

Na prawach rękopisu

Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego  
Politechniki Wrocławskiej

**DYNAMIKA BELEK  
WIELOPRZĘSŁOWYCH I PŁYT  
PODPARTYCH PUNKTOWO  
PODDANYCH DZIAŁANIU OBCIĄŻEŃ  
RUCHOMYCH**

**Raport serii PRE nr 5/2020**

**Praca doktorska**

mgr inż. Filip Zakęś

Słowa kluczowe:

dynamika budowli

obciążenia ruchome

belki wieloprzęsłowe

plyty podparte punktowo

Promotor: prof. dr hab. inż. Paweł Śniady

Wrocław, lipiec 2020

Autor:

mgr inż. Filip Zakęś

.....

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu  
Wydział Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji  
Instytut Budownictwa  
Plac Grunwaldzki 24, 50-363 Wrocław  
tel. 71 320 55 21  
e-mail: filip.zakes@upwr.edu.pl

Raport został złożony w Redakcji Wydawnictw Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej w lipcu 2020 r.

Lista odbiorców:	Recenzenci	2 egz.
	Promotor	1 egz.
	Autor	1 egz.
	CWiINT PWr	1 egz.
	Archiwum W-2	1 egz.

*Składam serdeczne podziękowanie mojemu promotorowi  
prof. dr hab. inż. Pawłowi Śniademu  
za pomoc, cierpliwość i wyrozumiałość okazaną w trakcie realizacji rozprawy doktorskiej.  
Dziękuję również mojej żonie Anastazji, synowi Leonowi  
oraz moim rodzicom Agnieszce i Ryszardowi  
za wszystkie cenne rady i wskazówki jakie od nich otrzymałem i jakie jeszcze otrzymam.*



## Spis treści

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ.....	5
1. WPROWADZENIE .....	7
2. CEL I ZAKRES PRACY .....	12
3. DYNAMIKA BELEK JEDNOPRZĘSŁOWYCH .....	16
3.1. RÓWNANIE RUCHU BELKI EULERA-BERNOULLIEGO .....	16
3.2. ZAGADNIENIE WŁASNE .....	18
3.2.1. BELKA SWOBODNIE PODPARTA .....	19
3.2.2. BELKA OBUSTRONNIE UTWIERDZONA.....	21
3.2.3. BELKA JEDNOSTRONNIE UTWIERDZONA I SWOBODNIE PODPARTA .....	23
3.3. DRGANIA WYMUSZONE .....	26
3.3.1. DRGANIA WYMUSZONE RUCHOMĄ SIŁĄ SKUPIONĄ .....	26
3.3.2. DRGANIA WYMUSZONE RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM ROZŁOŻONYM.....	34
4. DYNAMIKA BELEK WIELOPRZĘSŁOWYCH .....	40
4.1. BELKA OBCIĄŻONA ZMIENNĄ W CZASIE SIŁĄ SKUPIONĄ .....	41
4.2. RÓWNANIA CAŁKOWE VOLTERRY .....	43
4.3. PROCEDURA NUMERYCZNA .....	46
4.4. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE .....	49
4.4.1. BELKA DWUPRZĘSŁOWA .....	49
4.4.2. BELKA TRÓJPRZĘSŁOWA .....	52
5. DYNAMIKA UKŁADU DWÓCH BELEK SPRZĘŻONYCH .....	55
5.1. DYNAMIKA BELEK POJEDYNCZYCH .....	56
5.2. DRGANIA BELEK SPRZĘŻONYCH .....	58
5.3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY .....	59
6. DYNAMIKA CIENKICH PŁYT IZOTROPOWYCH .....	61
6.1. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA PODDANA DZIAŁANIU RUCHOMEJ SIŁY SKUPIONEJ .....	62
6.2. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA OBCIĄŻONA RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM ROZŁOŻONYM .....	65
6.3. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA OBCIĄŻONA ZMIENNĄ W CZASIE SIŁĄ SKUPIONĄ .....	66
6.4. DRGANIA PŁYTY SWOBODNIE PODPARTEJ Z PUNKTOWYMI PODPORAMI POŚREDNIMI .....	69
6.5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY .....	71
7. UKŁADY DYSKRETNE .....	74
7.1. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH .....	74

7.1.1. MRS W DYNAMICE BELEK WIELOPRZĘSŁOWYCH.....	75
7.1.2. MRS W DYNAMICE PUNKTOWO PODPARTYCH CIENKICH PŁYT IZOTROPOWYCH.....	80
7.2. METODA GRANULACJI MAS.....	83
7.3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY.....	89
8. RUCHOME OBCIĄŻENIA LOSOWE.....	91
8.1. CZASOPRZESTRZENNY STACJONARNY PROCES STOCHASTYCZNY.....	91
8.2. LOSOWA SERIA RUCHOMYCH SIŁ SKUPIONYCH.....	93
9. PODSUMOWANIE.....	96
LITERATURA.....	98
STRESZCZENIE.....	106
SUMMARY.....	108

## WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ

### Symbole łacińskie:

$A_n, B_n, \dots, J_n$  – stałe całkowania

$B$  – szerokość płyty

$c$  – stała tłumienia

$\mathbf{C}$  – macierz tłumienia

$D$  – sztywność giętna płyty

$E$  – moduł Younga

$E[\cdot]$  – wartość oczekiwana

$G_{1n}, G_{2n}, \dots, G_{4n}$  – stałe funkcji własnych

$h_n(T - \tau)$  – impulsowa funkcja przejścia

$H(T - \xi)$  – funkcja Heaviside'a

$I$  – moment bezwładności

$\mathbf{K}$  – macierz sztywności

$L$  – rozpiętość belki, długość płyty

$m$  – masa rozłożona po długości pręta

$\mathbf{M}$  – macierz bezwładności

$\bar{\mathbf{p}}(t)$  – wektor sił wzbudzających

$P$  – siła skupiona

$q$  – obciążenie równomiernie rozłożone

$s_i$  – sztywność więzi sprężystej

$t$  – czas

$T$  – czas bezwymiarowy

$v$  – prędkość ruchu obciążenia

$w(\xi, T)$  – przemieszczenie pionowe

$\dot{w}(\xi, T)$  – prędkość przemieszczenia

$\ddot{w}(\xi, T)$  – przyspieszenie przemieszczenia

$W_n(t)$  – funkcja własna

$x, y$  – współrzędne przestrzenne

$Y_n(T)$  – uogólniona współrzędna Lagrange'a

**Symbole greckie:**

$\alpha$  – współczynnik tłumienia, parametr metody Newmarka

$\beta$  – parametr metody Newmarka

$\gamma_n$  – stała

$\delta(\xi - T)$  – delta Diraca

$\eta$  – parametr prędkości obciążenia

$\lambda_n$  – wartość własna

$\mu$  – masa rozłożona na powierzchni płyty

$\nu$  – współczynnik Poissona, współczynnik dynamiczny

$\xi, \zeta$  – bezwymiarowe współrzędne przestrzenne

$\rho$  – gęstość materiału

$\omega_n$  – częstość własna

$\Omega_n$  – częstość własna tłumiona



### 1. WPROWADZENIE

Konstrukcje inżynierskie poddane działaniu obciążeń zmieniających swoje położenie w sposób dynamiczny stanowią ważną grupę obiektów budowlanych, których dokładna analiza stanowi spore wyzwanie z teoretycznego punktu widzenia jak również ma istotne znaczenie w praktyce projektowej. Zagadnienie to obejmuje przede wszystkim budowle komunikacyjne, takie jak mosty drogowe i kolejowe, kładki dla pieszych, estakady suwnicowe, stropy przejść i tuneli podziemnych czy pasy startowe samolotów. Uwzględnienie wpływu prędkości ruchu obciążenia po konstrukcji w obliczeniach prowadzi do uzyskania znacznie większych wartości przemieszczeń dynamicznych (drgań), a co za tym idzie obliczeniowych sił przekrojowych, w stosunku do wartości uzyskanych w przypadku układu poddanego działaniu obciążenia statycznego. Problem konstrukcji poddanych działaniu ruchomych obciążeń stanowił przedmiot wielu publikacji naukowych, których autorzy analizowali rozmaite schematy dynamiczne takie jak struna, belka [49], [69], [88] rama [56], płyta [60], [86], [87] czy powłoka, jak również modele bardziej skomplikowane jak układy sprzężonych ze sobą strun [59] lub belek [2], [52], [53], [89], belki kompozytowe [1], [50] czy mosty podwieszane [7], [8], [9], [10], [11], rozpatrując różne modele obciążeń, zarówno nieinercyjnych (ruchoma siła, ruchome obciążenie rozłożone, ruchomy moment skupiony lub rozłożony [17], [88]) jak i inercyjnych (ruchoma masa skupiona lub rozłożona, ruchomy oscylator o jednym lub wielu stopniach swobody [4], [5], [19], [20], [21]) w zakresie dynamiki deterministycznej jak i stochastycznej [23], [36], [48], [58], [62], [63], [70], [90]. Warto zauważyć, że większość wymienionych prac skupiała się na układach jednoprzęsłowych, bez podpór pośrednich, w przypadku których uzyskanie dokładnych rozwiązań analitycznych jest znacznie łatwiejsze w stosunku do bardziej złożonych układów, takich jak np. wieloprzęsłowa ciągła belka mostowa czy płyta stropowa z punktowymi podporami pośrednimi, a więc konstrukcji, które są powszechnie projektowane i realizowane. Tak zaprojektowany układ wieloprzęsłowy dzięki podporom pośrednim pozwala na konstruowanie dźwigarów o dużych rozpiętościach między skrajnymi punktami podparcia co znajduje swoje zastosowanie przede wszystkim w budownictwie mostowym.

Jednym z pierwszych udokumentowanych rozwiązań problemu belki mostowej poddanej działaniu ruchomej siły skupionej jest praca Willisa z 1849 roku [82], w której uzyskano rozwiązanie przybliżone oparte na założeniu, że obciążenie zewnętrzne znacznie przekracza ciężar własny belki. Na podobnych założeniach oparta jest eksperymentalna praca Stokesa [64] z tego samego roku, w której badano wpływ prędkości pociągu przejeżdżającego po stalowym moście jednoprzęsłowym na drgania konstrukcji.

Z odmiennego założenia wyszedł w 1905 roku Kryłow [37] uzyskując rozwiązanie problemu mostowej belki Eulera-Bernoulliego obciążonej siłą znacznie mniejszą od ciężaru własnego belki. Otrzymane rozwiązanie zostało przedstawione w postaci sumy całki szczególnej, odpowiadającej drganiom aperiodycznym oraz całki ogólnej opisującej drgania swobodne.

W pracy Kączkowskiego [31] z 1963 roku przedstawiono rozwiązania zamknięte zagadnienia drgań aperiodycznych belki swobodnie podpartej obciążonej ruchomą siłą skupioną. Rozwiązania przypadków belek jednoprzęsłowych o dowolnych warunkach brzegowych, a także dla ram obciążonych siłą poruszającą się po poziomym ryglu przedstawił Reipert w swoich pracach z 1969 i 1970 roku [56], [57].

Analiza drgań przęsła mostowego poddanego działaniu ruchomego lepko-sprężystego oscylatora odzwierciedlającego poruszający się pojazd była tematem prac Langer z 1973 i 1974 roku [38], [39], w których sformułowano równanie ruchu w postaci macierzowego równania różniczkowego o zmiennych współczynnikach.

Zbiór rozwiązań przypadków różnych modeli konstrukcyjnych przedstawił Śniady [72] w swojej monografii z 1976 roku, w której rozpatrywał drgania takich układów jak belka Timoszenki, struna, płyta oraz powłoka cylindryczna, analizując przypadki obciążenia ruchomą siłą skupioną o stałej amplitudzie oraz zmieniającej swoją wartość w sposób harmoniczny.

Zagadnieniom ruchomych obciążeń inercyjnych oddziałujących na mosty kolejowe poświęcone były prace Klasztornego i Langer z lat 1978 – 1990 [33], [34], [35], [42], przedstawiające m.in. dynamikę układu sprzężonych belek pryzmatycznych połączonych ze sobą układem więzi sprężystych odzwierciedlających odkształcalne poprzecznice, poddanego działaniu ruchomego obciążenia inercyjnego.

Monografia Fryby [22] z 1999 roku stanowi obszerny zbiór rozwiązań problemu drgań układów konstrukcyjnych poddanych działaniu różnych modeli obciążeń ruchomych. W pracy rozpatrzono m.in. belkę swobodnie podpartą poddaną działaniu ruchomej siły skupionej, ruchomej siły harmonicznego oraz ruchomego obciążenia rozłożonego, a także obciążeń inercyjnych takich jak ruchomy oscylator o dwóch stopniach swobody. Analizie poddano również bardziej złożone układy takie jak belka ciągła dwuprzęsłowa, rama, prostokątna płyta swobodnie podparta czy nieskończona płyta na sprężystym podłożu.

Jedną z pierwszych prac poświęconych w całości belkom wieloprzęsłowym jest praca Hayashikawy i Watanabe [24] z 1981 roku skupiająca się na analitycznym wyznaczeniu wartości własnych ciągłej belki wieloprzęsłowej o dowolnych warunkach brzegowych. Drgania belki wymuszone ruchomą siłą skupioną otrzymano stosując analizę modalną.

Drgania poprzeczne oraz podłużne wieloprzęsłowej belki kompozytowej o dowolnych warunkach brzegowych były tematem pracy He i Rao [25] z 1993 roku. Równania ruchu w omawianym zagadnieniu zbudowano w oparciu o metodę bilansu energetycznego oraz zasadę Hamiltona. W pracy uwzględniono takie parametry jak grubość warstwy spoiwa, dowolne położenie podpór pośrednich, oddziaływanie temperatury oraz właściwości tłumiące materiału.

W pracy [12] z 1993 roku Chatterjee, Datta i Surana analizowali drgania wieloprzęsłowej belki mostowej obciążonej poruszającym się pojazdem z uwzględnieniem interakcji między pojazdem a nawierzchnią mostu, skręcania wynikającego z mimośrodowo toru ruchu obciążenia, a także losowych nieregularności nawierzchni. Rozwiązanie uzyskano w dziedzinie czasu w oparciu o procedurę iteracyjną uwzględniającą nieliniowość siły interakcji pojazd-nawierzchnia.

Problemowi belki wieloprzęsłowej poddanej działaniu obciążenia ruchomego poświęcone są prace Lee, który w pracy [43] z 1994 rozpatrywał ruchome obciążenie nieinercyjne, a w pracy [44] z 1996 analizował przypadek ruchomej masy. Równania ruchu zostały zbudowane i rozwiązane w postaci macierzowej w oparciu o równania Lagrange'a oraz analizę modalną.

