szczegółowe informacje dotyczące powyższych rozważań można znaleźć w pracach Crandalla [42], [43].

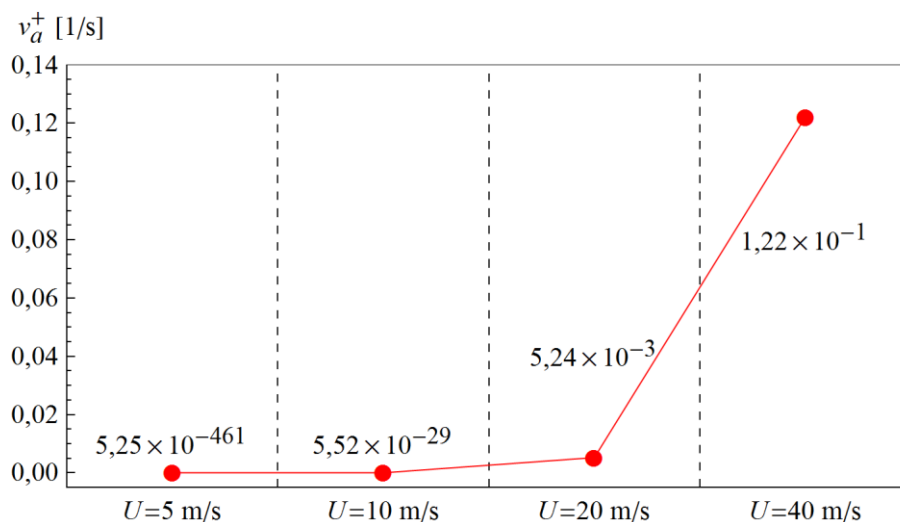
6.3. Losowe drgania wiszącego mostu rurociągowego – analiza problemu pierwszego przekroczenia

W tej pracy niezawodność wiszących mostów rurociągowych w sensie problemu pierwszego przekroczenia będzie analizowana na podstawie wyników badań numerycznych opisanych w punkcie 5.4, gdzie wyznaczono dwie pierwsze charakterystyki momentowe procesu poziomych drgań giętych rurociągu spowodowanych jednoczesnym oddziaływaniem turbulentnego wiatru oraz ruchomej masy cieczy transportowanej przez rurociąg. Jak już wcześniej wspomniano, w związku z założeniem że proces wzbudzenia jest stacjonarnym procesem normalnym (gaussowskim), uzyskane odpowiedzi układu także są stochastycznymi stacjonarnymi procesami Gaussa. Wyznaczenie miar niezawodności będzie zatem bazowało na wzorach (6.18), (6.19) oraz (6.24). Do wszystkich obliczeń założono poziom graniczny przemieszczeń poziomych $a = l_b/150 = 655,3/150 = 4,4$ m, gdzie l_b jest rozpiętością przęsła mostu (rurociągu).

Jako pierwsze wyznaczono średnie liczby przekroczeń poziomu granicznego, w zależności od średniej prędkości wiatru, w punktach 1 oraz 2 (rys. 4.4) znajdujących się w $\frac{1}{4}$ oraz $\frac{1}{2}$ rozpiętości wiszącego rurociągu. Te obliczenia wykonano przy założeniu, że rurociąg jest w całości wypełniony masą cieczy, która jest nieruchoma ($v_f = 0$ m/s), a ich wyniki pokazano na rysunkach 6.5 i 6.6.

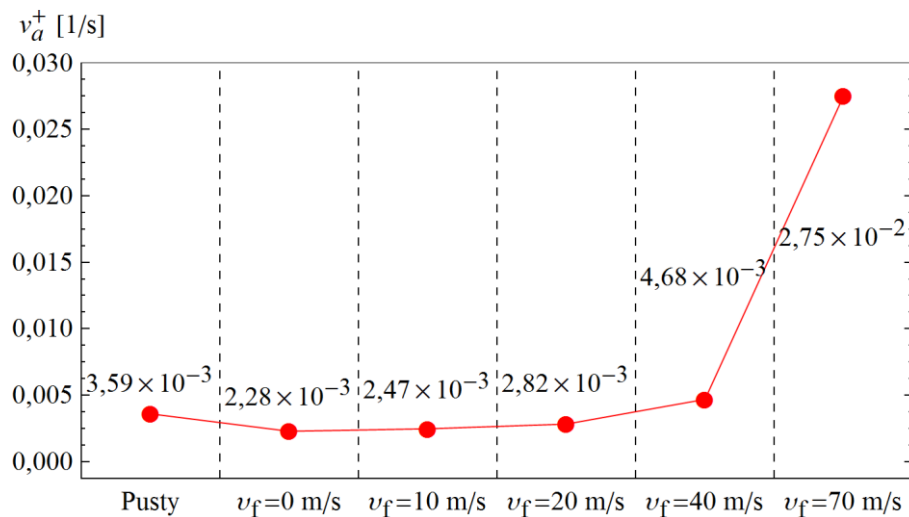


Rys. 6.5. Średnia intensywność przekroczeń poziomu a w punkcie 1 w zależności od średniej prędkości wiatru

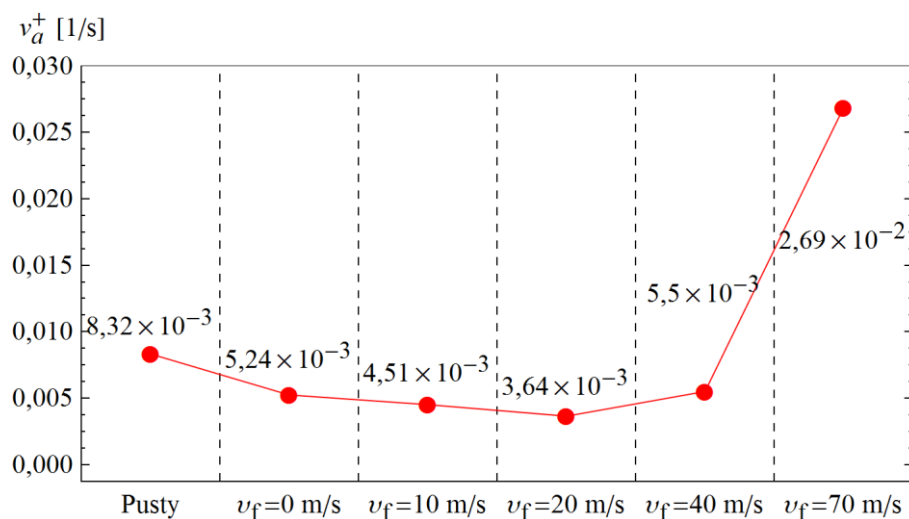


Rys. 6.6. Średnia intensywność przekroczeń poziomu a w punkcie 2 w zależności od średniej prędkości wiatru

Jak wynika z rysunków 6.5 i 6.6, przy średnich prędkościach wiatru rzędu 10 m/s i mniejszych, średnia intensywność przekroczeń założonego poziomu granicznego przemieszczeń poziomych rurociągu jest bardzo mała, co oznacza, że prawdopodobieństwo awarii jest znikome. Jednak już przy prędkości wiatru rzędu 20 m/s (72 km/h), intensywność przekroczeń jest już znacząca, zatem awaria w sensie przekroczenia wartości granicznej jest bardzo prawdopodobna. W związku z powyższym, do dalszych analiz założono średnią prędkość wiatru $U = 20$ m/s i przy tej prędkości zbadano wpływ prędkości ruchu transportowanej masy w rurociągu na średnią intensywność przekroczeń. Wyniki uzyskane w punktach obliczeniowych 1 i 2 pokazano na rysunkach 6.7 i 6.8.



Rys. 6.7. Średnia intensywność przekroczeń poziomu a w punkcie 1, w zależności od prędkości ruchu masy w rurociągu

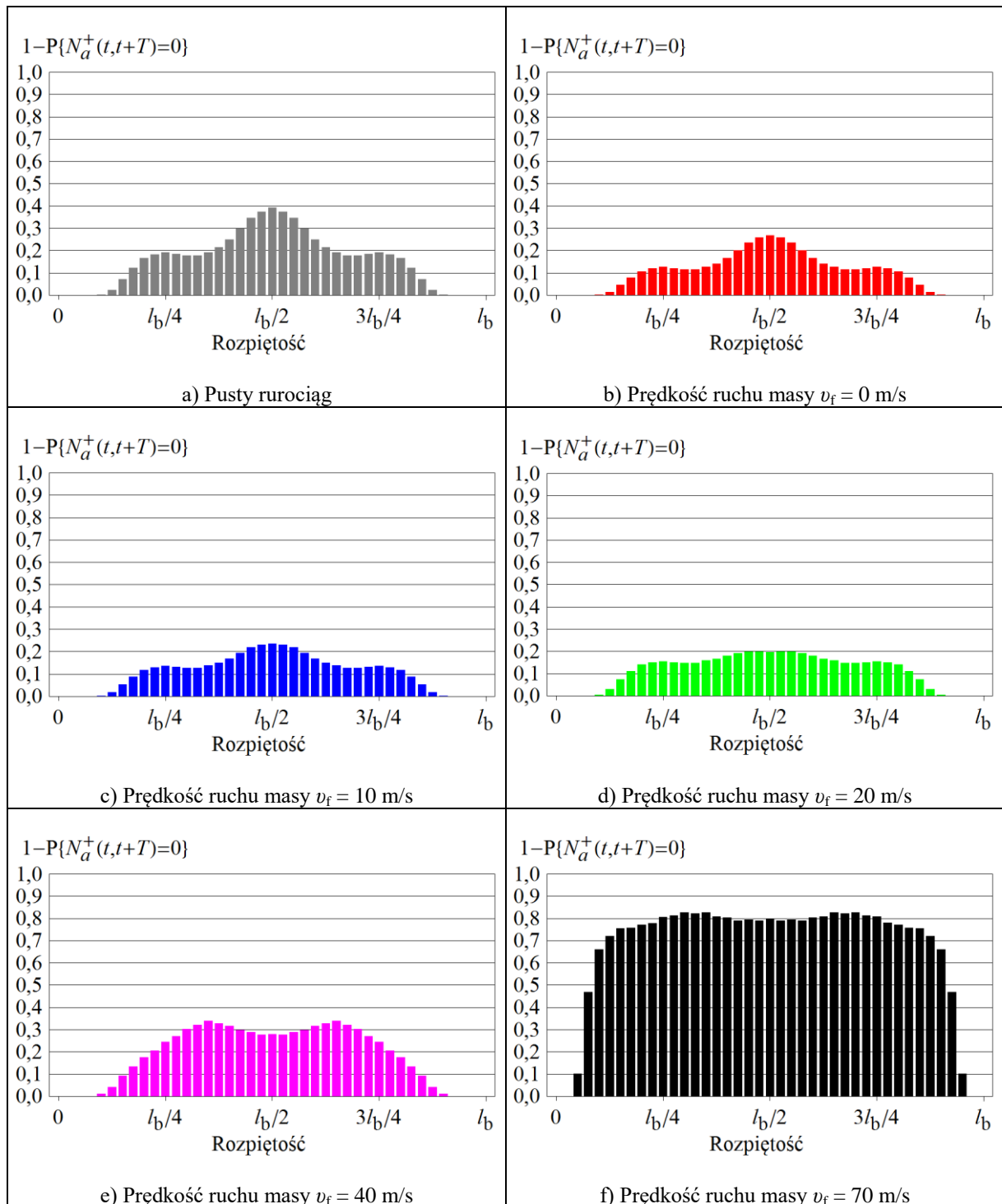


Rys. 6.8. Średnia intensywność przekroczeń poziomu a w punkcie 2, w zależności od prędkości ruchu masy w rurociągu

Analizując powyższe wyniki można stwierdzić, że napełnienie pustego rurociągu masą transportowanego medium powoduje spadek średniej liczby przekroczeń poziomu granicznego o prawie 40%. To oznacza, że całkowite wypełnienie rurociągu korzystnie wpływa na niezawodność mostu rurociągowego poddanego oddziaływaniu turbulentnego wiatru. Zwiększanie prędkości ruchu masy do $v_f = 40$ m/s praktycznie nie ma większego wpływu na otrzymane wyniki. Dopiero przy prędkościach bliskich prędkości krytycznej średnia liczba przekroczeń znacząco rośnie.

Na kolejnym rysunku (rys. 6.9) przedstawiono rozkłady prawdopodobieństwa awarii na długości mostu, obliczone według relacji (6.19) przy różnych prędkościach ruchu masy medium transportowanego przez rurociąg. Jako pierwszy (rys. 6.9a) pokazano w celach porównawczych rozkład prawdopodobieństwa awarii w sytuacji, gdy rurociąg jest pusty.

Prawdopodobieństwo awarii, czyli przekroczenia założonego poziomu przemieszczeń poziomych a obliczano w przedziale czasu $T = 60$ s.



Rys. 6.9. Rozkład prawdopodobieństwa przekroczenia założonego poziomu granicznego na długości dźwigara

Stwierdzono, że w zakresie prędkości ruchu masy od $v_f = 0$ m/s do $v_f = 20$ m/s prawdopodobieństwo przekroczenia ustalonego poziomu przemieszczeń jest większe w środku przęsła niż w $1/4$ i $3/4$ jego rozpiętości. Natomiast przy prędkościach $v_f = 40$ m/s

i większych, przekroje w otoczeniu $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ rozpiętości rurociągu są bardziej narażone na przekroczenie granicznego poziomu przemieszczeń poziomych niż przekroje położone w strefie przekroju środkowego. Obliczone prawdopodobieństwa przekroczeń są bardzo duże, szczególnie jeśli weźmiemy pod uwagę, że odnoszą się do krótkiego przedziału czasu, tj. 1 minuty. Wynika to z przyjęcia do obliczeń dużej wartości prędkości średniej wiatru, wynoszącej $U = 20$ m/s. W warunkach eksploatacyjnych takie prędkości mogą zdarzyć się tylko wyjątkowo, podczas huraganów. Analizując średnie intensywności przekroczeń (rys. 6.5 i 6.6), stwierdzono, że prawdopodobieństwa przekroczeń w przypadku mniejszych prędkości wiatru, poniżej $U = 10$ m/s, będą bliskie zeru (jak dla każdej prawidłowo zaprojektowanej konstrukcji).

6.4. Podsumowanie

We wstępie do tego rozdziału zaprezentowano stan wiedzy w zakresie metod oceny niezawodności konstrukcji, z podziałem na niezawodność w sensie problemu pierwszego przekroczenia oraz niezawodność zmęczeniową. Następnie skupiono uwagę na problemie niezawodności w sensie pierwszego przekroczenia i przedstawiono, na podstawie literatury, wyprowadzenia podstawowych formuł prowadzących do wyznaczenia prawdopodobieństwa awarii rozumianej jako przekroczenie ustalonego stanu granicznego. Formuły te zastosowano do analizy poziomych drgań giętnych rurociągu będącego elementem wiszącego mostu rurociągowego, znajdującego się pod wpływem jednoczesnego oddziaływania turbulencji wiatru oraz ruchu masy transportowanego medium. Zbadano średnie intensywności przekroczeń oraz prawdopodobieństwo awarii rozumianej jako pierwsze przekroczenie założonego poziomu granicznego.

Przytoczone wyniki analiz przekroczenia założonego poziomu granicznego przemieszczeń potwierdziły wcześniejsze spostrzeżenia z punktu 5.4, tzn. największy wpływ na prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu granicznego ma średnia prędkość wiatru. Dodatkowo obserwuje się gwałtowny wzrost prawdopodobieństwa przekroczenia poziomu granicznego w przypadku, gdy prędkość ruchu masy transportowanej przez rurociąg zbliża się do prędkości krytycznej v_{kr} .

Przedstawione w tym rozdziale wyniki obliczeń nie określają prawdopodobieństwa awarii w sensie rzeczywistej katastrofy mostu rurociągowego, ponieważ określenie wartości poziomu granicznego jak i czasu obserwacji było tutaj czysto umowne. W rzeczywistych analizach niezawodności mostu, wymienione parametry powinny być powiązane z ustaleniem na przykład dopuszczalnej wartości naprężeń w cięgnach, wieszakach lub samym rurociągu,

w realnym czasie życia konstrukcji. Opisane wyniki analiz numerycznych świadczą natomiast o możliwościach badań niezawodności wiszących mostów rurociągowych z zastosowaniem algorytmu analizy drgań losowych spowodowanych buffetingiem, który został sformułowany w rozdziale 5. Wszystkie procedury obliczeniowe przedstawiane w kolejnych rozdziałach rozprawy dają łącznie narzędzie numeryczne, które może służyć na przykład prognozowaniu niezawodności poszczególnych elementów konstrukcji. Takie badania w połączeniu z analizą niezawodności zmęczeniowej oraz wynikami z monitoringu rzeczywistych obiektów mogą dać jasne odpowiedzi na pytania związane z czasem eksploatacji konstrukcji lub wspomóc planowanie remontów.

7. Uwagi końcowe i kierunki dalszych badań

Realizacja postawionych na początku rozprawy celów odpowiada układowi niniejszej pracy. Celem początkowym było opracowanie takiego modelu obliczeniowego, który umożliwiałby obszerną analizę numeryczną drgań wiszącego mostu rurociągowego, w zakresie:

- drgań deterministycznych, liniowych i nieliniowych, spowodowanych ruchem półnieskończonego odcinka ciągłej masy reprezentującej ciecz transportowaną przez rurociąg;
- drgań stochastycznych powstałych pod wpływem oddziaływania turbulencji wiatru.

Ten cel zrealizowano w rozdziale 3 wykorzystując ogólną technikę podziału konstrukcji na podstruktury, która okazała się efektywną metodą modelowania rozważanego mostu, traktowanego jako złożony układ belkowo-ciężnowy. W rozdziale 4 przeprowadzono analizę liniowych i nieliniowych drgań deterministycznych spowodowanych ruchem masy cieczy przepływającej przez rurociąg, a w rozdziale 5 wykorzystano zlinearyzowany model obliczeniowy do analizy drgań stochastycznych spowodowanych turbulentnym oddziaływaniem wiatru. Wyniki przedstawione w rozdziale 5 wykorzystano w rozdziale 6 do określenia niezawodności konstrukcji mostu w sensie problemu pierwszego przekroczenia, co jest spełnieniem ostatniego z celów rozprawy, sformułowanych w rozdziale 1 na podstawie przeglądu problemów badawczych opisywanych w przedmiotowej literaturze (rozdział 2). Każdy rozdział zakończono podsumowaniem wraz z wnioskami szczegółowymi. Rozprawę uzupełnia obszerny Załącznik 1, w którym przedstawiono autorski przegląd zbudowanych na świecie rurociągowych mostów wiszących, skupiając uwagę na rozwoju ich konstrukcji.

Technika podstruktur, zastosowana w tej pracy do budowy modelu obliczeniowego rurociągowego mostu wiszącego, dała możliwość odrębnego wyboru metody wyprowadzenia równań ruchu każdego wydzielonego podukładu (podstruktury), co pozwoliło uwzględnić w modelowaniu indywidualne, specyficzne cechy wyróżniające dany podukład. W tym kontekście połączono w modelu obliczeniowym mostu dwie metody dyskretyzacji, tj. metodę elementów skończonych, zastosowaną do opisu drgań rurociągu i pylonów, z metodą kontynuinalną bazującą na globalnej aproksymacji przemieszczeń w sensie Ritza, którą użyto do sformułowania równań ruchu ciężgien. Przy takim podejściu, znacząco zredukowano liczbę dynamicznych stopni swobody, w porównaniu do numerycznego modelu wiszącego mostu rurociągowego zdefiniowanego w całości przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

Oprócz zastosowania techniki podziału na podstruktury z jawną procedurą ich agregacji, elementami oryginalnymi modelu obliczeniowego mostu są:

- ciągły model ciężna, uwzględniający ruch podpór, punktowe obciążenia wieszakami, wstępny naciąg, duży zwis statyczny i duże przemieszczenia;
- model dynamiczny rurociągu poddanego działaniu ruchomego, ciągłego obciążenia inercyjnego, sformułowany metodą elementów skończonych w ujęciu Galerkinia i bazujący na nieliniowym równaniu zginania belki Eulera-Bernoulliego.

Warto tu dodać, że zastosowanie techniki podstruktur znacząco ułatwia ewentualny rozwój modelu w przyszłych badaniach, na przykład poprzez:

- wprowadzenie nowych podstruktur (np. pomostu i/lub rurociągu dwuprzewodowego);
- uwzględnienie interakcji pomiędzy przepływającą cieczą i rurociągiem w wydzielonym modelu dynamicznym rurociągu;
- udoskonalenie ruchomego obciążenia rurociągu (np. uwzględnienie urządzenia czyszczącego tj. tzw. świnki) lub zmianę jego typu (np. na zestaw pojazdów kolejowych).

Przykładem wykorzystania możliwości obliczeniowych jakie daje przedstawiony w rozprawie model obliczeniowy mostu rurociągowego, są wyniki badań numerycznych przedstawione w rozdziałach 4, 5 i 6. Efektywność prezentowanych w tych rozdziałach metod analizy drgań zależy w dużym stopniu od szybkości wyznaczania przebiegów czasowych drgań (w przypadku ruchomego obciążenia rurociągu przemieszczającą się cieczą), bądź od czasu potrzebnego do wyznaczenia przebiegów impulsowych funkcji przejścia aż do ich dostatecznie dokładnego wygaszenia (w przypadku wzbudzenia turbulentnym oddziaływaniem wiatru). W obu przypadkach, całkowity czas potrzebny do wygenerowania pojedynczego przebiegu jest bardzo długi ze względu na małe tłumienie. W rezultacie niezbędne jest rozwiązywanie bardzo dużego układu równań w bardzo dużej liczbie kroków całkowania, dlatego za nadrzędne kryterium wyboru metody modelowania układu przyjęto redukcję liczby równań, która z kolei zależy od liczby dynamicznych stopni swobody. Kryterium to z powodzeniem spełniła zastosowana technika podstruktur wraz z przyjętymi metodami modelowania wyróżnionych podukładów. Przedstawione wyniki badań numerycznych, ilustrujące możliwości obliczeniowe, które stwarza opracowany model numeryczny mostu, świadczą o słuszności pierwszej tezy pracy, tj. *Technika podstruktur jest efektywną metodą modelowania złożonych konstrukcji belkowo-ciężnowych na potrzeby*

analiz drgań spowodowanych działaniem deterministycznych i losowych obciążeń zmiennych w czasie.

Zaprezentowany w rozprawie model cieczy transportowanej przez rurociąg skoncentrowano na uwzględnieniu jej masy i prędkości przepływu. Wykazano, że wyprowadzone składniki równania ruchu, wynikające z obciążenia ciągłą ruchomą masą, wpływają na wszystkie parametry dynamiczne rurociągu, a stąd i całego mostu. W przypadku przepływu ustalonego (gdy rurociąg jest w całości wypełniony ruchomą masą), od prędkości przepływu zależą częstości własne drgań mostu stowarzyszone z formami własnymi, w których dominują drgania rurociągu. Częstości te maleją wraz z prędkością przepływu, jednak w zakresie prędkości realnych (np. w ropociągu Trans-Alaska 1,7 m/s, ogólnie do 5 m/s) pozostają praktycznie bez zmian. W przypadku analizy drgań spowodowanych napełnianiem lub opróżnianiem rurociągu z zadaną prędkością stwierdzono, że do prędkości napływu/odpływu cieczy 20 m/s amplitudy drgań pionowych rurociągu są w zasadzie pomijalne w porównaniu z przemieszczeniami statycznymi. Zatem, jeżeli zestawimy tę prędkość z rzeczywistymi prędkościami przepływu w rurociągach, to efekty dynamiczne przepływu cieczy są zapewne interesujące z poznawczego punktu widzenia, jednak ich odniesienie do realnych problemów jest ograniczone. Podobny wniosek sformułowano w odniesieniu do efektów nieliniowych wynikających z dużych przemieszczeń cięgien głównych i wiatrowych oraz rurociągu, zarówno w zagadnieniu dynamicznym jak i statycznym. Mają one znaczenie jedynie w przypadku dużych prędkości przepływu, nieosiągalnych w praktyce, jeśli ograniczymy zakres zagadnienia do rzeczywistych przepływów cieczy w rurociągach. Ten wniosek ma duże znaczenie dla praktycznych obliczeń odpowiedzi konstrukcji na przepływ cieczy, ponieważ uzasadnia ich wykonywanie z ograniczeniem do zagadnienia liniowego, wyłączając stany, w których przemieszczenia są faktycznie duże względem rozpiętości mostu.

Kolejną częścią niniejszej rozprawy była analiza drgań spowodowanych losową turbulencją wiatru. Ograniczenie modelu mostu do rurociągów jednoprzewodowych pozwoliło uniknąć wyznaczania współczynników oporu aerodynamicznego belki rurociągowej, ponieważ w przypadku przekroju rurowego współczynniki te są znane. W ogólnym przypadku, współczynniki oporu aerodynamicznego należy wyznaczać indywidualnie dla każdego typu dźwigara mostowego za pomocą metod eksperymentalnych (w tunelach aerodynamicznych) lub numerycznych (np. metodami typu CFD – *Computational Fluid Dynamics*). Sformułowany we wcześniejszym rozdziale model cieczy, pomimo swojej prostoty dał możliwość analizy jednoczesnego oddziaływania przepływu cieczy (w stanie

ustalonym) oraz turbulencji wiatru. Badania numeryczne ograniczono do drgań liniowych, z uwagi na zastosowaną metodę analizy drgań stochastycznych, wykorzystującą zasadę superpozycji. To ograniczenie uzasadnia się wynikami badań numerycznych przedstawionych w rozdziale 4, które wykazały, że pominięcie nieliniowości geometrycznej cięgien i rurociągu jest dopuszczalne w zakresie prędkości ruchu masy cieczy do 40 m/s. Rozważono zagadnienie wpływu prędkości przepływu cieczy na charakterystyki probabilistyczne drgań poziomych rurociągu, wymuszonych turbulentnym oddziaływaniem wiatru. Poznanie tego zagadnienia w kontekście wiszących mostów rurociągowych jest szczególnie ważne, ponieważ jak już wcześniej wspomniano, przepływ masy cieczy powoduje modyfikację sztywności, bezwładności oraz tłumienia belki rurociągowej, a odpowiedź każdej konstrukcji na dowolny typ oddziaływania wiatru silnie zależy od wymienionych parametrów układu dynamicznego. Z tego powodu przedstawione analizy numeryczne są unikalne i stanowią oryginalny element tej pracy.

Wybór problemu pierwszego przekroczenia, jako fragmentu badań nad niezawodnością konstrukcji mostu, był naturalną konsekwencją przeprowadzonej wcześniej analizy drgań stochastycznych wynikających z oddziaływania losowej turbulencji wiatru. Wyniki obliczeń uzyskane podczas numerycznego całkowania równań w rozdziale 5 (w zakresie przemieszczeń i prędkości drgań) były bowiem wystarczające do obliczenia wartości oczekiwanych i wariancji procesów stochastycznych opisujących drgania i prędkość drgań poziomych rurociągu w stanie ustalonym. To z kolei pozwoliło wyznaczyć miary niezawodności bazujące na wzorze Rice'a, tj. średnią intensywność przekroczeń w jednostce czasu i prawdopodobieństwo awarii rozumianej jako pierwsze przekroczenie założonego poziomu granicznego. Nie badano niezawodności zmęczeniowej, ponieważ to zagadnienie wymagałoby m.in. wyznaczenia szerokości pasma procesu, co znacząco rozszerzyłoby zakres badań.

Przedstawione rezultaty analiz drgań deterministycznych oraz stochastycznych i niezawodności w sensie pierwszego przekroczenia, wraz z badaniami wpływu ruchomej masy na wyniki są udowodnieniem drugiej tezy postawionej w pracy: *Parametry dynamiczne rurociągowych mostów wiszących, a w szczególności charakterystyki drgań losowych spowodowanych turbulencją wiatru i wyznaczone na tej podstawie prawdopodobieństwo przekroczenia przemieszczeń granicznych zależą od prędkości przepływu cieczy przez rurociąg, jednak w realnym zakresie prędkości jej wpływ nie jest znaczący.*

Na koniec należy podkreślić, że przedstawiony w rozprawie algorytm techniki podstruktur, wraz z definicją modelu poszczególnych podstruktur, a zwłaszcza cięgien i belki,

został tak sformułowany, że może stanowić podstawę do budowy dynamicznego modelu dowolnej konstrukcji belkowo-ciężnowej. Zarówno przestrzenny model ciężna jak i belki zostały zdefiniowane w sposób pozwalający na ich rozwinięcie i dostosowanie do szczegółowych wymagań. Jak wspomniano wcześniej, dotyczy to także opracowanych modeli obciążeń cieżką oraz turbulencją wiatru, które mogą być rozbudowane i zmodyfikowane na potrzeby proponowanych analiz numerycznych.

Dalsze badania autora mogą być ukierunkowane zarówno na udoskonalenie przedstawionych metod modelowania jak i zastosowanie obecnego modelu do rozwiązania zagadnień szczegółowych związanych z dynamiką konstrukcji belkowo-ciężnowych. Zakres prac może być następujący:

- uzupełnienie modelu ruociągu o drgania skrętne i podłużne;
- rozbudowanie obciążenia ruchomą cieżką o wpływ ciśnienia i lepkości cieżki na styku z ruociągiem;
- szczegółowa analiza drgań ruociągowych mostów wiszących, uwzględniająca odkształcalność pylonów oraz odciaży;
- uwzględnienie sił samowzbudnych oraz składowej turbulencji w kierunku prostopadłym do kierunku wiatru, w analizie drgań ruociągowych mostów wiszących spowodowanych wzbudzeniem turbulentnym;
- analiza możliwości wystąpienia drgań mostów ruociągowych spowodowanych wzbudzeniem wirowym, oraz sposobów przeciwdziałania;
- ocena niezawodności zmęczeniowej mostów ruociągowych w aspekcie jednoczesnego oddziaływania turbulencji wiatru oraz przepływu cieżki.

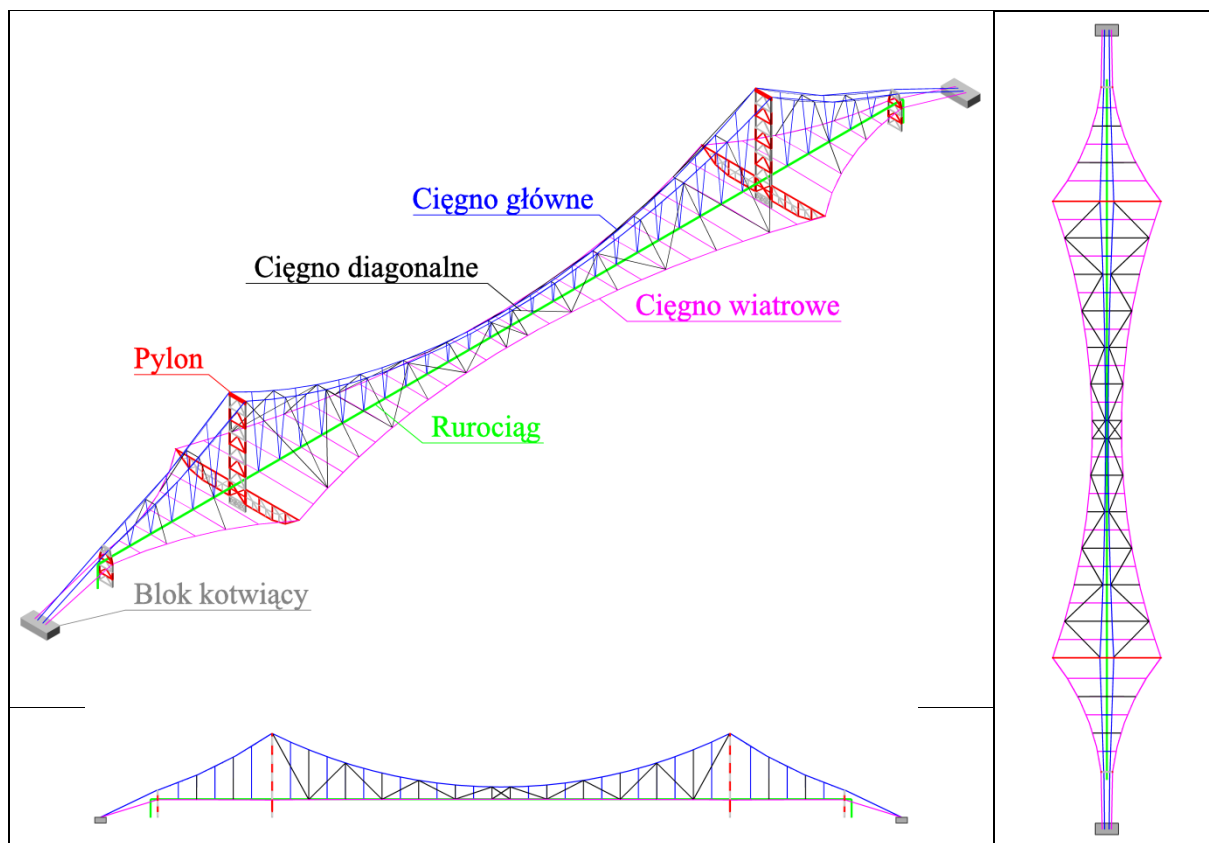
ZAŁĄCZNIK 1

Rozwój i klasyfikacja rurociągowych mostów wiszących.