Własne rozwiązanie problemu drgań belki wieloprzęsłowej zaproponowali w 1997 roku Henchi, Fafard, Dhatt i Talbot [26]. Belkę wieloprzęsłową podzielono na pryzmatyczne belkowe elementy skończone w liczbie odpowiadającej liczbie przęseł. W obliczeniach wykorzystano szybką transformację Fouriera połączoną z analizą modalną w celu wyznaczenia dynamicznej odpowiedzi belki poddanej działaniu ruchomych sił skupionych.

Drganiom wieloprzęsłowej belki Timoszenki poświęcone są prace Wanga [80] z 1997 roku oraz Wanga i Lina [81] z 1998. Pierwsza z wyżej wymienionych prac dotyczy drgań deterministycznych wynikających z obciążenia konstrukcji ruchomą siłą skupioną, natomiast druga poświęcona jest drganiom losowym wywołanym stacjonarnym procesem stochastycznym o stałej wartości średniej oraz wariancji.

W pracy [91] z 1998 roku Zheng, Cheung, Au i Cheng rozpatrywali drgania belki wieloprzęsłowej o zmiennym przekroju poddanej działaniu ruchomych obciążeń

nieinercyjnych. Zastosowano zmodyfikowane funkcje własne belki wieloprzęsłowej spełniające zarówno warunki brzegowe jak i warunki zerowych ugięć w punktach podparcia pośredniego. Ci sami autorzy w pracy [13] z 1999 roku opisali problem belki wieloprzęsłowej obciążonej ruchomymi oscylatorami. Wykorzystując podejście Lagrange'a zbudowano macierzowe równanie ruchu opisujące drgania układu ciągłego.

Rozwiązanie problemu drgań belki wieloprzęsłowej obciążonej masą skupioną poruszającą się ze stałą prędkości przedstawili Ichikawa, Miyakawa i Matsuda w pracy [27] z 2000 roku. Problem opisano za pomocą rozwinięcia w szereg funkcji własnych, analizy modalnej oraz całkowania bezpośredniego z możliwością uwzględnienia niejednorodności belki, zróżnicowanych warunków brzegowych oraz zmiennej prędkości ruchu obciążenia.

Ruchome obciążenie inercyjne występuje również w pracy Klasztornego [32] z 2000 roku, która opisuje drgania wieloprzęsłowego mostu kolejowego, zamodelowanego jako ciąg belek przegubowych, obciążonego ruchem pociągów dużej prędkości przedstawionych jako oscylatory o 6 stopniach swobody.

Praca Dugusha i Eisenbergera [18] z 2002 roku poświęcona jest drganiom belek wieloprzęsłowych o zmiennej sztywności poddanych działaniu obciążeń poruszających się ze stałą i zmienną prędkością. W analizie zagadnienia zastosowano metody analizy modalnej oraz całkowania bezpośredniego. Uzyskane formy własne belki wieloprzęsłowej przedstawiono w postaci nieskończonych szeregów potęgowych.

W pracy [47] z 2006 roku Martinez-Castro, Museros i Castello-Linares przedstawili pół-analityczne rozwiązania problemu drgań wieloprzęsłowej belki Eulera-Bernoulliego w dziedzinie czasu. Zastosowano jedynie dyskretyzację przestrzenną układu a obciążenie modalne przedstawiono przy wykorzystaniu wielomianów Hermite'a.

De Salvo, Muscolino i Palmeri zaproponowali w swojej pracy [61] z 2010 roku podejście polegające na dekompozycji belki wieloprzęsłowej na jednoprzęsłowe elementy pierwszo- i drugorzędne o znanych funkcjach własnych oraz wykorzystaniu autorskiej metody syntezy modalnej komponentów. Wyprowadzone procedury obliczeniowe sprawdzono na przypadkach ruchomej siły skupionej oraz ruchomej masy skupionej.

Rozwiązania zamknięte drgań wieloprzęsłowej belki Eulera-Bernoulliego obciążonej ruchomym obciążeniem nieinercyjnym przedstawili w pracy [29] Johansson, Pacoste i Karoumi. Wyznaczono częstotliwości oraz postaci własne dla modeli uwzględniających

skokową zmianę sztywności giętnej, dowolną liczbę pręseł oraz występowanie więzi sprężystych. Uzyskano dokładne rozwiązania w dziedzinie częstotliwości wykorzystując transformację Laplace'a.

W pracy [3] z 2013 roku autorstwa Ariaei, Ziaei-Rad i Malekzadeh omówiono drgania wieloprzęsłowej belki Timoszenki z wewnętrznymi oraz zewnętrznymi więziami sprężystymi poddanej działaniu obciążenia inercyjnego w postaci ruchomej masy. Wyznaczone zostały częstości własne przy użyciu analitycznej macierzy przejścia. Drgania wymuszone belki wieloprzęsłowej określono stosując podejście rozwinięcia modalnego w oparciu o wcześniej uzyskane funkcje własne.

Praca Yanga, Gao i Liu [84] z 2018 roku poświęcona jest drganiom wieloprzęsłowej belki mostowej podpartej sprężystymi słupami, poddanej działaniu dowolnej liczby ruchomych lepko-sprężystych oscylatorów poruszających się z dowolną prędkością. Autorzy zaproponowali pół-analityczne rozwiązanie ułatwiające opis interakcji między belką o ruchomym oscylatorem.

### 2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy jest wyznaczenie pół-analitycznych rozwiązań problemu drgań belkowych oraz płytowych układów konstrukcyjnych podpartych punktowymi podporami pośrednimi. W pracy rozpatrzono przypadki ruchomych obciążeń nieinercyjnych, a konkretnie ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego. Założono, że w chwili początkowej, w której obciążenie pojawia się na konstrukcji, występują zerowe warunki początkowe w zakresie ugięć oraz prędkości przemieszczeń układ. Do wyznaczenia drgań belek wieloprzęsłowych oraz punktowo podpartych cienkich płyt izotropowych wynikających z ruchomego obciążenia nieinercyjnego zastosowano metodę bazującą na statycznej metodzie sił, polegającą na zastąpieniu znanego ze statyki układu równań zgodności przemieszczeń układem równań całkowych Voltery pierwszego (w przypadku podpór nieodkształcalnych) lub drugiego rodzaju (w sytuacji, gdy występują punktowe więzi sprężyste). Zaletą takiego podejścia jest całkowite pominięcie przestrzennej dyskretyzacji analizowanego układu konstrukcyjnego.

Prezentowana praca składa się z dziewięciu rozdziałów, z których pierwsze dwa stanowią wprowadzenie, zawierające przegląd wybranych pozycji literaturowych poświęconych omawianej tematyce, a także omówienie celu i zakresu pracy.

Tematem rozdziału trzeciego jest dynamika jednoprzęsłowych belek wg modelu ciągłego Eulera-Bernoulliego o następujących schematach statycznych:

- belka swobodnie podparta;
- belka obustronnie utwierdzona;
- belka jednostronnie utwierdzona i swobodnie podparta.

Dla wyżej wymienionych układów konstrukcyjnych wyznaczono funkcje własne w bazie bezwymiarowych współrzędnych przestrzennych, a także wyznaczono drgania wymuszone z uwzględnieniem oraz pominięciem tłumienia, wynikające z obciążenia układu ruchomą siłą skupioną lub ruchomym obciążeniem rozłożonym. Przedstawiono rozwiązania w bazie bezwymiarowej współrzędnej czasowej, uwzględniając zarówno drgania wymuszone w czasie, gdy obciążenie znajduje się na belce, jak i drgania swobodne, gdy obciążenie zjeżdża z belki.