Pierwszy wiszący most rurociągowy o dużej rozpiętości został zbudowany w 1926 roku nad rzeką Red River w pobliżu Byers w stanie Texas na terenie Stanów Zjednoczonych. Most ten, o całkowitej długości 628 m, został zaprojektowany przez biuro projektowe Matthews & Kenan. Do roku 1931 opracowano w tym biurze projekty kolejnych sześciu mostów o podobnej konstrukcji: nad rzekami Beaver oraz Cimarron w Panhandle w Oklahomie, nad rzeką Little Blue w pobliżu Hollenberg w Kansas, nad rzekami Big Blue, Platte i Elkhorn, wszystkie w stanie Nebraska [18]. Most nad rzeką Little Blue o 152-metrowym przęśle głównym oraz przęsłach bocznych o długości 70 m reprezentuje wszystkie typowe cechy mostów budowanych w tamtym okresie. Ralph Alan Dusseau, autor wielu prac związanych z mostami rurociągowymi, nazwał ten typ mostu „klasycznym rurociągowym mostem wiszącym” [54]. Cechą charakterystyczną tego typu mostów jest jedno przęsło główne oraz opcjonalnie jedno lub dwa przęsła boczne podparte kratownicowymi podporami pośrednimi. Podpory główne stanowią tutaj dwa kratownicowe pylony. Po obu stronach pylonu mocowane są wspornikowe ramiona, służące jako wsparcie dla cięgien „wiatrowych”, leżących w płaszczyźnie poziomej lub nieznacznie nachylonej względem poziomu. Cięgna wiatrowe połączone z rurociągiem za pomocą wieszaków zwiększają sztywność boczną konstrukcji. Dwa cięgna główne wraz z wieszakami leżą w nachylonych płaszczyznach zwróconych ku rurociągowi (rys. Z1.1). Cięgna diagonalne, które łączą cięgna główne i wiatrowe, mają za zadanie przenieść ciężar cięgien wiatrowych oraz zwiększyć sztywność konstrukcji. Stosowane są także cięgna diagonalne łączące cięgna główne i rurociąg, które poprzez usztywnienie konstrukcji mostu służą zmniejszeniu efektów dynamicznych związanych z oddziaływaniami wiatru lub trzęsieniami ziemi.

Kolejne lata to dalszy rozwój rurociągowych mostów wiszących autorstwa biura Matthews & Kenan, budowanych na terenie Stanów Zjednoczonych. W tym czasie wznoszono mosty o coraz większych rozpiętościach przęsła głównego, zachowując przy tym układy konstrukcyjne bardzo podobne do wcześniejszych. W roku 1931 powstał most nad rzeką South Canadian w Borger w Texasie. Składał się on z ośmiu przęseł, każde o długości 97 m, oraz dwóch przęseł bocznych o długości 49 m. W następnym roku wybudowano most nad rzeką Missouri w Ponca w Nebrasce, z przęsłem głównym o długości 390 m, rozciągniętym pomiędzy pylonami o wysokości 40 m i masie 82 t, natomiast rozpiętość ramion niezbędnych do umocowania cięgien wiatrowych przekraczała 42 m. W 1940 roku

biuro Matthews & Kenan zaprojektowało most nad rzeką Missouri w Sioux City w stanie Iowa, w którym przekroczono barierę 400 m. Długość głównego przęsła tego mostu wynosiła 402 m, przęsła bocznych 201 m oraz zakotwień 137 m, dając razem odległość 1079 m. Wysokość pylonów wynosiła 35 m, podpór pośrednich 15 m, a rozpiętość ramion pylonów sięgała 47 m. Co ciekawe, most został wzniesiony w zaledwie 135 dni roboczych [18].



Rys. Z1.1. Widok klasycznego wiszącego mostu ruropiętowego

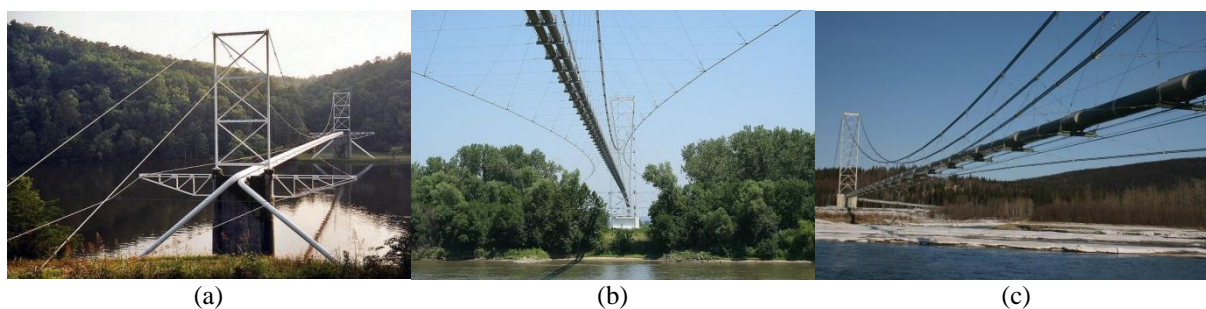
Lata powojenne przyniosły gwałtowny wzrost liczby budowanych mostów ruropiętowych w Stanach Zjednoczonych, możliwy między innymi dzięki znacznemu postępowi wiedzy na temat obciążeń aerodynamicznych. W 1947 roku powstał gazociąg z Teksasu do Kalifornii, a wraz z nim, jako niezbędny element projektu, pięć mostów ruropiętowych: nad rzeką Canadian w stanie Texas, Pecos w stanie New Mexico, San Pedro i Gila w stanie Arizona oraz nad rzeką Colorado w Kalifornii. W przypadku mostu nad rzeką Pecos, przęsło główne miało długość 146 m, a rozpiętości przęseł pozostałych mostów zawierały się w przedziale 311-366 m. Mosty nad rzekami Colorado oraz Gila, krótko po budowie zostały wyposażone w trójkątne skrzydełka wiatrowe przyspawane do ruropiętka w celu ograniczenia pionowych drgań spowodowanych wzbudzeniem wirowym [3].

Podczas budowy rurociągu z Teksasu do Nowego Yorku w latach 1950-1951 ujęto w projekcie cztery wiszące mosty rurociągowy. Każdy z tych mostów miał za zadanie przenieść dwa rurociągi o średnicy 76 cm. Były to mosty przeprowadzone przez rzeki Colorado i Brazos w stanie Texas, Atchafalaya w Melville, Louisiana oraz Coosa w Clayton, Alabama (rys. Z1.2a). Ze względu na często pojawiające się pionowe drgania rurociągu, spowodowane oddziaływaniem wiatru i charakteryzujące się dużą amplitudą, most nad rzeką Coosa został dodatkowo wzmocniony ukośnymi odciągami łączącymi ciężną główną i rurociąg [126]. Drugim wartym uwagi mostem z tego okresu jest most nad rzeką Atchafalaya w Melville, zaprojektowany ponownie przez zespół inżynierów Matthews & Keenan. W roku 1951 przejął on miano najdłuższego wiszącego mostu rurociągowego na świecie. Odległość między pylonami tego mostu wynosi 610 m, a długości przęsła bocznych 198 m i 304 m, co daje łącznie rozpiętość 1112 m (1426 m między blokami kotwiącymi). Cztery lata później powstał kolejny wiszący most rurociągowy wybudowany nad rzeką Mississippi w Grand Tower w Illinois, o długości głównego przęsła ponad 655 m. Jest to obecnie najdłuższy most rurociągowy na terenie USA. Co ciekawe, w przypadku tego mostu nie zastosowano podpór pośrednich między pylonami a zakotwieniem. Dystans między zakotwieniami ciężni tego mostu wynosi 1125 m, a rozpiętość ramion „wiatrowych” – 100 m znacznie przekracza wysokość pylonów – 75 m. Warto zwrócić uwagę, że w trakcie budowy tego mostu napotkano na problemy z posadowieniem jednego z pylonów, z uwagi na bardzo trudne warunki gruntowo-wodne. W związku z tym zastosowano kesony do wykonania fundamentów na głębokości 50 m, a ilość zużytego betonu sięgała 5500 m³ [100]. W 1957 roku ukończono budowę innego mostu rurociągowego o dużej rozpiętości, położonego nad rzeką Missouri w Plattsmouth w Nebrasce (rys. Z1.2b). Pomimo, iż rozmiary tego mostu nie są tak imponujące, to jest wart omówienia, ma bowiem układ niesymetryczny ze względu na różne warunki topograficzne po obu stronach rzeki. Przęsło główne ma długość 457 m, przęsło boczne 229 m, a po drugiej stronie rzeki wykonano przęsło kratownicowe o długości 47 m, będące przedłużeniem pylonu. Całkowita odległość między blokami kotwiącymi wynosi 1015 m [107].

W latach siedemdziesiątych XX wieku, podczas budowy rurociągu Trans-Alaska wybudowano most rurociągowy nad rzeką Tanana w pobliżu Fairbanks na Alasce (rys. Z1.2c). Ten jedoprzęsłowy most o klasycznej konstrukcji i rozpiętości 366 m przeprowadza rurociąg o średnicy wynoszącej aż 122 cm, jednej z największych w wiszących mostach rurociągowych. Podobny most o rozpiętości głównego przęsła 235 m został wybudowany na północ od koła podbiegunowego w Hammond na Alasce. Robotnicy

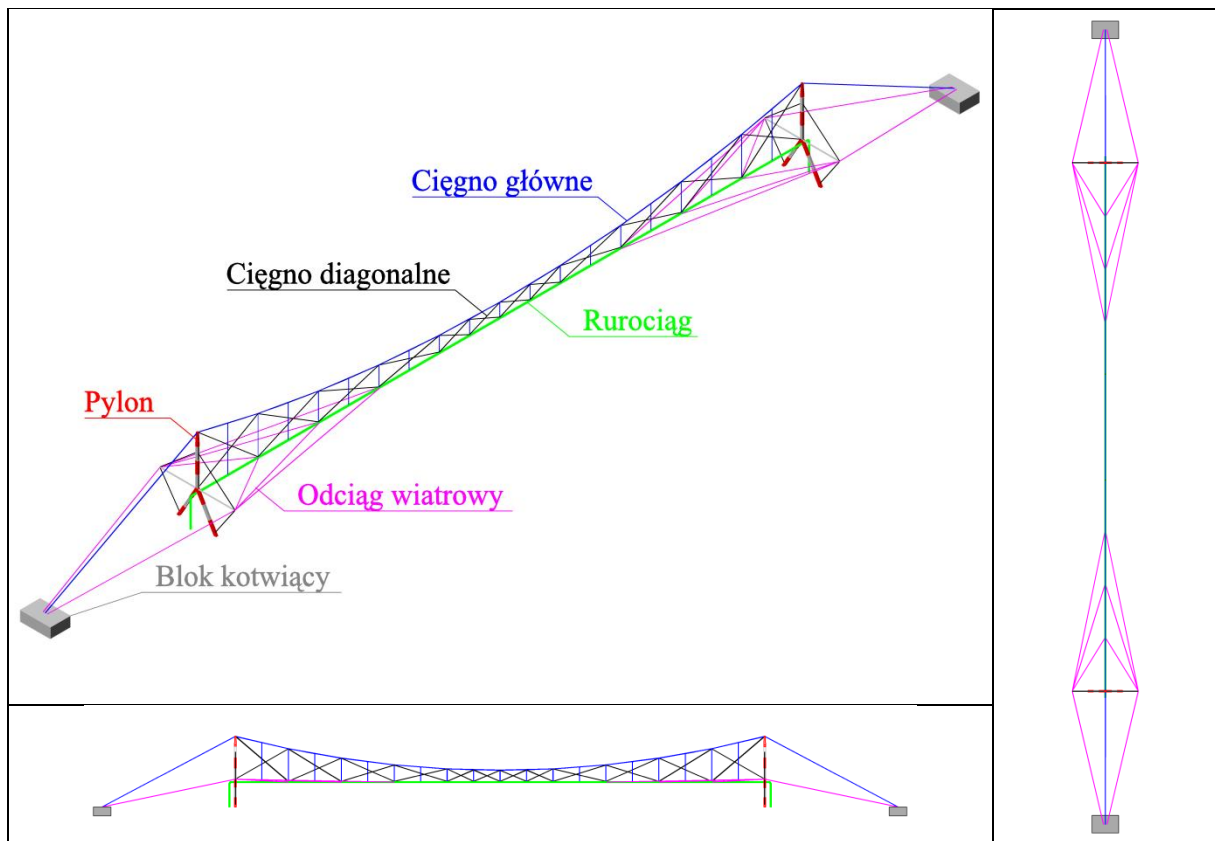
pracujący przy budowie tego mostu musieli się zmagać z temperaturą dochodzącą do -55°C . Budowę obu mostów wraz z rurociągiem przez Alaskę ukończono w 1977 roku [117].

Warto jeszcze wspomnieć o dwóch klasycznych rurociągowych mostach wiszących wybudowanych na terytorium USA. Są to: most przenoszący rurociąg do transportu gazu ziemnego w rezerwacie Flaming Gorge w Wyoming, o rozpiętości 585 m, oraz most nad rzeką Skagit w Washington, o rozpiętości 213 m. Cechą wyróżniającą oba mosty jest duże nachylenie rurociągu, wynikające z różnic wysokości terenu po obu stronach przeszkody [117].



Rys. Z1.2 a) most w Clayton nad rzeką Coosa, Alabama, USA (fot. Patrick S. O'Donnell) {4},
b) most w Plattsmouth nad rzeką Missouri, Nebraska, USA (fot. Patrick S. O'Donnell) {4},
c) most w pobliżu Fairbanks nad rzeką Tanana, Alaska, USA (fot. Patrick S. O'Donnell) {5}

Ze względu na bardzo duży koszt budowy oraz utrzymania mostów o klasycznym układzie konstrukcyjnym, w kolejnych latach zaczęto poszukiwać innych typów konstrukcji, bardziej ekonomicznych. Pierwszym takim mostem był most wybudowany w 1962 roku nad rzeką Ohio, w Portsmouth w stanie Ohio, zaprojektowany przez W.F. Appelt. Jest to jeden z największych i najcięższych istniejących wiszących mostów rurociągowych. Most ten różnił się od konstrukcji budowanych wcześniej. Dusseau w swoich pracach na temat rurociągów odróżnił ten most od powstałych przed rokiem 1962, nazywając go „nowoczesnym rurociągowym mostem wiszącym” [54]. Jedną z cech charakterystycznych tego typu mostów są podpory o przekroju zamkniętym, w kształcie odwróconej litery Y, do których opcjonalnie mocuje się ramiona wiatrowe. Ramiona te stanowią podparcie dla zestawu odciągów wiatrowych leżących w płaszczyźnie poziomej. Za przeniesienie obciążeń pionowych odpowiedzialne jest jedno cięgno główne leżące wraz z wieszakami w płaszczyźnie pionowej. Stosowane są także cięgna diagonalne łączące cięgna główne i rurociąg, które zmniejszają podatność konstrukcji na oddziaływanie wiatru. Nie stosuje się podpór pośrednich i przęseł bocznych (rys. Z1.3).

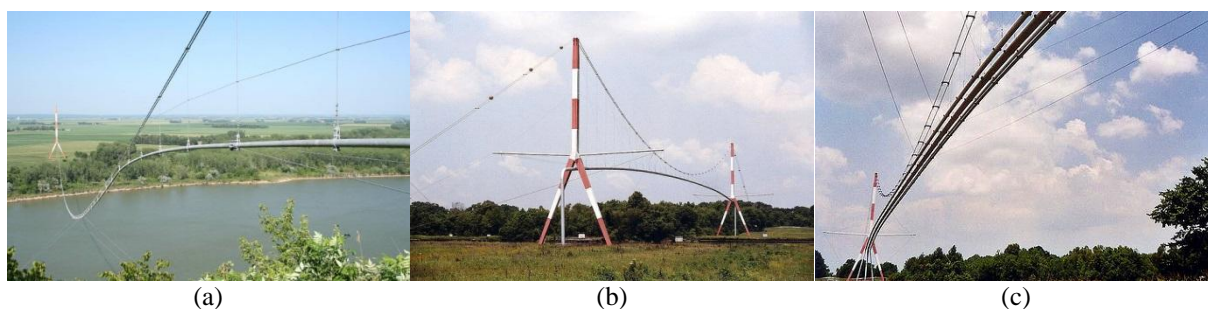


Rys. Z1.3. Widok nowoczesnego wiszącego mostu ruropięgowego

We wspomnianym moście nad rzeką Ohio, odległość między pylonami wynosi 635 m a wysokość pylonów sięga 82 m. Siła zrywająca ciężna głównego wynosi 20 MN. Godna uwagi jest technologia wznoszenia tego mostu, utrudniona przez ograniczenia terenu, które nie dawały możliwości nasunięcia ruropięgu na most, prostopadle do brzegu rzeki. Pylony mostu złożono na miejscu budowy z elementów o długości 12 m, następnie zamocowano je zawiasowo do fundamentów, wierzchołkiem w stronę rzeki. Rurociąg o długości 701 m złożono na brzegu rzeki, równoległe do nurtu. Został on przetestowany pod ciśnieniem w celu kontroli szczelności i pomalowany. W kolejnym kroku przymocowano do ruropięgu wieszaki razem z ciężnem głównym i podniesiono całość za pomocą 17 dźwigów rozstawionych w równych odległościach. Rurociąg nasuwany pod określonym kątem odbierano następnie na rzece z użyciem sześciu barek. Później zakotwiono ciężno główne do wierzchołków pylonów leżących poziomo po obu stronach rzeki i rozpoczęto proces ustawiania podpór do pozycji pionowej. Rurociąg podczepiony za pomocą wieszaków do naciąganego ciężna głównego został w ten sposób uniesiony na wysokość 82 m nad poziomem rzeki. W ostatnim kroku, drugi ruropięg zaczopowano z obu stron i nasunięto na rzekę, a następnie wciągnięto go za pomocą lin opuszczonych z podwieszono już ruropięgu i umocowano pod pierwszym ruropięgiem [18].

Most w Portsmouth nie był pierwszym, gdzie zastosowano pylony w kształcie odwróconej litery Y. Taki pylon zastosowano wcześniej w wiszącym moście rurociągowym wybudowanym w 1961 roku w Ponca, na granicy stanów Nebraska i South Dakota. Most ten charakteryzował się niesymetrycznym schematem konstrukcyjnym, w którym ze względu na dużą różnicę wysokości terenu po obu stronach rzeki Missouri, na jednej stronie wzniesiono wysoki pylon w kształcie odwróconej litery Y, a na drugim brzegu niski pylon w kształcie litery A. Inną cechą wyróżniającą ten most była prawie paraboliczna trasa rurociągu, zgodna z trasą cięgien głównych na niemal całej rozpiętości (rys. Z1.4a). Co ciekawe, odległość między pylonami wynosiła ponad 800 m i byłby to najdłuższy istniejący most rurociągowy na świecie, gdyby nie został rozebrany w 2007 roku.

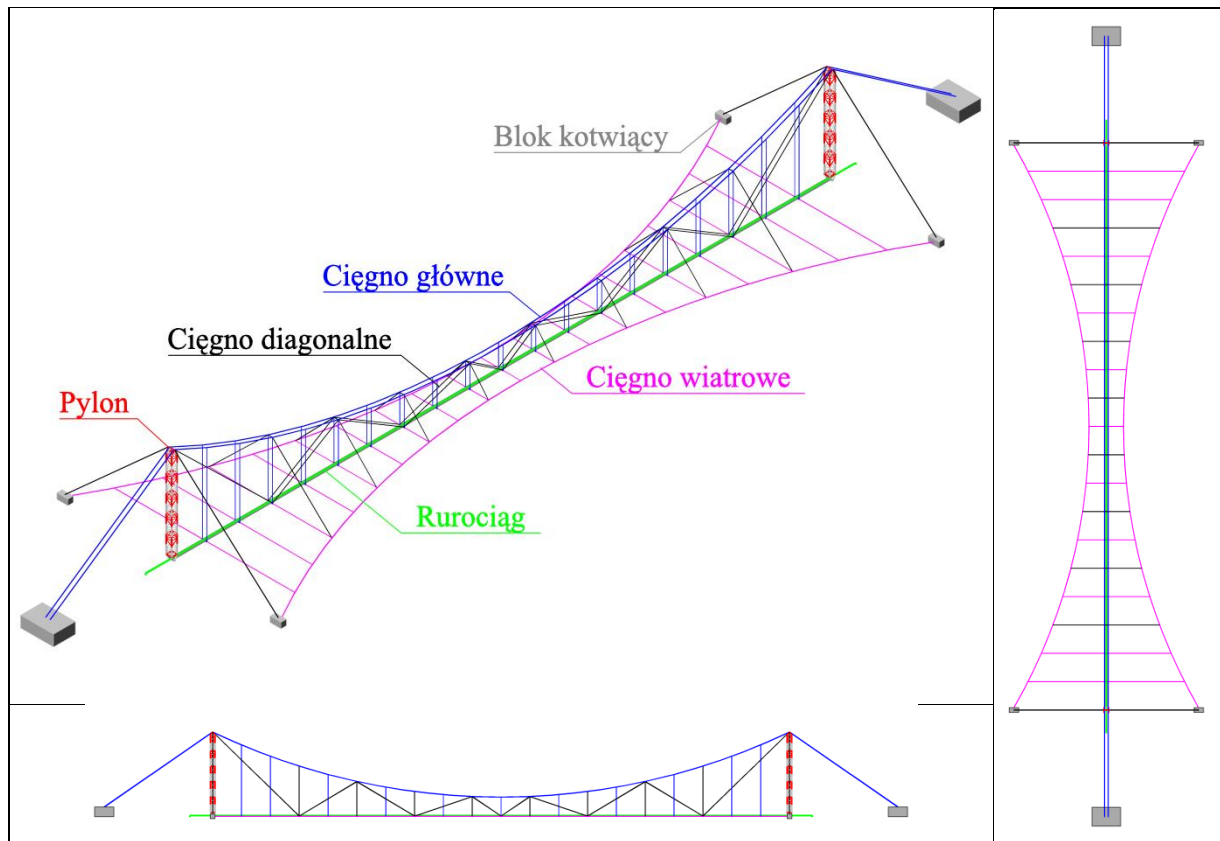
W latach 1975 do 1981 wybudowano osiem mostów rurociągowych wzdłuż Wax Lake Outlet w pobliżu St. Mary Parrish w Louisianie (rys. Z1.4bc). Są to mosty typu nowoczesnego, o bardzo podobnych układach konstrukcyjnych i rozpiętościach przęsł między 245 m a 305 m, leżące bardzo blisko siebie (w odległościach około 1 km). Dwa z tych mostów: Calumet Loop Aerial Crossing o rozpiętości 245 m oraz Patterson Loop Aerial Crossing o długości przęsła 259 m, krótko po ukończeniu budowy zaczęły wykazywać duże pionowe drgania pod wpływem działania wiatru. W celu zredukowania amplitudy tych drgań zamontowano ukośne liny łączące cięgna główne oraz rurociąg, powielając rozwiązanie zastosowane wcześniej w moście nad rzeką Coosa [46].



Rys. Z1.4 a) most w Ponca nad rzeką Missouri, Nebraska, USA (fot. Patrick S. O'Donnell) {4},
b) most nad kanałem Wax Lake Outlet, Louisiana, USA (fot. Patrick S. O'Donnell) {4},
c) most nad kanałem Wax Lake Outlet, Louisiana, USA (fot. Patrick S. O'Donnell) {4}

Wiszące mosty rurociągowy budowano także w Kanadzie. W prowincji Alberta, biuro Matthews & Keenan znane ze Stanów Zjednoczonych zaprojektowało most rurociągowy nad rzeką Saskatchewan w pobliżu Empress, o rozpiętości 320 m. Także w Alberta wzniesiono dwa wiszące mosty rurociągowy nad rzeką Bow w pobliżu Cochrane, o długościach przęsł 183 i 201 m. Natomiast w prowincji British Columbia, podczas prac nad linią rurociągową, wybudowano pięć mostów, których projektantem była firma T. Lamb,

McManus & Associates: nad rzeką Fraser – dwa mosty o rozpiętości 183 m, jeden 393-metrowy i drugi 448-metrowy oraz most o rozpiętości 510 m nad rzeką Peace (rys. Z1.6a). Bardzo ważnym elementem podczas projektowania tych mostów było uwzględnienie zjawiska osadzania się lodu na rurociągach w analizie aerodynamicznej. Okazało się, że podwójny wzrost wagi rurociągu spowodowany oblodzeniem wzmacnia odporność na obciążenie wiatrem o 160% [117].

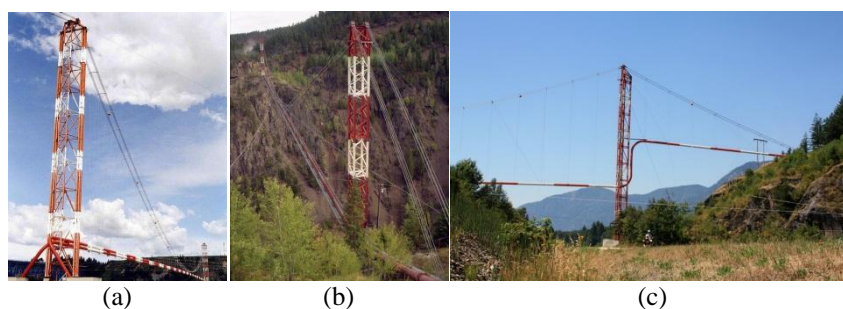


Rys. Z1.5. Widok wiszącego mostu rurociągowego z pylonem w kształcie obelisku

Wspomniane mosty, chociaż podobne pod względem konstrukcji do rurociągowych mostów wiszących budowanych na terenie Stanów Zjednoczonych, to jednak różniły się od nich w kilku aspektach. W kanadyjskich mostach wykonywano pylony jako słupy kratownicowe o przekroju poprzecznym w kształcie kwadratu lub trójkąta, czyli o kształcie obelisku. W kierunku poprzecznym pylony wspierano odciągami bocznymi. Za przenoszenie ciężaru rurociągu oraz ewentualnych chodników serwisowych odpowiedzialne były zazwyczaj dwa położone blisko siebie ciężna główne leżące wraz z wieszakami w prawie pionowych płaszczyznach. Ciężni głównych nie przeciągano nad podporami, mocowano je na szczytach pylonów, a zakotwienie odbywało się poprzez osobne odciążi przytwierdzone do wierzchołków słupów. Ciężna wiatrowe kotwiono bezpośrednio w blokach betonowych

lub wspierano na konstrukcjach niezwiązanych z pylonem. Ciężna diagonalne, łączące ciężna główne i wiatrowe oraz ciężna główne i rurociąg, spełniały tę samą rolę jak w przypadku klasycznych mostów rurociągowych (rys. Z1.5).

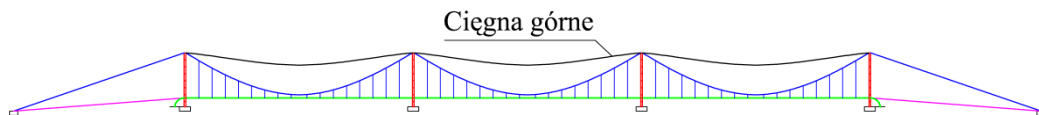
Korzyści płynące z zastosowania lekkich pylonów w kształcie obelisków widać zwłaszcza w moście wybudowanym w roku 1972 na terenie kopalni miedzi, nad głębokim na 183 m kanionem rzeki Similkameen w pobliżu Princeton w prowincji British Columbia (rys. Z1.6b), gdzie teren przeznaczony na budowę mostu był bardzo ograniczony. Na początku, projektanci firmy Bechtel Corp. rozważali budowę mostu łukowego, jednak most wiszący okazał się bardziej konkurencyjny ze względu na mniejszy koszt i szybszy czas realizacji. Wybudowany most przeprowadza trzy rurociągi umieszczone w układzie pionowym oraz chodnik roboczy, odległość między pylonami wynosi 290 m, a nachylenie pomostu 10%. Ze względu na różnice poziomów po obu stronach kanionu, wysokość słupów nie jest jednakowa i wynosi 41 oraz 37 m. System parabolicznych bocznych ciężien wiatrowych, kotwionych do brzegów kanionu, nie jest symetryczny z uwagi na ukształtowanie terenu [21], [22]. Drugi most o niemal identycznej budowie i rozpiętości 404 m jest oddalony o 800 m od pierwszego. Jednak ten powstały w roku 1980 most, zaprojektowany przez biura Buckland & Taylor oraz Robert McLellan & Co, przenosi taśmociąg do transportu rudy. Innym wartym wspomnienia jest most rurociągowy wybudowany w 1991 roku w Hope, w prowincji British Columbia nad rzeką Fraser (rys. Z1.6c). Rozpiętość tego mostu prowadzącego wodociąg wynosi 200 m, a projekt sporządziło biuro Buckland & Taylor.



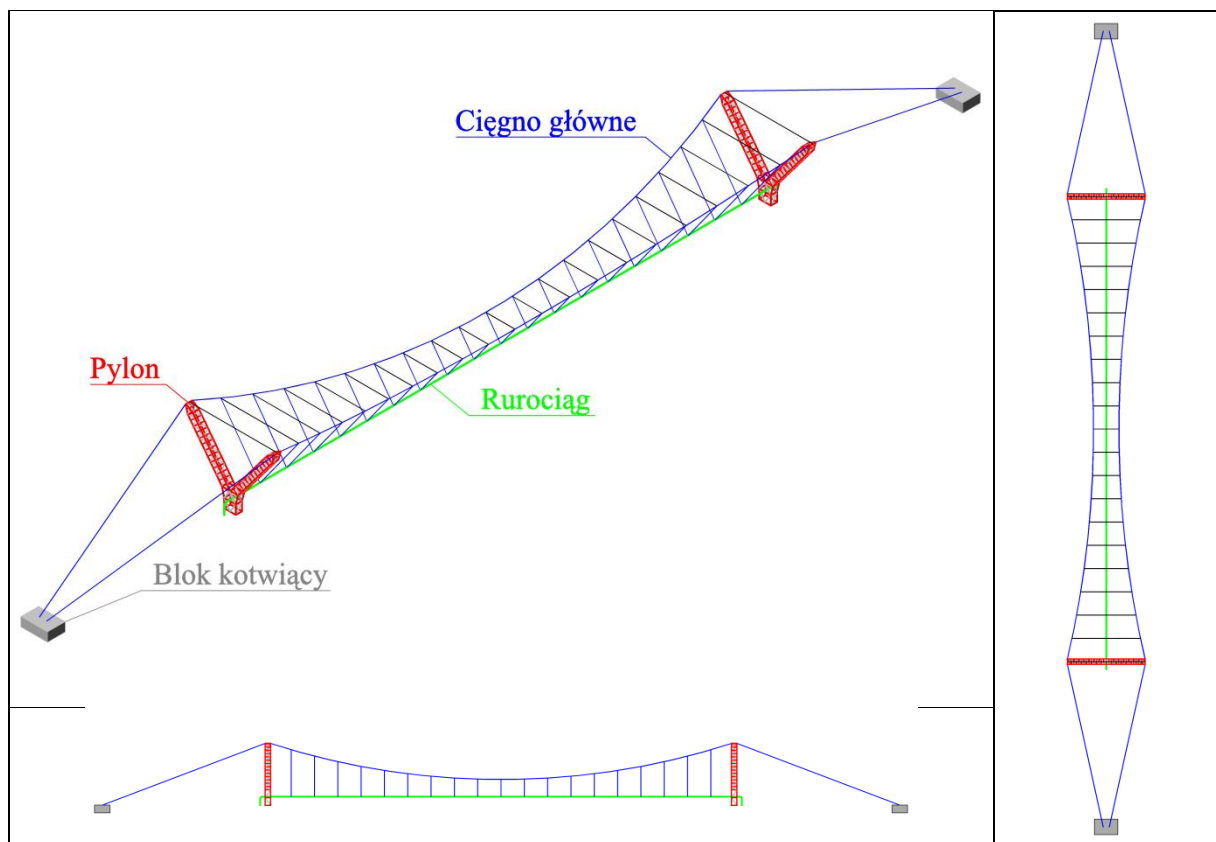
Rys. Z1.6 a) most w Taylor nad rzeką Peace, British Columbia, Kanada (fot. Patrick S. O'Donnell) {4},
b) most nad kanionem rzeki Similkameen, British Columbia, Kanada (fot. Eric Sakowski) {6},
c) most w Hope nad rzeką Fraser, British Columbia, Kanada (fot. B&B-Traveller) {8}

Ameryka Północna nie była jednym kontynentem, na którym powstawały wiszące mosty rurociągowie dużych rozpiętości, chociaż już nie na tak dużą skalę. Już w latach pięćdziesiątych XX wieku, we Włoszech nad rzeką Pad wybudowano dwuprzęsłowy most o rozpiętościach przęsła 320 m, z przęsłami bocznymi o długości 140 m. W tym moście,

podobnie jak w przypadku mostów rurociągowych budowanych na terenie USA, po obu stronach kratownicowych pylonów przypominających słupy trakcji elektrycznej są umieszczone szerokie ramiona wspierające ciągnia wiatrowe. Należy tutaj wspomnieć także o innym wieloprzęsłowym moście rurociągowym o analogicznej budowie, oddanym do użytku w roku 1971, w pobliżu Adria nad rzeką Pad. Ten trójprzęsłowy most, o długości pojedynczego przęsła 255 m, charakteryzuje się tym, że oprócz klasycznego zestawu cięgien głównych ma dodatkowe ciągnia górne, łączące ze sobą szczyty pylonów (rys. Z1.7). Ich funkcją jest przenoszenie podłużnych sił od oddziaływania wiatru, a także zwiększenie sztywności mostu podczas nierównomiernego obciążenia poszczególnych przęseł [34]. We Włoszech powstały także inne mosty rurociągowy, o mniejszych rozpiętościach przęseł nieprzekraczających 320 m [117].