W rozdziale czwartym omówiono drgania wieloprzęsłowych ciągłych belek przyrzatycznych poddanych działaniu ruchomego obciążenia. Przyjęto założenie, że drgania wieloprzęsłowego układu można przedstawić jako drgania belki jednoprzęsłowej poddanej działaniu zadanego obciążenia zewnętrznego oraz zestawu zmiennych w czasie sił skupionych odpowiadających reakcjom w myślowo usuniętych więziach podporowych. W ten sposób

można połączyć rozwiązania przypadków belek jednoprzęsłowych poddanych działaniu obciążeń ruchomych przedstawionych w rozdziale poprzednim z rozwiązaniem przypadku belki jednoprzęsłowej obciążonej zmienną w czasie siłą skupioną działającą w miejscu usuniętej więzi nadliczbowej. Rozwiązanie takiego przypadku można przedstawić w postaci splotu, wykorzystując impulsową funkcję przejścia. Stosując superpozycję wyżej wymienionych przypadków obciążeń oraz znając zerowe warunki ugięć belki w punktach podparcia pośredniego (lub wartości ugięcia uzależnione od sztywności podpory w przypadku belki spoczywającej na pośrednich podporach sprężystych) jesteśmy w stanie zbudować układ równań zgodności przemieszczeń będący układem równań całkowych Voltery pierwszego lub drugiego rodzaju w zależności od sztywności punktowych podpór pośrednich. Z tak zbudowanego układu równań jesteśmy w stanie wyznaczyć siły nadliczbowe będące reakcjami w myślowo usuniętych więziach nadliczbowych. W rozdziale zaproponowano także procedurę numeryczną rozwiązania układu równań całkowych Voltery pozwalającą na określenie wartości reakcji podporowych w określonych chwilach w zależności od przyjętego kroku czasowego. Dla zilustrowania efektywności przedstawionych procedur załączono dwa przykłady obliczeniowe belki dwuprzęsłowej oraz trójprzęsłowej poddanych działaniu ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia rozłożonego.

Rozdział piąty poświęcony jest drganiom złożonego układu dwóch sprzężonych ze sobą belek Eulera-Bernoulliego z których jedna poddana jest działaniu obciążenia ruchomego. Belki połączone są ze sobą układem więzi sprężystych. Taki model odpowiada m.in. modelowi mostu składającego się z dźwigarów głównych, toru jezdnego oraz układu poprzecznic zamodelowanych jako więzi odkształcalne. Przedstawiono rozwiązanie uwzględniające dowolny rozstaw więzi sprężystych, zróżnicowane parametry geometryczno-materiałowe obydwu belek takie jak rozpiętość, masa jednostkowa, tłumienie, sztywność giętna czy warunki podparcia. Rozwiązanie stanowi rozwinięcie procedur przedstawionych w rozdziale poprzednim, z tą różnicą, że rozwiązywany jest układ równań całkowych Voltery drugiego rodzaju z uwagi na skończoną sztywność więzi sprężystych. Rozdział zakończony jest przykładem obliczeniowym układu dwóch belek połączonych ze sobą dwiema więziami sprężystymi.

W rozdziale szóstym omówiono dynamikę cienkich prostokątnych płyt izotropowych podpartych swobodnie na swoim obwodzie oraz punktowo za pośrednictwem dowolnej liczby podpór pośrednich rozmieszczonych dowolnie w swoim obszarze. Podobnie jak w przypadku belek z rozdziałów poprzednich założono, że jesteśmy w stanie przedstawić drgania płyty z

podporami pośrednimi jako drgania płyty swobodnie podpartej poddanej działaniu zadanego obciążenia ruchomego (ruchoma siła skupiona lub obciążenie rozłożone) oraz zmiennych w czasie sił skupionych działających w miejscach myślowo usuniętych podpór punktowych. Stąd w rozdziale zawarto rozwiązania w zakresie drgań tłumionych oraz nietłumionych płyty swobodnie podpartej obciążonej ruchomą siłą skupioną, ruchomym obciążeniem rozłożonym oraz zmienną w czasie siłą skupioną reprezentującą reakcję w usuniętej więzi punktowej. Sposób budowy układu równań całkowych Volterra jak również numeryczna procedura jego rozwiązania jest identyczna jak w przypadku belek. Rozdział podsumowuje przykład obliczeniowy płyty swobodnie podpartej z dwiema podporami pośrednimi.

Rozdział siódmy poświęcony jest dynamice układów dyskretnych. Przedstawiono dwie metody dyskretyzacji przestrzennej:

- metodę różnic skończonych (MRS) zastosowaną w przypadku belek wieloprzęsłowej o stałej oraz zmiennej geometrii przekroju poprzecznego, a także w przypadku cienkich płyt izotropowych;
- metodę granulacji mas (MGM) polegającą na zastąpieniu masy układu rozłożonej w sposób ciągły dyskretnym układem mas skupionych.

Wyżej wymienione metody mogą stanowić alternatywę jak również narzędzie kontroli poprawności rozwiązania uzyskanego metodami analitycznymi. Są to metody proste w swoich założeniach i łatwe do zastosowania w obliczeniach komputerowych. W rozdziale przedstawiono przykład belki trójprzęsłowej o zmiennym przekroju poddanej działaniu siły skupionej. Zadanie rozwiązano obiema wspomnianymi powyżej metodami.

W rozdziale ósmym skupiono się na ruchomych obciążeniach losowych. Jest to problem istotny z uwagi na fakt, że większość konstrukcji inżynierskich, takich jak budowle komunikacyjne (mosty, kładki dla pieszych stropy przejść podziemnych) narażonych jest na działanie obciążenia nie dającego się określić w sposób deterministyczny. Probabilistyczne charakterystyki drgań konstrukcji można określić wykorzystując dynamiczną funkcję wpływu opisującą drgania analizowanej konstrukcji poddanej działaniu ruchomej skupionej siły jednostkowej. Takie podejście zostało przedstawione w rozdziale w dwóch przypadkach obciążeń losowych:

- czasoprzestrzenny stacjonarny proces stochastyczny;
- losowa seria ruchomych sił skupionych.



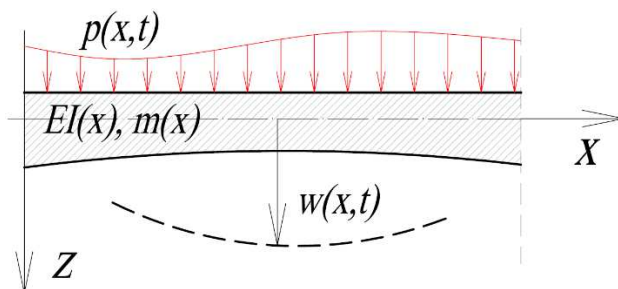
Przedstawione w rozdziale procedury wykorzystano do określenie charakterystyk probabilistycznych – wartości oczekiwanej oraz wariancji ugięcia belek przedstawionych w rozdziałach poprzednich.

Rozdział dziewiąty stanowi podsumowanie pracy.