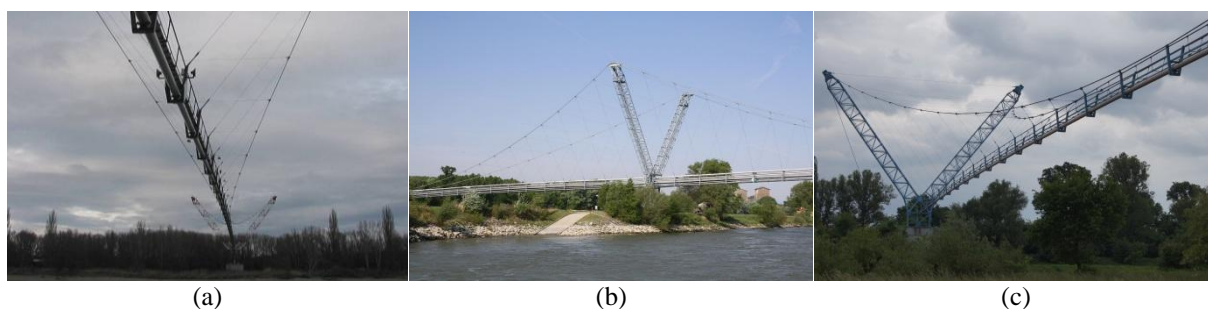


Rys. Z1.7. Widok wiszącego mostu rurociągowego wieloprzęsłowego z cięgnami górnymi



Rys. Z1.8. Widok wiszącego mostu rurociągowego z pylonami w kształcie litery V

W latach 1957 i 1961 na terenie Austrii powstały dwa nowatorskie mosty rurociągowo o rozpiętościach kolejno 260 i 320 m (rys. Z1.9ab), zaprojektowane i opatentowane przez firmę Waagner-Biro. Te dwie konstrukcje wybudowano na południe od Wiednia, nad rzeką Dunaj w odstępnie około 5 km. W obu przypadkach podpory stanowią pylony kratownicowe w kształcie litery V. Do szeroko rozstawionych ramion przymocowano cięgna główne, które dodatkowo zostały spięte ze sobą poziomymi cięgnami (równoważą poziomą składową ciężaru własnego oraz usztywniają system podwieszenia). Cięgna główne o parabolicznej trasie zostały ułożone wraz z wieszakami w dwóch nachylonych płaszczyznach (rys. Z1.8). Stosowane są także dwa cięgna odciążowe leżące w pobliżu osi rurociągu, które usztywniają pomost na działanie wiatru. Most powstały w 1961 roku przenosi aż 13 rurociągów [117] (rys. Z1.9b). Analogiczne rozwiązanie konstrukcyjne zastosowano w moście wiszącym wybudowanym nad Odrą we Wrocławiu, o rozpiętości przęsła głównego 320 m (rys. Z1.9c).

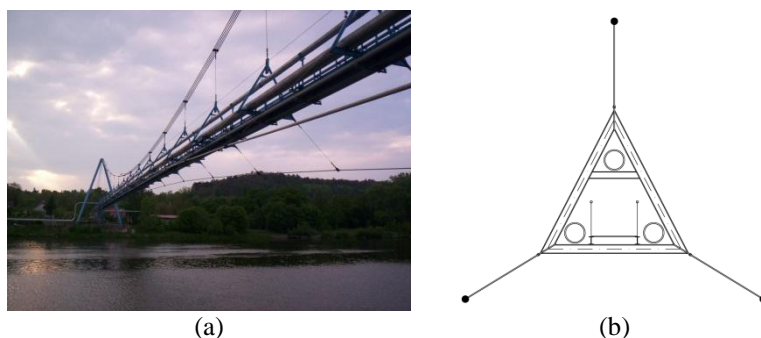


Rys. Z1.9 a) most w pobliżu Wiednia nad rzeką Dunaj Austria (fot. Karl Gruber) {1},
 b) most w pobliżu Wiednia nad rzeką Dunaj Austria (fot. Karl Gruber) {1},
 c) most we Wrocławiu nad Odrą, Polska (fot. z archiwum autora)

Z innych mostów powstałych na terenie Polski należałoby wspomnieć o rurociągowym moście wiszącym o nowoczesnej budowie, wybudowanym w 1963 roku w Płocku, którego rozpiętość między pylonami wynosiła 350 m. Jednak most ten został rozebrany w 1987 roku, ponieważ po powodzi zatorowej z 1982 spiętrzona kora sięgała łożysk tego mostu stwarzając niebezpieczną sytuację. Rurociągi ułożono ostatecznie pod dnem Wisły w specjalnych rurach osłonowych {9}. Z innych mostów wartych uwagi trzeba także wymienić klasyczny rurociągowy most wiszący w Brzegu Dolnym o trzech płaszczyznach podwieszenia i rozpiętości około 200 m. W Poznaniu znajdują się dwa mosty o analogicznej budowie i rozpiętościach przęseł odpowiednio 73 m oraz 80 m. Każdy z nich składa się z dwóch cięgien nośnych opartych na pylonach ramowych, zwisających w płaszczyznach odchylonych od pionu i połączonych wieszakami z pomostem. Wewnątrz pomostów

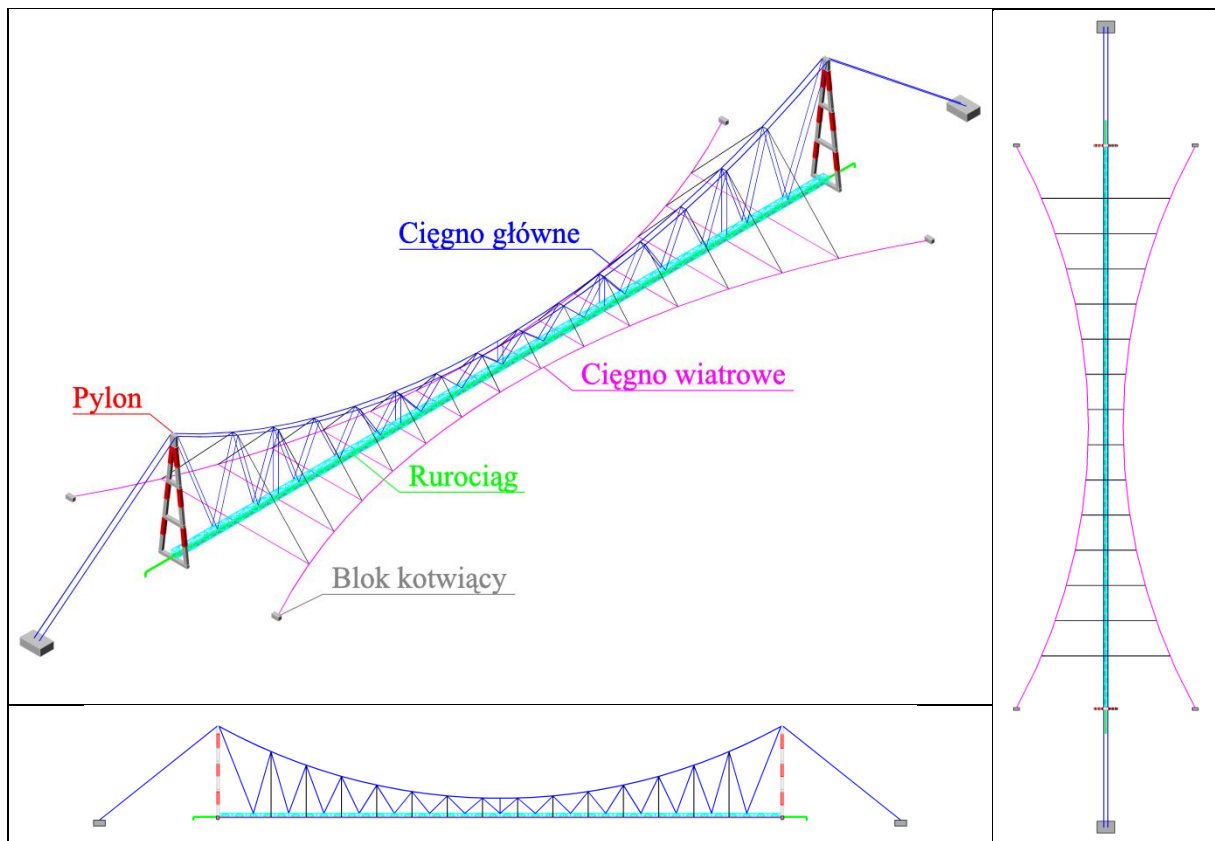
przenoszących odpowiednio 2 oraz 4 rurociągi umieszczono dodatkowo dwa ciężkie odciągowe, które mają za zadanie przejąć boczne parcie wiatru.

Ciekawym przykładem sposobu realizacji podwieszenia rurociągu jest most nad Wełtawą w miejscowości Nelahozeves w Czechach. Most wiszący o rozpiętości przęsła głównego 170 m wyróżnia się trzema płaszczyznami podwieszenia: jedną pionową oraz dwiema odchylonymi o 30° w odniesieniu do poziomu. Przenosi on chodnik serwisowy oraz trzy rurociągi, które podwieszono za pomocą wieszaków w trójkątnych ramkach [128] (rys. Z1.10).



Rys. Z1.10 a) most w Nelahozeves nad rzeką Wełtawą, Czechy (fot. Lád'a Šída) [8],
b) przekrój poprzeczny dźwigara mostu w Nelahozeves nad rzeką Wełtawą, Czechy [128]

Na terenie byłego Związku Radzieckiego powstał w roku 1974 jednoprzęsłowy most wiszący o rozpiętości 660 m, położony nad rzeką Amu-Darya w pobliżu Qarqin (na granicy dzisiejszego Turkmenistanu i Afganistanu). Pylony tego mostu, o wysokości 85 m i kształcie litery A, wspierają dwa ciężkie główne rozstawione w odległości 2,8 m. Ciężkie główne są połączone za pomocą wieszaków do kratownicowego pomostu przenoszącego rurociąg. Układ tych wieszaków przypomina budowę kratownicy (rys. Z1.11). W angielskojęzycznej literaturze ten typ podwieszenia określa się mianem „kratownicy ciężkowej” (ang. *cable truss*) [117]. Rurociąg jest dodatkowo usztywniony poziomym układem ciężkich wiatrowych zakotwionych na obu brzegach rzeki. W 1978 roku wybudowano niemal identyczny most nad rzeką Dniepr w pobliżu Bashmachka (teren dzisiejszej Ukrainy). Rozpiętość przęsła tego mostu wynosi 740 m, a wysokość pylonów 87 m [127]. Jest to obecnie najdłuższy wiszący most rurociągowy na świecie (rys. Z1.12ab). W późniejszych latach opracowano jeszcze jeden projekt analogicznego mostu o rozpiętości 950 m, który miał przebiegać nad rzeką Amu-Darya, jednak realizacja tego pomysłu nie doszła do skutku [127].



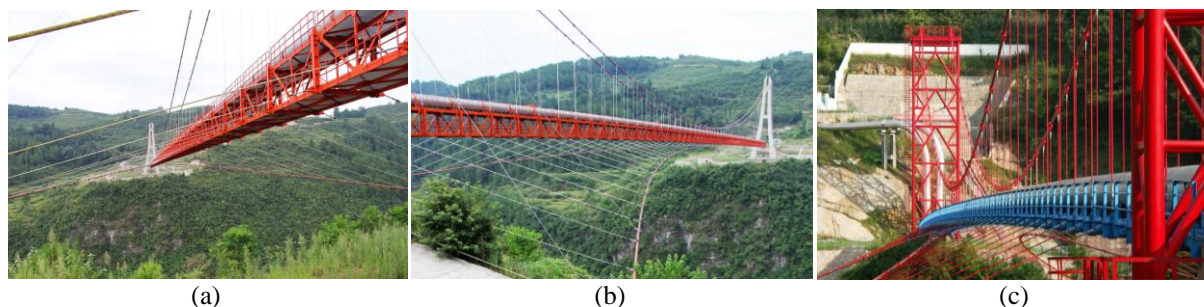
Rys. Z1.11. Widok wiszącego mostu ruropięgowego z podwieszeniem w formie przestrzennej kratownicy



Rys. Z1.12 a) most w pobliżu Bashmachka nad rzeką Dniepr, Ukraina (fot. Vladlen Koshelenko) {8},
 b) most w pobliżu Bashmachka nad rzeką Dniepr, Ukraina (fot. eee.dp.ua) {8}

W ostatnich 25 latach w Chinach powstało co najmniej kilkanaście ruropięgowych mostów wiszących o rozpiętościach przęseł przekraczających 200 m [142], [147]. Parametry wybranych mostów zebrano w tabeli Z1.1. Układ konstrukcyjny budowanych mostów zasadniczo nie zmienił się w porównaniu do klasycznych wiszących mostów ruropięgowych, to znaczy w dalszym ciągu można wyróżnić dwa ciężna główne oraz ciężna wiatrowe, jednak we wszystkich mostach ruropięgi spoczywają na kratownicowym pomoście w różnych konfiguracjach (rys. Z1.13abc). Widać zatem, że we współczesnych konstrukcjach dąży się do zwiększenia ogólnej sztywności mostu przez zastosowanie stalowej kratownicy jako belki

usztyniającej, co z kolei prowadzi do zmniejszenia podatności na obciążenia dynamiczne takie jak wiatr lub przejazd świnki serwisowej.



Rys. Z1.13 a) most w pobliżu Wujiangzhen nad rzeką Wujiang, Chiny (fot. Eric Sakowski) {6},
 b) most w pobliżu Wujiangzhen nad rzeką Wujiang, Chiny (fot. Eric Sakowski) {6},
 c) most w pobliżu Gaopingzhen nad rzeką Yesanhe, Chiny (fot. Eric Sakowski) {6}

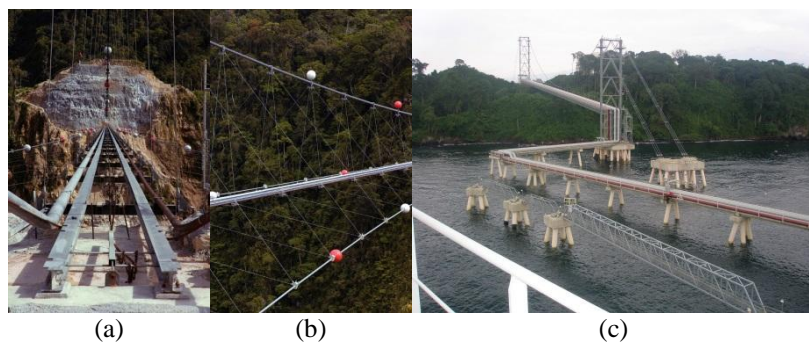
Tabela Z1.1. Wybrane wiszące mosty rurowiązowe w Chinach [147]

Nazwa mostu	Rozpiętość przęsła głównego[m]	Średnica przenoszonych rurowiązów [mm]	Rok budowy
Yellow River Bridge	270	660	1997
Bapanxia Yellow River Bridge	300	660	2001
Huangshui River Bridge	200	219	2001
Bailong River Bridge	270	660	2002
Mahuangxi Bridge	200	711	2004
Yesanhe River Bridge	240	1016/1016	2009
Lantsang Bridge	280	1016/813	2013
Wujiang River Bridge	310	1016/610	2013
Nujiang River Bridge	320	1016/813	2013
Yangbi River Bridge	230	1016/813	2013
Red River Bridge	300	1016	2013
Menganghe River Bridge	360	610/114	2019
Wujiang River Bridge	355	1016	2019

Spośród współczesnych mostów, godnym uwagi jest most rurowiązowy nad wąwozem Hegigio w Papua Nowa Gwinea, ukończony w 2005 roku. Zastosowano tutaj pomost na którym znajdują zarówno rurowiąz jak i belki służące do przejazdu wózka serwisowego (rys. Z1.14a). Wyróżnić można jedno ciężno główne oraz dwa ciężna wiatrowe leżące w niemal poziomej płaszczyźnie. Z ciężna głównego poprowadzono dwa rzędy wieszaków połączonych z pomostem, na którym spoczywają rurowiąz. Ponadto ciężno główne jest połączone z ciężnami wiatrowymi za pomocą lin (rys. Z1.14b). Ciężna wiatrowe zakotwiono bezpośrednio do ścian wąwozu. Po jednej stronie podporę stanowi pylon

w kształcie litery A o wysokości 36 m, a po drugiej o wysokości 5 m. Projekt tego mostu sporządził Ken Ross. Rozpiętość mostu wynosi 470 m. Most przeprowadzono nad wąwozem o głębokości 393 m i jest to aktualnie najwyższy wiszący most rurociągowy na świecie.

Warto także wspomnieć o wybudowanym w 2006 roku rurociągowym moście wiszącym na wyspie Bioko, należącej do Gwinei Równikowej (rys. Z1.14c). Most ten łączy rafinerię gazu ziemnego na lądzie z platformą na morzu przy której odbywa się tankowanie gazu na statki. Początkowo, projektanci biura Buckland&Taylor rozważali budowę lekkiego mostu wiszącego z układem płaszczyzn podwieszenia w kształcie litery V. Jednak ze względu na dużą niestabilność podłoża na brzegu nie było możliwości budowy zakotwień dla ciągów wiatrowych. W związku z tym zdecydowano się na budowę klasycznego mostu wiszącego o rozpiętości 350 m, ze sztywnym kratownicowym pomostem o szerokości 12 m i wysokości 3,3 m. Z powodu dużej różnicy wysokości między poziomem posadowienia pylonów, nachylenie pomostu wynosi 9% [112].