## 3. DYNAMIKA BELEK JEDNOPRZĘSŁOWYCH

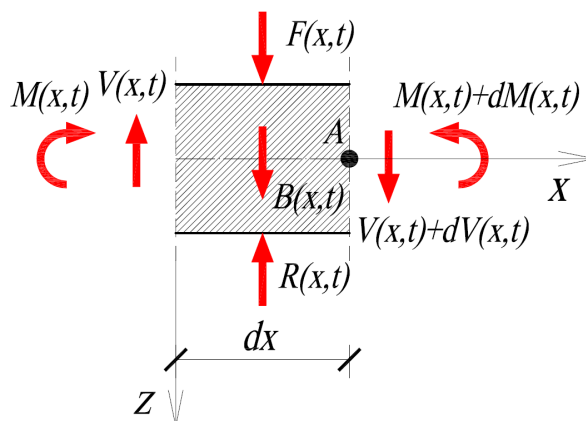
## 3.1. RÓWNANIE RUCHU BELKI EULERA-BERNOULLIEGO

Rozważmy pręt charakteryzujący się sztywnością giętą  $EI(x)$ , ciągłym rozkładem masy  $m(x) = \rho(x)A(x)$ , gdzie  $\rho(x)$  jest gęstością materiału, natomiast  $A(x)$  jest polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta, poddany działaniu zmiennego w czasie obciążenia  $p(x,t)$ , skierowanego prostopadle do osi  $x$  (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Pręt o sztywności  $EI(x)$  poddany działaniu obciążenia  $p(x,t)$

Efektom działania obciążenia  $p(x,t)$  są przemieszczenia opisane funkcją  $w(x,t)$  nazywane drganiami poprzecznymi. Myślowo wycięty fragment pręta o elementarnej długości równej  $dx$  przedstawiono na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Elementarny wycinek pręta wraz z działającym układem sił dynamicznych

Ruchowi omawianego wycinka pręta, wywołanemu obciążeniem:

$$F(x,t) = p(x,t)dx \quad (3.1)$$

towarzyszą, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, siła bezwładności równa:

$$B(x,t) = -m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (3.2)$$

oraz siły oporu (tłumienia), które przyjęto jako proporcjonalne do prędkości przemieszczenia:

$$R(x, t) = c(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} dx, \quad (3.3)$$

gdzie  $c(x)$  jest współczynnikiem tłumienia. Funkcje  $M(x, t)$  oraz  $V(x, t)$  oznaczają kolejno momenty zginające oraz siły tnące powstałe w przęciu.

Układając równania równowagi sumy rzutów na oś  $z$  oraz sumy momentów względem punktu A, które muszą być spełnione dla każdej chwili  $t$  otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum Z = dV(x, t) - m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \cdot dx - \\ \quad - c(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} dx + p(x, t) dx = 0 \\ \sum M_A = V(x, t) dx - dM(x, t) + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \cdot \frac{(dx)^2}{2} + \\ \quad + c(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{(dx)^2}{2} - p(x, t) \cdot \frac{(dx)^2}{2} = 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Przyjmując, że składniki równania (3.4) zawierające składnik  $\frac{(dx)^2}{2}$  są pomijalnie małe oraz dzieląc oba równania obustronnie przez  $dx$  otrzymujemy:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \\ T(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Zgodnie z założeniem płaskich przekrojów w przypadku belki Eulera-Bernoulliego moment zginający określa relacja:

$$M(x, t) = -EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.6)$$

która podstawiona do pierwszego z równań układu (3.5) pozwala nam uzyskać równanie różniczkowe opisujące drgania giętkiej belki:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + c(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (3.7)$$

W przypadku, gdy mamy do czynienia z prętem pryzmatycznym ( $EI(x), m(x), c(x) = \text{const.}$ ) równanie (3.7) można zapisać następująco:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (3.8)$$

Tak zapisane równanie jest równaniem ruchu (równowagi dynamicznej) belki Eulera-Bernoulliego o stałym przekroju i stałym rozkładzie masy na długości pręta.

Rozpatrzmy pryzmatyczny element belkowy o zadanych warunkach podparcia, charakteryzujący się skończoną długością  $L$  poddany działaniu obciążenia  $p(x - vt)$ , skierowanego prostopadle do osi  $x$  i poruszającego się ze stałą prędkością  $v$ . Równanie ruchu (3.8) przyjmuje w takim przypadku postać:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x - vt). \quad (3.9)$$

Po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \xi \in [0, 1]; \\ T &= \frac{vt}{L}, T \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3.10)$$

równanie (3.9) można zapisać następująco:

$$w^{IV}(\xi, T) + c_0 \dot{w}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = p_0(\xi - T). \quad (3.11)$$

gdzie:

$$c_0 = \frac{cvL^3}{EI}, \quad (3.12)$$

$$\sigma^2 = \frac{mv^2L^2}{EI} \quad (3.13)$$

$$p_0(\xi - T) = \frac{L^4}{EI} p[L(\xi - T)] \quad (3.14)$$

W równaniu (3.11) cyframi rzymskimi oznaczono różniczkowanie po współrzędnej przestrzennej  $\xi$  natomiast kropką (  $\dot{\phantom{x}}$  ) oznaczono różniczkowanie po współrzędnej czasowej  $T$ .

### 3.2. ZAGADNIENIE WŁASNE

Eliminując z równania (3.11) składniki związane z obciążeniem oraz z oporami ruchu otrzymujemy równanie:

$$w^{IV}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = 0, \quad (3.15)$$

które wraz z zadanymi warunkami brzegowymi stanowi tzw. zagadnienie własne. Rozwiązań (pierwiastków) powyższego równania będziemy poszukiwać w postaci:

$$w_n(\xi, T) = Y_n(T)W_n(\xi). \quad (3.16)$$

Podstawiając wyrażenie (3.16) do równania (3.15) oraz rozdzielając zmienną czasową  $T$  i przestrzenną  $\xi$  otrzymujemy zależność:

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{W_n^{IV}(\xi)}{W_n(\xi)} = -\frac{\ddot{Y}_n(T)}{Y_n(T)} = \omega_n^2, \quad (3.17)$$

która będzie spełniona dla każdego  $\xi$  i każdego  $T$  wtedy i tylko wtedy, gdy oba występujące w niej ilorazy będą równe pewnej stałej  $\omega_n^2$ . Wykonując dalsze przekształcenia otrzymujemy dwa niezależne równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach:

$$\ddot{Y}_n(T) + \omega_n^2 Y_n(T) = 0 \quad (3.18)$$

$$W_n^{IV}(\xi) - \lambda_n^4 W_n(\xi) = 0, \quad (3.19)$$

gdzie  $\lambda_n$  oznacza wartość własną i jest równa:

$$\lambda_n^4 = \omega_n^2 \sigma^2. \quad (3.20)$$

Rozwiązaniem równania (3.19) są funkcje własne  $W_n(\xi)$  w postaci:

$$W_n(\xi) = A_n \sin \lambda_n \xi + B_n \cos \lambda_n \xi + C_n \sinh \lambda_n \xi + D_n \cosh \lambda_n \xi, \quad (3.21)$$

gdzie stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  wyznaczamy z warunków brzegowych z dokładnością do jednej stałej. Pierwsza i druga pochodna funkcji  $W_n(x)$  mają postać odpowiednio:

$$\frac{dW_n(\xi)}{d\xi} = \lambda_n [A_n \cos \lambda_n \xi - B_n \sin \lambda_n \xi + C_n \cosh \lambda_n \xi + D_n \sinh \lambda_n \xi], \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2W_n(\xi)}{d\xi^2} = \lambda_n^2 [-A_n \sin \lambda_n \xi - B_n \cos \lambda_n \xi + C_n \sinh \lambda_n \xi + D_n \cosh \lambda_n \xi]. \quad (3.23)$$

Funkcje własne są ortogonalne, a to oznacza:

$$\int_0^1 W_n(\xi) W_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \neq k \\ \gamma_n^2, & \text{gdy } n = k \end{cases} \quad (3.24)$$