Rys. Z1.14 a) most nad wąwozem Hegigio, Papua Nowa Gwinea (fot. Ken Ross) {3},
b) most nad wąwozem Hegigio, Papua Nowa Gwinea (fot. Ken Ross) {3},
c) most na wyspie Bioko, Gwinea Równikowa (fot. Seriy Volk) {8}

$$\mathbf{G}_{s1}^J = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{q}_{s1u}^J \quad \mathbf{q}_{s1v}^J \quad \mathbf{q}_{s1w}^J}^{\mathbf{q}_{s1r}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s1}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s1}^J} \\ \hline \mathbf{I}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{I}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \quad \mathbf{I}_{n_{s1}^J \times n_{s1}^J} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{sp1}^J \\ \mathbf{r}_{sr1}^J \\ \mathbf{q}_{s1u}^J \\ \mathbf{q}_{s1v}^J \\ \mathbf{q}_{s1w}^J \end{array} \right\} \mathbf{q}_{s1}^J, \quad \mathbf{G}_{s2}^J = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{q}_{s2u}^J \quad \mathbf{q}_{s2v}^J \quad \mathbf{q}_{s2w}^J}^{\mathbf{q}_{s2r}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s2}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{3 \times n_{s2}^J} \\ \hline \mathbf{I}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{I}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \quad \mathbf{I}_{n_{s2}^J \times n_{s2}^J} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{sp2}^J \\ \mathbf{r}_{sr2}^J \\ \mathbf{q}_{s2u}^J \\ \mathbf{q}_{s2v}^J \\ \mathbf{q}_{s2w}^J \end{array} \right\} \mathbf{q}_{s2}^J,$$

$$\mathbf{G}_{p1c}^J = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{p1} \\ \hline \mathbf{H}_{p1c}^J \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{p1}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{n_c^J \times n_{p1}^J} \\ \mathbf{0}_{n_c^J \times n_{p1}^J} \\ \mathbf{0}_{n_c^J \times n_{p1}^J} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{cp1}^J \\ \mathbf{r}_{cp2}^J \\ \mathbf{q}_{cu}^J \\ \mathbf{q}_{cv}^J \\ \mathbf{q}_{cw}^J \end{array} \right\} \mathbf{q}_c^J, \quad \mathbf{G}_{p2c}^J = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{p2} \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{p2}^J} \\ \hline \mathbf{H}_{p2c}^J \\ \hline \mathbf{0}_{n_c^J \times n_{p2}^J} \\ \mathbf{0}_{n_c^J \times n_{p2}^J} \\ \mathbf{0}_{n_c^J \times n_{p2}^J} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{cp1}^J \\ \mathbf{r}_{cp2}^J \\ \mathbf{q}_{cu}^J \\ \mathbf{q}_{cv}^J \\ \mathbf{q}_{cw}^J \end{array} \right\} \mathbf{q}_c^J,$$

$$\mathbf{G}_{p1s}^J = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{p1} \\ \hline \mathbf{H}_{p1s}^J \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{p1}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{p1}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{p1}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s1}^J \times n_{p1}^J} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{sp1}^J \\ \mathbf{r}_{sr1}^J \\ \mathbf{q}_{s1u}^J \\ \mathbf{q}_{s1v}^J \\ \mathbf{q}_{s1w}^J \end{array} \right\} \mathbf{q}_{s1}^J, \quad \mathbf{G}_{p2s}^J = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{p2} \\ \hline \mathbf{H}_{p2s}^J \\ \hline \mathbf{0}_{3 \times n_{p2}^J} \\ \hline \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{p2}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{p2}^J} \\ \mathbf{0}_{n_{s2}^J \times n_{p2}^J} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{sp2}^J \\ \mathbf{r}_{sr2}^J \\ \mathbf{q}_{s2u}^J \\ \mathbf{q}_{s2v}^J \\ \mathbf{q}_{s2w}^J \end{array} \right\} \mathbf{q}_{s2}^J,$$

$$\mathbf{G}_{p1b} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{p1} \\ \hline \mathbf{H}_{p1b}^w \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times n_{p1}} \\ \hline \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times n_{p1}} \\ \hline \mathbf{H}_{p1b}^v \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times n_{p1}} \\ \hline \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times n_{p1}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{bp1}^w \\ \mathbf{r}_{bp2}^w \\ \mathbf{q}_{br}^w \\ \mathbf{r}_{bp1}^v \\ \mathbf{r}_{bp2}^v \\ \mathbf{q}_{br}^v \end{array} \right\} \mathbf{q}_b, \quad \mathbf{G}_{p2b} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{p2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times n_{p2}} \\ \hline \mathbf{H}_{p2b}^w \\ \hline \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times n_{p2}} \\ \hline \mathbf{H}_{p2b}^v \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times n_{p2}} \\ \hline \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times n_{p2}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}_{bp1}^w \\ \mathbf{r}_{bp2}^w \\ \mathbf{q}_{br}^w \\ \mathbf{r}_{bp1}^v \\ \mathbf{r}_{bp2}^v \\ \mathbf{q}_{br}^v \end{array} \right\} \mathbf{q}_b,$$

$$\mathbf{G}_b = \begin{array}{cc} \overbrace{\mathbf{q}_{br}^w \quad \mathbf{q}_{br}^v}^{\mathbf{q}_{br}} & \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{I}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} & \mathbf{0}_{2 \times 2(n_b-1)} \\ \mathbf{0}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} & \mathbf{I}_{2(n_b-1) \times 2(n_b-1)} \end{array} \right] & \left. \begin{array}{l} \mathbf{r}_{bp1}^w \\ \mathbf{r}_{bp2}^w \\ \mathbf{q}_{br}^w \\ \mathbf{r}_{bp1}^v \\ \mathbf{r}_{bp2}^v \\ \mathbf{q}_{br}^v \end{array} \right\} \mathbf{q}_b \end{array}$$

gdzie wymiary odpowiednich bloków zerowych $\mathbf{0}$ oraz macierzy jednostkowych \mathbf{I} są podane w indeksie dolnym.

ZAŁĄCZNIK 3

Wektor sił brzegowych \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c}
 (\mathbf{G}_c^I)^T (\mathbf{R}_{cp1}^I + \mathbf{R}_{cp2}^I + \mathbf{R}_{ch}^I) + (\mathbf{G}_c^I)^T \mathbf{R}_{hc}^I \\
 \vdots \\
 (\mathbf{G}_c^{N_p})^T (\mathbf{R}_{cp1}^{N_p} + \mathbf{R}_{cp2}^{N_p} + \mathbf{R}_{ch}^{N_p}) + (\mathbf{G}_c^{N_p})^T \mathbf{R}_{hc}^{N_p} \\
 \hline
 (\mathbf{G}_{s1}^I)^T (\mathbf{R}_{sp1}^I + \mathbf{R}_{sr1}^I) \\
 \vdots \\
 (\mathbf{G}_{s1}^{N_p})^T (\mathbf{R}_{sp1}^{N_p} + \mathbf{R}_{sr1}^{N_p}) \\
 \hline
 (\mathbf{G}_{s2}^I)^T (\mathbf{R}_{sp2}^I + \mathbf{R}_{sr2}^I) \\
 \vdots \\
 (\mathbf{G}_{s2}^{N_p})^T (\mathbf{R}_{sp2}^{N_p} + \mathbf{R}_{sr2}^{N_p}) \\
 \hline
 \sum_{J=1}^{N_p} [(\mathbf{G}_{p1c}^J)^T (\mathbf{R}_{cp1}^J + \mathbf{R}_{cp2}^J + \mathbf{R}_{ch}^J) + (\mathbf{G}_{p1s}^J)^T (\mathbf{R}_{sp1}^J + \mathbf{R}_{sr1}^J) + (\mathbf{G}_{p1b})^T \mathbf{R}_{hb}^J + (\mathbf{G}_{p1c}^J)^T \mathbf{R}_{hc}^J] + \\
 + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p1s}^J + \mathbf{R}_{p1b} + (\mathbf{G}_{p1b})^T (\sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{bh}^J + \mathbf{R}_{bp1} + \mathbf{R}_{bp2}) \\
 \hline
 \sum_{J=1}^{N_p} [(\mathbf{G}_{p2c}^J)^T (\mathbf{R}_{cp1}^J + \mathbf{R}_{cp2}^J + \mathbf{R}_{ch}^J) + (\mathbf{G}_{p2s}^J)^T (\mathbf{R}_{sp2}^J + \mathbf{R}_{sr2}^J) + (\mathbf{G}_{p2b})^T \mathbf{R}_{hb}^J + (\mathbf{G}_{p2c}^J)^T \mathbf{R}_{hc}^J] + \\
 + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p2c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{p2s}^J + \mathbf{R}_{p2b} + (\mathbf{G}_{p2b})^T (\sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{bh}^J + \mathbf{R}_{bp1} + \mathbf{R}_{bp2}) \\
 \hline
 \sum_{J=1}^{N_p} [(\mathbf{G}_b)^T \mathbf{R}_{hb}^J] + (\mathbf{G}_b)^T (\sum_{J=1}^{N_p} \mathbf{R}_{bh}^J + \mathbf{R}_{bp1} + \mathbf{R}_{bp2})
 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l}
 \} \mathbf{q}_{cr}^J \\
 \} \mathbf{q}_{s1r}^J \\
 \} \mathbf{q}_{s2r}^J \\
 \} \mathbf{q}_{p1} \\
 \} \mathbf{q}_{p2} \\
 \} \mathbf{q}_{br}
 \end{array} \right.$$

Sprawdzenie równości $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ dla poszczególnych wierszy wektora, przy założeniu równowagi sił interakcji w miejscach połączeń podstruktur, oblicza się następująco

- blok \mathbf{q}_{cr}^J :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{-\Delta\mathbf{R}_{cp1}^J}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\Delta\mathbf{R}_{cp2}^J}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + (\mathbf{G}_c^J)^T \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{chk}^J + (\mathbf{G}_c^J)^T \left(-\sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{nck}^J \right) = \mathbf{0}$$

- blok \mathbf{q}_{s1r}^J :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{-\Delta\mathbf{R}_{sp1}^J}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

- blok \mathbf{q}_{s2r}^J :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\Delta\mathbf{R}_{sp2}^J}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}$$

- blok \mathbf{q}_{p1} :

$$\begin{aligned}
& \sum_{J=1}^{N_p} [(\mathbf{H}_{p1c}^J)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}] \begin{pmatrix} -\Delta\mathbf{R}_{cp1}^J \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{R}_{cp2}^J \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + (\mathbf{G}_{p1c})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta\mathbf{R}_{chk}^J + \\
& + \sum_{J=1}^{N_p} [(\mathbf{H}_{p1s}^J)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}] \begin{pmatrix} -\Delta\mathbf{R}_{sp1}^J \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + (\mathbf{G}_{p1b})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta\mathbf{S}_{hbk}^J + \\
& + (\mathbf{G}_{p1c}^J)^T \left(-\sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta\mathbf{R}_{hck}^J \right) + \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{H}_{p1c}^J)^T \Delta\mathbf{R}_{p1c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{H}_{p1s}^J)^T \Delta\mathbf{R}_{p1s}^J + \\
& + \mathbf{A}_{p1b}^T \Delta\mathbf{R}_{p1b} + (\mathbf{G}_{p1b})^T \left(-\sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta\mathbf{S}_{bhk}^J \right) + \\
& + [(\mathbf{H}_{p1b}^w)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid (\mathbf{H}_{p1b}^v)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}] \begin{pmatrix} -\Delta\mathbf{R}_{bp1}^w \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Delta\mathbf{R}_{bp1}^v \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{R}_{bp2}^w \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{R}_{bp2}^v \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \\
& = -\sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p1c}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J)^T \Delta\mathbf{R}_{cp1}^J + \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p1c}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J)^T \Delta\mathbf{R}_{p1c}^J - \\
& - \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p1s}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J)^T \Delta\mathbf{R}_{sp1}^J + \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p1s}^J \mathbf{E}_{p1}^J \mathbf{A}_{p1}^J)^T \Delta\mathbf{R}_{p1s}^J + \\
& + (\mathbf{G}_{p1c})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta\mathbf{R}_{chk}^J - (\mathbf{G}_{p1c}^J)^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta\mathbf{R}_{hck}^J + \\
& + (\mathbf{G}_{p1b})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta\mathbf{S}_{hbk}^J - (\mathbf{G}_{p1b})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta\mathbf{S}_{bhk}^J + \mathbf{A}_{p1b}^T \Delta\mathbf{R}_{p1b} - \mathbf{A}_{p1b}^T \Delta\mathbf{R}_{bp1} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

- blok \mathbf{q}_{p2} :

$$\begin{aligned}
& \sum_{J=1}^{N_p} [\mathbf{0} \mid (\mathbf{H}_{p2c}^J)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}] \left(\begin{bmatrix} -\Delta\mathbf{R}_{cp1}^J \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{R}_{cp2}^J \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + (\mathbf{G}_{p2c})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{chk}^J + \\
& + \sum_{J=1}^{N_p} [(\mathbf{H}_{p2s}^J)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}] \left(\begin{bmatrix} -\Delta\mathbf{R}_{sp2}^J \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + (\mathbf{G}_{p2b})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{hb k}^J + \\
& + (\mathbf{G}_{p2c}^J)^T \left(-\sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{hck}^J \right) - \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{H}_{p2c}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p2c}^J + \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{H}_{p2s}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p2s}^J + \\
& - \mathbf{A}_{p2b}^T \Delta \mathbf{R}_{p2b} + (\mathbf{G}_{p2b})^T \left(-\sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{bhk}^J \right) + \\
& + [\mathbf{0} \mid (\mathbf{H}_{p2b}^w)^T \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid (\mathbf{H}_{p2b}^v)^T \mid \mathbf{0}] \left(\begin{bmatrix} -\Delta\mathbf{R}_{bp1}^w \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\Delta\mathbf{R}_{bp1}^v \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{R}_{bp2}^w \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{R}_{bp2}^v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = \\
& = \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p2c}^J \mathbf{E}_{p2}^J \mathbf{A}_{p2}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{cp2}^J - \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p2c}^J \mathbf{E}_{p2}^J \mathbf{A}_{p2}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p2c}^J - \\
& - \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p2s}^J \mathbf{E}_{p2}^J \mathbf{A}_{p2}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{sp2}^J + \sum_{J=1}^{N_p} (\mathbf{D}_{p2s}^J \mathbf{E}_{p2}^J \mathbf{A}_{p2}^J)^T \Delta \mathbf{R}_{p2s}^J + \\
& + (\mathbf{G}_{p2c})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{chk}^J - (\mathbf{G}_{p2c}^J)^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{f}_{cwk}^J \Delta R_{hck}^J + \\
& + (\mathbf{G}_{p2b})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{hb k}^J - (\mathbf{G}_{p2b})^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{bhk}^J - \mathbf{A}_{p2b}^T \Delta \mathbf{R}_{p2b} + \mathbf{A}_{p2b}^T \Delta \mathbf{R}_{bp1} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

- blok \mathbf{Q}_{br} :

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{G}_b)^T \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{hb k}^J + (\mathbf{G}_b)^T \left(- \sum_{J=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{n_h} \mathbf{H}_{bk}^T \mathbf{a}_\varphi^J \Delta S_{bh k}^J \right) + \\
& + \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} \frac{-\Delta \mathbf{R}_{bp1}^w}{\mathbf{0}} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline -\Delta \mathbf{R}_{bp1}^v \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \frac{\mathbf{0}}{\Delta \mathbf{R}_{bp2}^w} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \Delta \mathbf{R}_{bp2}^v \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

LITERATURA

- [1] ALEXANDER C., CARTAYA H., BEDOYA J., 2007, *Proceedings of the NACE International Conference And Expo Corrosion 2007*, Nashville, Tennessee, USA, March 11-15, pp. 1-15, Assessing the effects of corrosion on the mechanical integrity of a pipeline suspensions bridge.
- [2] BAH M. T., NAIR P. B., BHASKAR A., KEANE A. J., 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Norfolk, Virginia, USA, 7-10 April, Paper AIAA-2003-1750, Stochastic component mode synthesis.
- [3] BAIRD R. C., 1955, *ASME Transactions*, Vol. 77, No. 6, pp. 797-803, Wind-induced vibration of a pipe-line suspensions bridge and its cure.
- [4] BELYTSCHKO T., 1976, *Nuclear Engineering Design*, Vol. 37, No. 1, pp. 23-34, A survey of numerical methods and computer programs for dynamic structural analysis.
- [5] BENEDETTINI F., REGA G., 1987, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 22, pp. 497-509, Non-linear dynamics of an elastic cable under planar excitation.
- [6] BERLIOZ A., LAMARQUE C.-H., 2005, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, No. 3-5, pp. 619-639, A non-linear model for the dynamics of an inclined cable.
- [7] BIONDI B., MUSCOLINO G., 2003, *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 4, pp. 419-433, Component-mode synthesis method for coupled continuous and FE discretized substructures.
- [8] BIONDI B., MUSCOLINO G., SOFI A., 2005, *Computers and Structures*, Vol. 83, No. 28-30, pp. 2271-2281, A substructure approach for the dynamics analysis of train-track-bridge system.
- [9] BOŁOTIN W. W., 1968, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady.
- [10] BOONYAPINYO V., MIYATA T., YAMADA H., 1999, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, No. 12, pp. 1357-1366, Advanced aerodynamic analysis of suspension bridges by state-space approach.
- [11] BOURQUIN F., D'HENNEZEL F., 1992, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 97, No. 1, pp. 49-76, Numerical study of an intrinsic component mode synthesis method.
- [12] BRAHMI K., BOUHADDI N., FILLOD R., 1995, *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference*, Nashville, Tennessee, USA, February 13-16, pp. 1469-1475, Reduction of junction degrees of freedom in certain methods of dynamic substructure synthesis.

- [13] BRUSCHI M. G., CLENANCE J. C., CONDELL S., SCHMID J., 2011, *Proceedings of the Pipeline Division International Conference (PIPELINES 2011)*, Seattle, Washington, USA, July 23-27, pp. 501-512, Rehabilitation of Brazos River and Colorado River pipeline bridges.
- [14] BRYJA D., 2005, *Deterministyczne i stochastyczne metody analizy drgań mostów wiszących*, Oficyna Wydawnicza PWR.
- [15] BRYJA D., PROKOPOWICZ D., WOSZCZYNA A., 2007, *Problemy naukowo-badawcze budownictwa*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Tom 2, str. 439-446, Dynamiczny model wstępnie napiętego cięgna i jego zastosowanie.
- [16] BRYJA D., WOSZCZYNA A., PROKOPOWICZ D., 2008, *Proceedings of the 7th European Conference on Structural Dynamics*, Southampton, United Kindom, July 7-9, Non-stationary wind model in buffeting analysis of cable-stayed bridge.
- [17] BRYJA D., WOSZCZYNA A., PROKOPOWICZ D., 2008, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Mechanika.*, Zeszyt 74, str. 17-24, Analiza korelacyjna drgań losowych mostu wantowego obciążonego porywistym wiatrem.
- [18] CAIN J. F., 1975, *ASCE Journal of the Construction Division*, Vol. 101, No. 4, pp. 733-749, Fifty-year development – construction of steel pipeline suspension bridges.
- [19] CAO Y., XIANG H., ZHOU Y., 2000, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 1, pp. 1-6, Simulation of stochastic wind velocity field on long-span bridges.
- [20] CAROTTI A., DE MIRANDA M., TURCI E., 1985, *Proceedings of the Second International Symposium on Structural Control*, Waterloo, Ontario, Canada, July 15-17, pp. 76-104, An active protection system for wind induced vibrations of pipe-line suspension bridges.
- [21] CHEN S. C., MCMULLAN J. G., 1974, *ASCE Journal of Transportation Engineering*, Vol. 100, No. 1, pp. 207-219, Similkameen pipeline suspension bridge.
- [22] CHEN S. C., MCMULLAN J. G., 1974, *ASCE Civil Engineering*, Vol. 44, No. 5, pp. 58-61, Suspension bridge carries pipelines cross canyon.
- [23] CHEN X., KAREEM A., 2001, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 89, No. 14-15, pp. 1335-1350, Nonlinear response analysis of long-span bridges under turbulent winds.
- [24] CHEN X., KAREEM A., 2002, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 17, No. 2, pp. 201-213, Advanced analysis of coupled buffeting response of bridges: A complex modal decomposition approach.

- [25] CHEN X., KAREEM A., 2002, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 128, No. 11, pp. 1193-1205, Advances in modeling of aerodynamic forces on bridge decks.
- [26] CHEN X., KAREEM A., 2003, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 91, No. 12-15, pp. 1511-1528, New frontiers in aerodynamic tailoring of long span bridges: An advanced analysis framework.
- [27] CHEN X., KAREEM A., MATSUMOTO M., 2000, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 1, pp. 7-16, Time domain flutter and buffeting response analysis of bridges.
- [28] CHEN X., KAREEM A., MATSUMOTO M., 2000, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 1, pp. 17-26, Aerodynamic coupling effects on flutter and buffeting on bridges.
- [29] CHEN X., KAREEM A., MATSUMOTO M., 2001, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 89, No. 7-8, pp. 649-664, Multimode coupled flutter and buffeting analysis of long span bridges.
- [30] CHEN X., XU F., QIU W., ZHANG Z., 2011, *Advanced Materials Research*, Vols. 163-167, pp. 4114-4119, AMD Application for suppressing the lateral and torsion buffeting response of suspension pipeline bridge.
- [31] CHMIELEWSKI T., ZEMBATY Z., 1998, *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady.
- [32] CHRISTOPHERSON A., SWIGART W., FRIES M., 1983, *Proceedings of the Conference on Pipelines in Adverse Environments 2*, San Diego, California, USA, November 14-16, pp. 362-374, Inspection of the Tanana River pipeline bridge.
- [33] CHUNG T. J., 2002, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- [34] CONTRI L., SCHREFLER B., 1977, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 3, pp. 521-531, A stability investigation of cable suspended pipelines.
- [35] COSTA C., 2007, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 23, No. 3, pp. 413-428, Aerodynamic functions and buffeting forces for bridges via indicial functions.
- [36] CRAIG R. R., 1981, *Structural Dynamics – An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & Sons.
- [37] CRAIG R. R., HALE A. L., 1988, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 6, No. 7, pp. 562-570, Block-Krylov component synthesis method for structural model reduction.

- [38] CRAIG R. R., NI Z., 1989, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No. 4, pp. 577-584, Component mode synthesis for model order reduction of nonclassically damped systems.
- [39] CRAIG R. R., 1995, *ASME Transactions*, Vol. 117, pp. 207-213, Substructure methods in vibration.
- [40] CRAIG R. R., 2000, *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference – Computational Challenges in Structural Dynamics*, San Antonio, Texas, USA, February 7-10, pp. 899-908, A brief tutorial on substructure analysis and testing.
- [41] CRANDALL S. H., MARK W. D., 1963, *Random Vibrations in Mechanical Systems*, Academic Press.
- [42] CRANDALL S. H., CHANDIRAMANI K. L., COOK R. G., 1966, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 532-538, Some first-passage problems in random vibration.
- [43] CRANDALL S. H., 1970, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, No. 3, pp. 285-299, First crossing probabilities of the linear oscillator.
- [44] DEN HARTOG J. P., 1971, *Drgania mechaniczne*, PWN.
- [45] DESAI Y. M., PUNDE S., 2001, *Engineering Structures*, Vol. 23, No. 3, pp. 271-279, Simple model for dynamics analysis of cable supported structures.
- [46] DUSSEAU R. A., HADDAD M. E., 1987, *Proceedings of the 1987 ANSYS Conference*, Newport Beach, California, USA, March 31-April 2, pp. 8.27-8.37, Pipeline suspension bridge modal analysis.
- [47] DUSSEAU R. A., EL-ACHKAR R, HADDAD M. E, 1988, *Proceedings of the ASCE International Conference on Pipeline Infrastructure*, Boston, Massachusetts, USA, June 6-7, pp. 323-332, Pipe geometry and pipeline bridge wind oscillation.
- [48] DUSSEAU R. A., 1988, *Proceedings of the Bridge Research In Progress Symposium*, Des Moines, Iowa, USA, September 26-27, pp. 69-72, Dynamic analysis of pipeline suspension bridges.
- [49] DUSSEAU R. A., 1990, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, No. 36, pp. 927-936, Wind analysis of pipeline suspension bridges.
- [50] DUSSEAU R. A., EL-ACHKAR R, HADDAD M. E., 1991, *ASCE Journal of Transportation Engineering*, Vol. 117, No. 1, pp. 3-22, Dynamic responses of pipeline suspension bridges.
- [51] DUSSEAU R. A., DUBAISI H., ZAHER S., 1991, *ASCE Journal of Transportation Engineering*, Vol. 117, No. 2, pp. 242-256, Nonuniform seismic motion of long-span pipeline suspension bridges.

- [52] DUSSEAU R. A., 1993, *Proceedings of the ASCE International Conference On Pipeline Infrastructure II*, San Antonio, Texas, USA, August 16-17, pp. 530-548, Database for pipeline bridges in North America.
- [53] DUSSEAU R. A., AHMED I., 1996, *Proceedings of the ASCE Pipeline Crossings Specialty Conference*, Burlington, Vermont, USA, June 16-19, pp. 112-119, Design parameters of pipeline suspension bridges.
- [54] DUSSEAU R. A., 2002, *Proceedings of the Pipeline Division International Conference (PIPELINES 2002)*, Cleveland, Ohio, USA, August 4-7, pp. 1-10, The evolution of pipeline suspension bridges in North America since 1952.
- [55] DYRBYE C., HANSEN S. O., 1997, *Wind Loads on Structures*, John Wiley & Sons.
- [56] FARHAT C., GERADIN M., 1994, *Computers and Structures*, Vol. 51, No. 5, pp. 459-473, On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures.
- [57] FERTIS D. G., 2006, *Nonlinear Structural Engineering*, Springer.
- [58] FLAGA A., 2008, *Inżynieria wiatrowa. Podstawy i zastosowania*, PWN.
- [59] FRYBA L., 1999, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Thomas Telford.
- [60] GAO J., WANG D.-G., HE, R.-Y., 2011, *International Conference on Computer Distributed Control and Intelligent Environmental Monitoring*, Changsha, Hunan, China, February 19-20, pp. 2404-2407, Vibration of suspension pipeline bridge subjected to process of pigging.
- [61] GE Y.J., XIANG H.F., 2008, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 96, No. 10-11, pp. 1912-1924, Computational models and methods for aerodynamic flutter of long-span bridges.
- [62] GIMSING N. J., GEORGAKIS C. T., 2012, *Cable supported bridges, concept and design (Third edition)*, John Wiley&Sons.
- [63] GLADWELL G. M. L., 1964, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 1, pp. 41-59, Branch mode analysis of vibrating systems.
- [64] GUYAN R. J., 1965, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 380, Reduction of stiffness and mass matrices.
- [65] HÄGGBLAD B., ERIKSSON L., 1993, *Computers and Structures*, Vol. 47, No. 4/5, pp. 735-749, Model reduction methods for dynamic analyses of large structures.
- [66] HAJDUK J., OSIECKI J., 1970, *Ustroje ciągnowe: teoria i obliczanie*, WNT.

- [67] HALE A. L., MEIROVITCH L., 1980, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 69, No. 2, pp. 309-326, A general substructure synthesis method for the dynamic simulation of complex structures.
- [68] HUANG L., LI B., LEI G., SHI D., 2012, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 137, pp. 113-118, Dynamics and buffeting analysis of suspension pipeline bridge.
- [69] HURTY W. C., 1960, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 86, pp. 51-69, Vibrations of structural systems by component-mode synthesis.
- [70] HURTY W. C., 1965, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 4, pp. 678-685, Dynamic analysis of structural systems using component modes.
- [71] IRVINE H. M., CAUGHEY T. K., 1974, *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 341, pp. 299-315, The linear theory of free vibrations of a suspended cable.
- [72] IRVINE H. M., 1981, *Cable structures*, The MIT Press.
- [73] IWANKIEWICZ R., 1995, *Dynamical mechanical systems under random impulses*, World Scientific.
- [74] JAIN A., JONES N. P., SCANLAN R. H., 1996, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 60, No. 1-3, pp. 69-80, Coupled aeroelastic and aerodynamic response analysis of long-span bridges.
- [75] JEN C. W., JOHNSON D. A., DUBOIS F., 1995, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 2, pp. 185-203, Numerical modal analysis of structures based on a revised substructure synthesis approach.
- [76] KAREEM A., 2008, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 96, No. 10-11, pp. 1472-1497, Numerical simulation of wind effects: A probabilistic perspective.
- [77] KLERK D. DE, RIXEN D. J., VOORMEEREN S. N., 2008, *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 5, pp. 1169-1181, General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review and Classification of Techniques.
- [78] KLOSTERMAN A. L., 1972, *SAE Technical Papers*, Paper No. 720093, A combined experimental and analytical procedure for improving automotive system dynamics.
- [79] KNAWA-HAWRYSZKÓW M., BRYJA D., 2008, *Proceedings of the 7th International Conference on Structural Dynamics*, Southampton, United Kingdom, July 7-9, E115, Vibrations of carrying cable of ropeway system loaded by passenger carriers modeled by series of moving pendulums.

- [80] KNAWA-HAWRYSZKÓW M., BRYJA D., 2011, *Computers and Structures*, Vol. 89, No. 21-22, pp. 1895-1905, Computational model of an inclined aerial ropeway and numerical method for analyzing nonlinear cable-car interaction.
- [81] KNAWA-HAWRYSZKÓW M., PROKOPOWICZ D., BRYJA D., *Computers and Structures*, Vol. 257, Art. 106642, pp. 1-17, Multipurpose nonlinear cable model for dynamic response of structures under moving load.
- [82] LANGER J., KLASZTORNY M., BRYJA D., 1979, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, Vol. 25, No. 2, pp. 195-202, Drgania własne rurociągowego mostu wiszącego.
- [83] LANGER J., 1980, *Dynamika budowli*, Wydawnictwo PWr.
- [84] LEUNG Y.-T., 1979, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 1241-1256, An accurate method of dynamic substructuring with simplified computation.
- [85] LIN Y. K., 1967, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill.
- [86] LIN Y. K., CAI C. Q., 1995, *Probabilistic Structural Dynamics. Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill.
- [87] LIU W., EWINS D. J., 2002, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 2, pp. 361-379, Substructure synthesis via elastic media.
- [88] LU X., CHEN Y., CHEN J., 1986, *1st World Congress in Computational Mechanics*, Austin, Texas, USA, August, Dynamics substructures analysis using Lanczos vectors.
- [89] MADSEN H. O., KRENK S., LIND N. C., 1986, *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall.
- [90] MAIA N. M. M., SILVA J. M. M., 1997, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, John Wiley & Sons.
- [91] MATSUO T., 1979, *International Construction*, Vol. 18, No. 5, pp. 110-114, Cable pipeline undergo rigorous study.
- [92] MEHRABI A. B., 2006, *Proceedings of the Pipeline Division International Conference (PIPELINES 2006)*, Chicago, Illinois, USA, July 30-August 2, pp. 171-179, A non-destructive method for structural evaluation of pipeline suspension bridges.
- [93] MEIROVITCH L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff.
- [94] MORALES C. A., 2009, *Meccanica*, Vol. 44, No. 3, pp. 339-343, Dynamic analysis of an L-shaped structure by Rayleigh-Ritz substructure synthesis method.

- [95] MUSCOLINO G., 2002, *Proceedings of the Sixth International Conference on Computational Structures Technology*, Prague, Czech Republic, September 4-6, pp. 255-282, Dynamic analysis of structural systems using component mode synthesis.
- [96] NEWLAND D. E., 1993, *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*, Longman.
- [97] NI Y. Q., LOU W. J., KO J. M., 2000, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, No. 2, pp. 189-214, A hybrid pseudo-force/Laplace transform method for non-linear transient response of a suspended cable.
- [98] NIGAM N. C., NARAYANAN S., 1994, *Applications of Random Vibrations*, Springer.
- [99] NOOR A. K., PETERS J. M., 1980, *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 4, pp. 455-462, Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures.
- [100] PAUL M. J., THOMPSON J. E., LEACH R., 1955, *The Oil and Gas Journal*, Vol. 53, No. 36, pp. 78-80, World's longest pipeline bridge.
- [101] PAÏDOUSSIS M. P., 1998, *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial flow, Volume 1*, Academic Press.
- [102] PAÏDOUSSIS M. P., 2008, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, No. 3, pp. 462-492, The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics.
- [103] PROKOPOWICZ D., BRYJA D., 2010, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, Vol. 10, No. 1, pp. 209-210, Linear and nonlinear response of pipeline suspension bridge due to moving fluid.
- [104] PROKOPOWICZ D., BRYJA D., 2011, *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics*, Leuven, Belgium, July 4-6, pp. 1348-1355, Substructure technique for dynamic analysis of pipeline suspension bridges conveying fluid.
- [105] PROKOPOWICZ D., BRYJA D., WOSZCZYNA A., 2008, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, Vol. 8, No. 1, pp. 10329-10330, Vibrations of spatially suspended flexible pipe-beam with moving fluid inside.
- [106] REDDY J. N., 2004, *An introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press.
- [107] REYNOLDS C. A., 1957, *The Petroleum Engineer*, Vol. 29, No. 2, D-34 – D-38, Twin 30 in. lines span river via super suspension bridge.
- [108] RICE S. O., 1944, *Bell Systems Technical Journal*, Vol. 23, pp. 282-332, Mathematical analysis of random noise.