### 3.2.1. BELKA SWOBODNIE PODPARTA

Rozważmy belkę swobodnie podpartą o skończonej długości  $L$  (rys. 3.3a), charakteryzującą się stałą sztywnością giętną  $EI$  i rozkładem masy  $m$ . W belce swobodnie podpartej w miejscach podparcia na obu końcach pręta występują zerowe ugięcia oraz momenty zginające, w związku z czym warunki brzegowe przy współrzędnych bezwymiarowych (3.10) można przedstawić następująco:

$$1) W_n(0) = 0, \quad 2) W_n''(0) = 0, \quad 3) W_n(1) = 0, \quad 4) W_n''(1) = 0 \quad (3.25)$$

Podstawiając warunki (3.25) do równań (3.21) i (3.23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1) & 0 + B_n + 0 + D_n = 0 \\ 2) & 0 - B_n + 0 + D_n = 0 \\ 3) & A_n \sin \lambda_n + B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$4) \lambda_n^2 [-A_n \sin \lambda_n - B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n] = 0.$$

Z pierwszych dwóch równań wynika że  $B_n = D_n = 0$ , co pozwala nam, po podzieleniu obustronnie czwartego równania przez  $\lambda_n^2$  zredukować układ równań (3.26) do postaci:

$$\begin{cases} A_n \sin \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n = 0 \\ -A_n \sin \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Układ równań (3.27) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} \sin \lambda_n & \sinh \lambda_n \\ -\sin \lambda_n & \sinh \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Aby powyższy układ posiadał nietrywialne rozwiązanie, wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych  $A_n$  i  $C_n$  musi być równy 0, stąd:

$$\det \begin{bmatrix} \sin \lambda_n & \sinh \lambda_n \\ -\sin \lambda_n & \sinh \lambda_n \end{bmatrix} = 2 \sin \lambda_n \sinh \lambda_n = 0. \quad (3.29)$$

Ponieważ przy każdej wartości  $\lambda_n > 0$  funkcja  $\sinh \lambda_n$  przyjmuje wartości różne od zera, konieczne jest spełnienie warunku:

$$\sin \lambda_n = 0, \quad (3.30)$$

Co oznacza, że pierwiastkami równania (3.28) są wartości własne spełniające równość:

$$\lambda_n = n\pi \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.31)$$

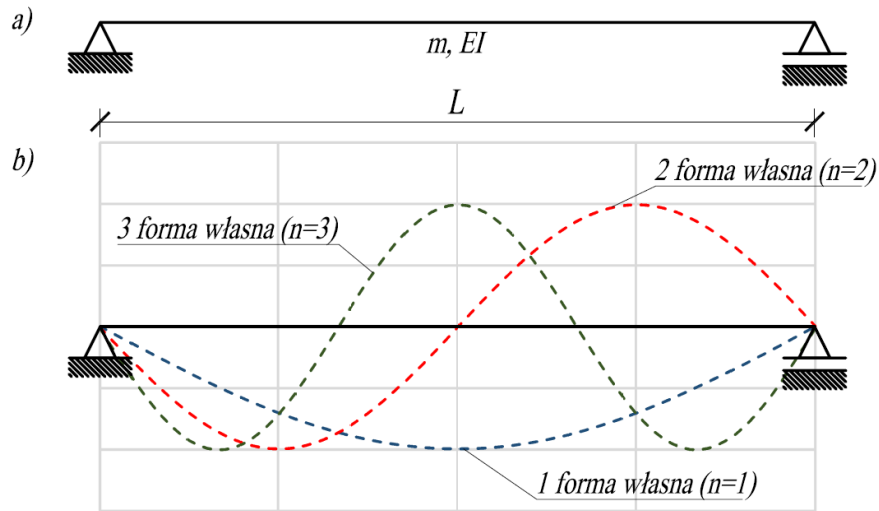
Częstości własne w przypadku belki swobodnie podpartej, zgodnie z zależnością (3.20) opisane są wzorem:

$$\omega_n = \frac{(n\pi)^2}{\sigma} \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.32)$$

Dodając stronami oba równania układu (3.27) otrzymujemy  $C_n = 0$ . Stała  $A_n$  może przyjmować dowolną wartość. W dalszych obliczeniach będziemy przyjmować  $A_n = 1$ , przez co funkcje własne belki swobodnie podpartej można przedstawić następująco:

$$W_n(\xi) = \sin n\pi\xi. \quad (3.33)$$

Na rysunku 3.3b przedstawiono pierwsze 3 formy własne, odpowiadające pierwszym 3 częstościom własnym.



Rys. 3.3. Belka swobodnie podparta: a) schemat, b) pierwsze 3 formy własne

### 3.2.2. BELKA OBUSTRONNIE UTWIERDZONA

Rozważmy belkę obustronnie utwierdzoną, o skończonej długości  $L$  (rys. 3.4a), charakteryzującą się stałą sztywnością giętną  $EI$  i rozkładem masy  $m$ . W przypadku belki obustronnie utwierdzonej w miejscach podparcia na obu końcach pręta występują zerowe ugięcia oraz kąty obrotu, w związku z czym warunki brzegowe można przedstawić następująco:

$$1) W_n(0) = 0, \quad 2) W'_n(0) = 0, \quad 3) W_n(L) = 0, \quad 4) W'_n(L) = 0 \quad (3.34)$$

Podstawiając warunki (3.34) do równań (3.21) i (3.22) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1) B_n + D_n &= 0 \\ 2) A_n + C_n &= 0 \\ 3) A_n \sin \lambda_n + B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n &= 0 \\ 4) A_n \cos \lambda_n - B_n \sin \lambda_n + C_n \cosh \lambda_n + D_n \sinh \lambda_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Uwzględniając zależności  $B_n = -D_n$  oraz  $A_n = -C_n$ , wynikające z dwóch pierwszych równań możemy zredukować układ (3.35) do postaci:

$$\begin{cases} C_n[\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n] + D_n[\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n] = 0 \\ C_n[\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n] + D_n[\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n] = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Układ równań (3.36) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} \sinh \lambda_n - \sin \lambda_n & \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n \\ \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n & \sinh \lambda_n + \sin \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Aby powyższy układ posiadał nietrywialne rozwiązanie, wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych  $C_n$  i  $D_n$  musi być równy 0, stąd:

$$\det \begin{bmatrix} \sinh \lambda_n - \sin \lambda_n & \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n \\ \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n & \sinh \lambda_n + \sin \lambda_n \end{bmatrix} = \quad (3.38)$$

$$= 2 \cosh \lambda_n \cos \lambda_n - (\sin^2 \lambda_n + \cos^2 \lambda_n) - (\cosh^2 \lambda_n - \sinh^2 \lambda_n) = 0.$$

Wzór (3.38) można przekształcić, wykorzystując znane zależności  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  oraz  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ , sprowadzając go do postaci:

$$\cos(\lambda_n) \cosh(\lambda_n) = 1 \quad (3.39)$$

Pierwiastkami równania (3.38) są wartości własne spełniające równość:

$$\lambda_n \approx (n + 0,5)\pi \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.40)$$

Częstości własne belki obustronnie utwierdzonej, zgodnie z zależnością (3.20) opisane są wzorem:

$$\omega_n = \frac{[(n + 0,5)\pi]^2}{\sigma} \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.41)$$