- [109] RICE S. O., 1945, *Bell Systems Technical Journal*, Vol. 24, pp. 46-156, Mathematical analysis of random noise.
- [110] ROBERTS J. B., 1972, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24, No. 1, pp. 23-34, System response to random impulses.
- [111] ROBSON J. D., PALING V. R., MACVEAN D. B., DOODS C. J., 1973, *Wprowadzenie do drgań stochastycznych*, Ossolineum.
- [112] ROUSE S., 2007, *Canadian Consulting Engineer*, Vol. 48, No. 2, pp. 41-42, LNG suspension bridge.
- [113] RZĄDKOWSKI J., 2003, *Rurociągi*, Vol. 32, Nr 2-3, str. 22-30, Ciężnowe konstrukcje nośne.
- [114] SCANLAN R.H., 1978, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, No. 2, pp. 187-199, The action of flexible Bridges under wind, I: flutter theory.
- [115] SCANLAN R.H., 1978, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, No. 2, pp. 201-211, The action of flexible Bridges under wind, II: buffeting theory.
- [116] SCHEBLE M., STRIZZOLO C. N., CONVERTI J., 1996, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 1, pp. 193-200, A Rayleigh-Ritz substructure synthesis method in physical co-ordinates for dynamic analysis of structures.
- [117] SCOTT R., 2001, *In the Wake of Tacoma: Suspensions bridges and the Quest for Aerodynamic Stability*, ASCE.
- [118] SIMIU E., SCANLAN R. H., 1996, *Wind effects on structures, fundamentals and applications to design (Third edition)*, John Wiley&Sons.
- [119] SINGH M. P., SUAREZ L. E., 1992, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 159, No. 1, pp. 139-155, Dynamic condensation with synthesis of substructure eigenproperties.
- [120] SOBCZYK K., SPENCER B. F., 1992, *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*, WNT.
- [121] SOONG T. T., M. GRIGORIU, 1993, *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice-Hall.
- [122] SOTIROPOULOS G. H., 1984, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 94, No. 1, pp. 150-153, Comment on the substructure synthesis methods.
- [123] SÓLNES J., 1997, *Stochastic Processes and Random Vibrations*, John Wiley&Sons.
- [124] STAŃCZYK A., 2008, *Inżynieria i Budownictwo*, Nr 5, str. 262-263, Przebudowa konstrukcji nośnej mostu wiszącego podtrzymującego rurociągi nad Wartą w Poznaniu.
- [125] STEINMAN D. B., 1945, *ASCE Transactions*, Vol. 110, pp. 439-580, Rigidity and aerodynamic stability of suspension bridges.

- [126] STEINMAN D. B., 1952, *ASCE Civil Engineering*, Vol. 22, No. 3, pp. 25-27, Pipeline bridge stabilized with diagonal rope stays.
- [127] STRELETSKY N. N., 1980, *11th Congress – International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE) Introductory Report*, pp. 779-784, Long span pipeline suspension bridges in the UdSSR.
- [128] STUDNIČKOVÁ M., 1984, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, No. 17, pp. 51-70, Vibrations and aerodynamic stability of a prestressed pipeline cable bridge.
- [129] SUDHAKAR R. M., 2001, *Sadhana*, Vol. 26, No. 3, pp. 243-249, Advances in nonlinear vibration analysis of structures. Part-I. Beams.
- [130] SVETLITSKY V. A., 2003, *Statistical dynamics and reliability theory for mechanical structures*, Springer.
- [131] ŚNIADY P., 2000, *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza PWr.
- [132] TAKAHASHI K., KONISHI Y., 1987, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118, No. 1, pp. 69-84, Non-linear vibrations of cables in three dimensions, Part I: non-linear free vibrations.
- [133] TAKAHASHI K., KONISHI Y., 1987, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118, No. 1, pp. 85-97, Non-linear vibrations of cables in three dimensions, Part I: out of plane vibrations under in-plane sinusoidally time-varying load.
- [134] WANG J., DING Y., 2006, *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol. 26, No. 4, pp. 192-198, Experimental studies on seismic behavior of cable-suspension structures of pipelines in damage state.
- [135] WANG J., DING Y., GUO X., 2009, *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol. 29, No. 2, pp. 124-130, Experimental study on seismic behavior of suspension bridge used for long-distance pipelines.
- [136] WANG W., ZHANG S., SONG S., LI Y., 2012, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 201-202, pp. 669-672, Vibration analysis for pigging of suspension pipe bridge.
- [137] WILSON E. L., BAYO E. P., 1986, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 112, No. 8, pp. 1944-1954, Use of special Ritz vectors in dynamic substructure analysis.
- [138] WIRSCHING P.H., PAEZ T. L., ORTIZ K., 1995, *Random Vibrations*, John Wiley&Sons.

- [139] WOSZCZYNA A., BRYJA D., PROKOPOWICZ D., 2007, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, Vol. 7, No. 1, pp. 4040001-4040002, Nonlinear dynamics of an inclined cable subjected to boundary motion conditions.
- [140] WU L., GRIEF R., 1983, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 90, No. 3, pp. 407-422, Substructuring and modal synthesis for damped structures.
- [141] WU X., NIU S., LI C., HE Y., 2020, *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, Vol. 68, Art. 104239, Experimental research of the dynamic behavior of the natural gas suspension pipeline aerial crossing during pigging process.
- [142] WU X., NIU S., LI C., 2021, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 105, Art. 103339, The study of the dynamic response of the natural gas pipeline aerial crossing during pigging process: A Review.
- [143] XU F., YU H., 2020, *Journal of Bridge Engineering*, Vol. 25, No. 10, Effect of ice accretion on the aerodynamic responses of a pipeline suspension bridge.
- [144] XU C., LAN H.-Q., HE, R.-Y., GAO J., 2012, *Petrochemical Equipment*, Vol. 41, No. 3, pp. 8-11, Experiment on strain factors of pipeline suspension bridges.
- [145] YAU J. D., YANG Y. B., 2008, *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 3, pp. 632-642, Vibration of a suspension bridge installed with a water pipeline and subjected to moving trains.
- [146] YU H., XU F., ZHANG M., ZHOU A., 2020, *Applied Sciences*, Vol. 10, No. 20, Art. 7167, Experimental investigation on glaze ice accretion and its influence on aerodynamic characteristics of pipeline suspension bridges.
- [147] YU H., XU F., MA C., ZHOU A., ZHANG M., 2021, *Engineering Structures*, Vol. 245, Art. 112856, pp. 1-17, Experimental research on the aerodynamic responses of a long-span pipeline suspension bridge.
- [148] ZAYED M. M., LORD J., 1977, *Proceedings of the 6th World Conference on Earthquake Engineering*, New Delhi, India, January 10-14, Vol. 2, pp. 1260-1266, Dynamic analysis of cable structures using large deflection theory.
- [149] ZHAO Y. Y., WANG L. H., CHEN D. L., JIANG L. Z., 2002, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No. 1, pp. 43-59, Non-linear dynamics analysis of the two-dimensional simplified model of an elastic cable.
- [150] ZIENKIEWICZ O. J., TAYLOR R. L., ZHU J. Z., 2005, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth edition*, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [151] ZUO L., ZHANG G., LIU Y., 2012, *Proceedings of the International Conference on Pipelines and Trenchless Technology*, Wuhan, China, October 19-22, Vol. 2, pp. 764-

773, Dynamic response analysis on oil and gas shared suspension pipeline bridge under seismic loading.

[152] ŻURAŃSKI J.A., 1978, *Obciążenia wiatrem budowli i konstrukcji*, Arkady.

ŹRÓDŁA INTERNETOWE

- {1} commons.wikimedia.org
- {2} www.wikipedia.org
- {3} structurae.net
- {4} www.bridgemeister.com
- {5} www.flickr.com
- {6} www.highestbridges.com
- {7} www.ketchum.org
- {8} www.panoramio.com
- {9} www.plock24.pl
- {10} www.sinopecweekly.com

WYBRANE ZAGADNIENIA DYNAMIKI, AERODYNAMIKI I NIEZAWODNOŚCI RUROCIĄGOWYCH MOSTÓW WISZĄCYCH

Streszczenie

W rozprawie zaproponowano zastosowanie techniki podstruktur do budowy modelu numerycznego wiszących mostów rurociągowych na potrzeby analiz zagadnień dynamicznych. Zgodnie z ideą tej metody, złożoną konstrukcję mostu potraktowano jako zespół współpracujących ze sobą podstruktur, dla których indywidualnie dobiera się metodę formułowania równań ruchu. Zastosowanie tego podejścia umożliwiło uwzględnienie odrębnych cech charakteryzujących wydzielone podstruktury, przy równoczesnym zmniejszeniu liczby dynamicznych stopni swobody modelu konstrukcji w porównaniu z typowymi modelami MES.

W modelu mostu wyróżniono następujące podstruktury: rurociąg, ciężna główna i wiatrowe, wieszaki, odciały oraz pylony. Równania ruchu elementów ciężnowych wyprowadzono metodą Galerkina, przyjmując za punkt wyjścia cząstkowe równania różniczkowe opisujące przestrzenne, nieliniowe drgania wstępnie napiętego ciężna podpartego na końcach, z uwzględnieniem ruchu podpór i punktowego obciążenia wieszakami. Rurociąg potraktowano jako smukłą belkę o przekroju rurowym, której drgania giętne w płaszczyźnie pionowej i poziomej są opisane nieliniowym równaniem Eulera-Bernoulliego. Równania drgań w obu płaszczyznach przekształcono do postaci równań zwyczajnych za pomocą metody elementów skończonych w ujęciu Galerkina. Wieszaki łączące rurociąg z ciężnami głównymi i wiatrowymi przyjęto jako pręty typu kratownicowego. Równania ruchu pylonów wyznaczono stosując standardową metodę elementów skończonych. Końcowe równania ruchu opisujące nieliniowe drgania rurociągowego mostu wiszącego uzyskano biorąc pod uwagę warunki zgodności przemieszczeń oraz równowagi sił w miejscach połączeń podstruktur.

Opracowany model numeryczny mostu wykorzystano do sformułowania efektywnych algorytmów przeznaczonych do analizy wybranych zagadnień dynamiki, aerodynamiki i niezawodności, ilustrując w ten sposób możliwości obliczeniowe jakie daje zaproponowany model. Na podstawie obszernych studiów literaturowych i przeglądu głównych problemów badawczych związanych z dynamiką wiszących mostów rurociągowych wybrano do szczegółowych analiz trzy zagadnienia: przepływ cieczy przez rurociąg, wzbudzenie drgań turbulentnym wiatrem (buffeting) oraz niezawodność w sensie pierwszego przekroczenia. Analizy przeprowadzono w zakresie nieprezentowanym dotąd w literaturze. W szczególności zbadano efekty wynikające z nieliniowości geometrycznej spowodowanej dużymi przemieszczeniami rurociągu i ciężnami. Ponadto, oceniono wpływ prędkości przepływu cieczy na częstości drgań własnych mostu i charakterystyki drgań deterministycznych (liniowych i nieliniowych)

wymuszonych przepływem cieczy, a także na charakterystyki drgań stochastycznych wzbudzanych buffetingiem i prawdopodobieństwo przekroczenia założonego poziomu przemieszczeń rurociągu.

Do badań numerycznych przyjęto przykładowy model rurociągowego mostu wiszącego, wzorowany na obiekcie rzeczywistym. Przedstawiono wyniki rozwiązań zagadnienia własnego, prowadzące do ustalenia miarodajnej liczby funkcji aproksymujących przemieszczenia cięgien oraz miarodajnej liczby elementów skończonych zastosowanych do dyskretyzacji rurociągu. W badaniach poświęconych oddziaływaniu na rurociąg płynącej cieczy przyjęto, że ciecz jest półnieskończonym odcinkiem ciągłej ruchomej masy i rozważono trzy scenariusze obciążenia: napływ cieczy, stan ustalony, gdy rurociąg jest całkowicie napełniony cieczą i opróżnianie rurociągu. Określono wartość krytyczną prędkości ruchu masy cieczy w stanie ustalonym, przy której konstrukcja mostu traci stateczność. W analizach numerycznych skupiono uwagę na wyznaczeniu pionowych przemieszczeń rurociągu, w zakresie rozwiązań liniowych i nieliniowych, quasi-statycznych i dynamicznych. Stwierdzono, że zarówno wpływy nieliniowe jak i wpływy dynamiczne ujawniające się w przemieszczeniach rurociągu spowodowanych przepływem cieczy są mało istotne, gdy prędkość przepływu mieści się w zakresie do 5 m/s, stosowanym w praktyce w wiszących mostach rurociągowych.

Przedmiotem drugiej części badań było zagadnienie oddziaływania turbulencji wiatru na rurociągowy mosty wiszące poddane równoczesnemu obciążeniu ruchomą masą cieczy. Sformułowano siły aerodynamiczne działające na belkę rurociągową, przy założeniu, że stacjonarne losowe pole wiatru jest podzielone na segmenty wzdłuż rozpiętości mostu. Uwzględniono przestrzenną korelację fluktuacji prędkości wiatru pomiędzy poszczególnymi segmentami rurociągu i korelację czasową w obrębie danego segmentu. Przedstawiono rozwiązania teoretyczne w zakresie teorii korelacyjnej, tj. wyznaczono formuły określające wartości oczekiwane i wariancje poziomych przemieszczeń rurociągu. W analizie numerycznej tych charakterystyk zwrócono szczególną uwagę na wpływ prędkości ruchu masy wewnątrz rurociągu. Uzyskane wyniki obliczeń wykorzystano w kolejnej części rozprawy, gdzie przedstawiono rozwiązania problemu niezawodności w sensie pierwszego przekroczenia założonego stanu granicznego. Przeprowadzono analizę numeryczną średniej liczby przekroczeń w jednostce czasu oraz prawdopodobieństwa przekroczenia przemieszczeń granicznych, w zależności od prędkości przepływu masy oraz średniej prędkości wiatru.

W podsumowaniu rozprawy sformułowano wnioski, które są potwierdzeniem osiągnięcia głównych celów badań oraz stanowią udowodnienie założonych na wstępie tez.

SELECTED PROBLEMS OF DYNAMICS, AERODYNAMICS AND RELIABILITY OF PIPELINE SUSPENSION BRIDGES

Summary

In the dissertation, in order to build a numerical model of pipeline suspension bridges for the dynamic analyzes, the substructure technique was proposed. According to the idea of this method, the complex structure of the bridge was considered as an assemblage of interconnected substructures for which the method of deriving of equations of motion was individually selected. Owing to this approach it was possible to take into account specific features characterizing the substructures, while at the same time reduce the number of dynamic degrees of freedom of the bridge model in comparison with typical FEM models.

The following substructures were highlighted in the bridge model: pipeline, main and wind cables, hangers, backstays and pylons. In the case of cable elements, equations of motion were derived using the Galerkin's method where the partial differential equations of nonlinear spatial vibrations were the starting point of the procedure. An initial tension of the cable, movement of supports and point load caused by hangers were taken into consideration. The pipeline was treated as a slender beam with pipe-type cross-section which bending vibrations in the vertical and horizontal planes were described by the nonlinear Euler-Bernoulli equation. The equations describing bending vibrations in both planes were transformed into ordinary equations in the time domain using Galerkin's Finite Element Method. Hangers connecting the pipeline with main and wind cables were assumed as extensible massless truss elements. The equations of motion for pylons were formulated using the standard finite element method. The final nonlinear equations governing the motion of a pipeline suspension bridge were obtained accounting for the compatibility of displacements and the equilibrium equations of interaction forces at interconnection points of the substructures.

The numerical model of the bridge was used to formulate effective algorithms for the analysis of selected problems of dynamics, aerodynamics and reliability, thus illustrating the wide range of possibilities offered by the proposed model. On the basis of extensive literature studies and a review of the main research issues related to the dynamics of pipeline suspension bridges, three problems were selected for detailed analyses: fluid flow in the pipeline, turbulent wind excitation (buffeting) and first-passage reliability problem. The analyzes were carried out in a scope not presented so far in the literature. In particular, the effects of geometric nonlinearity caused by large displacements of the pipeline and cables

were examined. Moreover, the influence of the fluid flow velocity on the natural frequencies of the bridge and the characteristics of deterministic vibrations (linear and nonlinear) forced by the fluid flow was evaluated. The flow velocity impact on the characteristics of stochastic vibrations induced by buffeting and the probability of exceeding the assumed level of pipeline displacements was also investigated. An exemplary model of a pipeline suspension bridge, based on a real object, was adopted for the numerical analyzes. The results of the eigenvalue problem were presented, leading to the determination of a reliable number of approximation functions describing the movement of cables and a representative number of finite elements used for pipeline discretization. In the studies devoted to the effect of fluid flow on the pipeline, the fluid was assumed as a semi-infinite segment of a continuous moving mass, and three load scenarios were considered: filling the pipeline, steady state when the pipeline is completely filled with the fluid, and emptying the pipeline. A critical value of the fluid mass velocity in the steady state, at which the bridge structure loses its stability, was determined. The numerical analyzes were focused on determining vertical displacements of the pipeline, covering linear and nonlinear, quasi-static and dynamic solutions. It was found that both the nonlinear and dynamic effects resulting from the fluid flow are small when the flow velocity is in the practical range of values, i.e. up to 5 m/s.

The subject of the second part of the research was the problem of wind turbulence effects on pipeline suspension bridges subjected to simultaneous load of moving mass of the fluid. The aerodynamic forces acting on the pipeline beam were formulated, assuming that the stationary random wind field is segmented along the bridge span. The spatial correlation between speed fluctuations of the wind acting on individual pipeline segments as well as the time correlation within a given segment were taken into account in theoretical solutions considered in terms of the correlation theory. The formulae defining the expected value and variance of the horizontal displacement at a given cross-section of pipeline were obtained. Numerical results were presented and analyzed with respect to the influence of velocity of the mass moving inside the pipeline. The obtained findings were applied in the next part of the dissertation, where the solutions to first-passage reliability problem of the considered bridge were presented. Numerical analyzes of the mean number of passages per time unit and the first-passage failure probability depending on the fluid mass velocity and the average wind speed were carried out.

Conclusions that confirm an accomplishment of the main research objectives and prove the assumed theses were formulated at the end of dissertation.