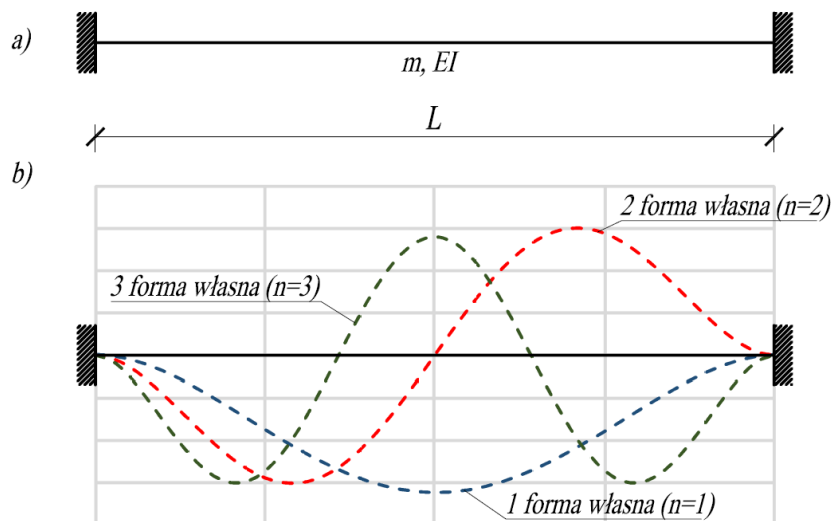
Po podstawieniu do wzoru (3.21) zależności  $B_n = -D_n$ ,  $A_n = -C_n$  oraz

$$C_n = -D_n \frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}, \quad (3.42)$$

wynikających z równań (3.35), a także przyjmując stałą  $D_n = 1$  otrzymujemy zbiór funkcji własnych belki obustronnie utwierdzonej, które opisane są wzorem:

$$W_n(\xi) = \frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n} (\sin \lambda_n \xi - \sinh \lambda_n \xi) - \cos \lambda_n \xi + \cosh \lambda_n \xi. \quad (3.43)$$

Na rysunku 3.4b przedstawiono pierwsze 3 formy własne, odpowiadające pierwszym 3 częstościom własnym.



Rys. 3.4. Belka obustronnie utwierdzona: a) schemat, b) pierwsze 3 formy własne



### 3.2.3. BELKA JEDNOSTRONNIE UTWIERDZONA I SWOBODNIE PODPARTA

Rozważmy belkę lewostronnie swobodnie podpartą i prawostronnie utwierdzoną o skończonej długości  $L$  (rys. 3.5a), charakteryzującą się stałą sztywnością giętną  $EI$  i rozkładem masy  $m$ . W przypadku tego typu ustroju w miejscu swobodnego podparcia na lewym końcu pręta występują zerowe ugięcia oraz momenty zginające, natomiast w miejscu utwierdzenia na prawym końcu występują zerowe ugięcia oraz kąty obrotu, w związku z czym warunki brzegowe można przedstawić następująco:

$$1) W_n(0) = 0, \quad 2) W''_n(0) = 0, \quad 3) W_n(1) = 0, \quad 4) W'_n(1) = 0 \quad (3.44)$$

Podstawiając warunki (3.44) do równań (3.21), (3.22) i (3.23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1) 0 + B_n + 0 + D_n &= 0 \\ 2) 0 - B_n + 0 + D_n &= 0 \\ 3) A_n \sin \lambda_n + B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n &= 0 \\ 4) A_n \cos \lambda_n - B_n \sin \lambda_n + C_n \cosh \lambda_n + D_n \sinh \lambda_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Z pierwszych dwóch równań wynika, że  $B_n = D_n = 0$ , co pozwala nam zredukować układ równań (3.45) do postaci:

$$\begin{cases} A_n \sin \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n = 0 \\ A_n \cos \lambda_n + C_n \cosh \lambda_n = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Układ równań (3.46) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} \sin \lambda_n & \sinh \lambda_n \\ \cos \lambda_n & \cosh \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Aby powyższy układ posiadał nietrywialne rozwiązanie, wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych  $A_n$  i  $C_n$  musi być równy 0, stąd:

$$\det \begin{bmatrix} \sin \lambda_n & \sinh \lambda_n \\ \cos \lambda_n & \cosh \lambda_n \end{bmatrix} = \sin \lambda_n \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n \sinh \lambda_n = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\sin \lambda_n}{\cos \lambda_n} = \frac{\sinh \lambda_n}{\cosh \lambda_n} \quad (3.49)$$

$$\tan \lambda_n = \tanh \lambda_n. \quad (3.50)$$

Pierwiastkami równania (3.50) są wartości własne spełniające równość:

$$\lambda_n \approx (n + 0,25)\pi; \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.51)$$

Częstości własne belki jednostronnie utwierdzonej i swobodnie podpartej, zgodnie z zależnością (3.20) opisane są wzorem:

$$\omega_n = \frac{[(n + 0,25)\pi]^2}{\sigma}; \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.52)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.21) zależności:

$$C_n = -A_n \frac{\sin \lambda_n}{\sinh \lambda_n}, \quad (3.53)$$

wynikającej z równań (3.45) oraz przyjęciu stałej  $A_n = 1/\sin \lambda_n$  otrzymujemy zbiór funkcji własnych belki lewostronnie swobodnie podpartej i prawostronnie utwierdzonej, które opisane są wzorem:

$$W_n(\xi) = \frac{\sin \lambda_n \xi}{\sin \lambda_n} - \frac{\sinh \lambda_n \xi}{\sinh \lambda_n}. \quad (3.54)$$

Postępując w analogiczny sposób wyznaczmy funkcje własne belki lewostronnie utwierdzonej i prawostronnie swobodnie popartej (rys.3.6a). W przypadku takiej belki na lewym końcu występują zerowe ugięcia oraz kąty obrotu, natomiast na końcu prawym zerowe ugięcia i momenty zginające. Warunki brzegowe zapisujemy następująco:

$$1) W_n(0) = 0, \quad 2) W'_n(0) = 0, \quad 3) W_n(1) = 0, \quad 4) W''_n(1) = 0 \quad (3.55)$$

Podstawiając warunki (3.55) do równań (3.21), (3.22) i (3.23) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1) & 0 + B_n + 0 + D_n = 0 \\ 2) & A_n + 0 + C_n + 0 = 0 \\ 3) & A_n \sin \lambda_n + B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n = 0 \\ 4) & -A_n \sin \lambda_n - B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Uwzględniając zależności  $B_n = -D_n$  oraz  $A_n = -C_n$ , wynikające z dwóch pierwszych równań możemy zredukować układ (3.56) do postaci:

$$\begin{cases} C_n[\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n] + D_n[\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n] = 0 \\ C_n[\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n] + D_n[\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n] = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Układ równań (3.57) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} \sinh \lambda_n - \sin \lambda_n & \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n \\ \sinh \lambda_n + \sin \lambda_n & \cosh \lambda_n + \cos \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Aby powyższy układ posiadał nietrywialne rozwiązanie, wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych  $C_n$  i  $D_n$  musi być równy 0, stąd:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \sinh \lambda_n - \sin \lambda_n & \cosh \lambda_n - \cos \lambda_n \\ \sinh \lambda_n + \sin \lambda_n & \cosh \lambda_n + \cos \lambda_n \end{bmatrix} &= \\ &= 2 \sinh \lambda_n \cos \lambda_n - 2 \sin \lambda_n \cosh \lambda_n = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

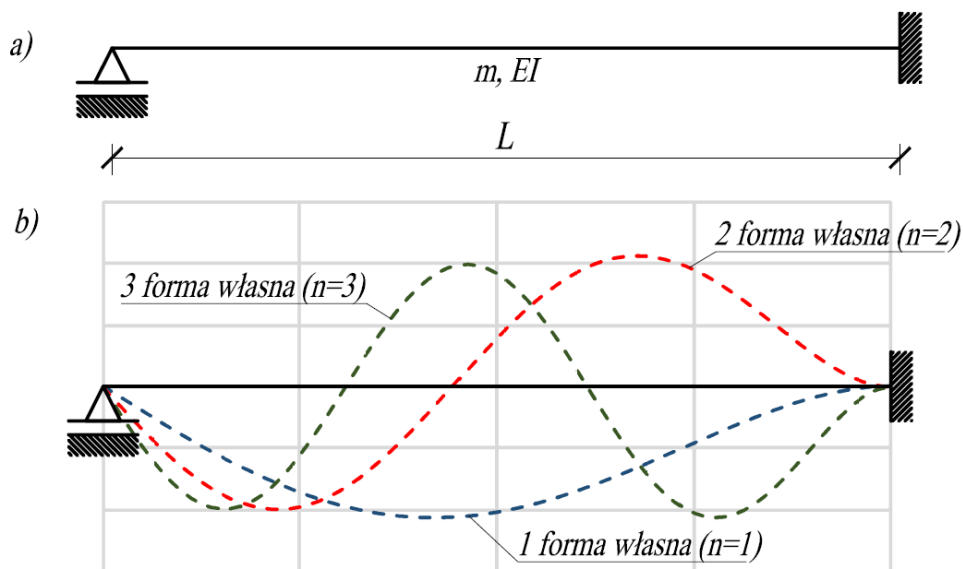
Równanie (3.59) możemy doprowadzić do postaci (3.50), co oznacza że wartości oraz częstotści własne podane we wzorach (3.51) i (3.52) są prawdziwe również dla belki lewostronnie utwierdzonej i prawostronnie swobodnie podpartej. Po podstawieniu do wzoru (3.21) zależności

$$C_n = -D_n \frac{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n}, \quad (3.60)$$

wynikającej z równań (3.56) oraz przyjęciu stałej  $D_n = 1$  otrzymujemy zbiór funkcji własnych belki lewostronnie utwierdzonej i prawostronnie swobodnie podpartej, które opisane są wzorem:

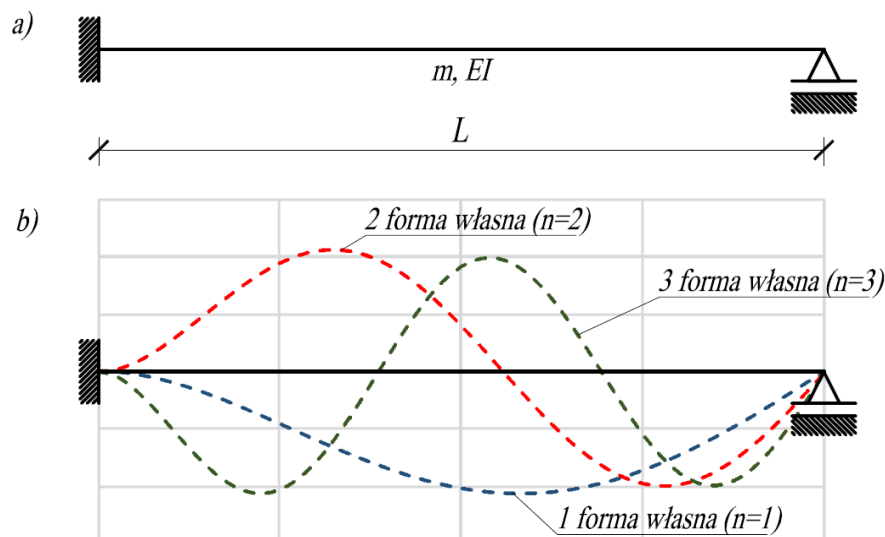
$$W_n(\xi) = \frac{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n + \sin \lambda_n} (\sin \lambda_n \xi - \sinh \lambda_n \xi) - \cos \lambda_n \xi + \cosh \lambda_n \xi. \quad (3.61)$$

Na rysunkach 3.5b i 3.6b przedstawiono pierwsze 3 formy własne, odpowiadające pierwszym 3 częstościom własnym.



Rys. 3.5. Belka lewostronnie swobodnie podparta i prawostronnie utwierdzona:

a) schemat, b) pierwsze 3 formy własne



Rys. 3.6. Belka lewostronnie utwierdzona i prawostronnie swobodnie podparta:  
a) schemat, b) pierwsze 3 formy własne

### 3.3. DRGANIA WYMUSZONE

#### 3.3.1. DRGANIA WYMUSZONE RUCHOMĄ SIŁĄ SKUPIONĄ

Rozpatrzmy drgania jednoprzęsłowej belki Eulera-Bernoulliego, charakteryzującej się stałą sztywnością giętą  $EI$  i stałym rozkładem masy  $m$ , poddanej działaniu siły  $P$  poruszającej się ze stałą prędkością  $v$  (rys. 3.7). Belka na swoich końcach może być swobodnie podparta lub sztywno utwierdzona. Dla tak zdefiniowanego układu równanie ruchu ma postać:

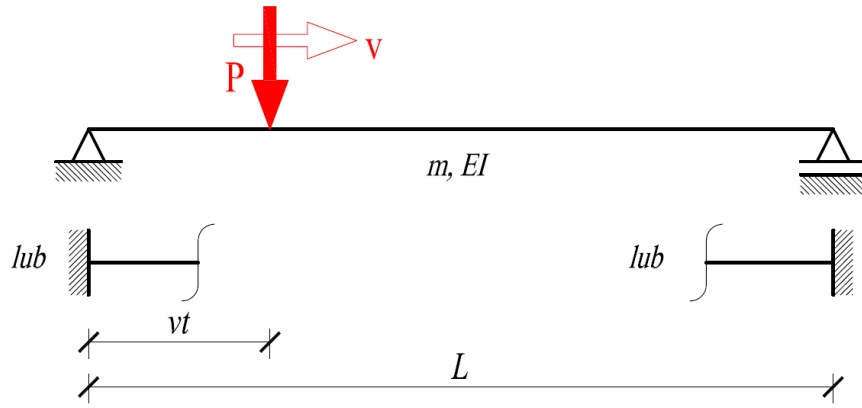
$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = P \delta(x - vt), \quad (3.62)$$

gdzie symbol  $\delta(\cdot)$  oznacza deltę Diraca. Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe (3.10) doprowadzamy równanie (3.62) do postaci:

$$w^{IV}(\xi, T) + c_0 \dot{w}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = P_0 \delta(\xi - T). \quad (3.63)$$

Wyrażenia  $c_0$  i  $\sigma^2$  opisano wzorami (3.12) i (3.13) natomiast wyrażenie  $P_0$  określamy jako:

$$P_0 = \frac{PL^3}{EI}. \quad (3.64)$$



Rys. 3.7. Belka jednoprzęsłowa obciążona siłą ruchomą

Rozwiązania równania (3.63) poszukiwać będziemy w postaci szeregu:

$$w(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(T) W_n(\xi), \quad (3.65)$$

gdzie  $W_n(\xi)$  oznacza funkcje własne układu, wyrażone w postaci:

$$W_n(\xi) = G_{1n} \sin \lambda_n \xi + G_{2n} \cos \lambda_n \xi + G_{3n} \sinh \lambda_n \xi + G_{4n} \cosh \lambda_n \xi. \quad (3.66)$$

Stałe  $G_{1n}$ ,  $G_{2n}$ ,  $G_{3n}$  i  $G_{4n}$  podobnie jak wartości własne  $\lambda_n$  zależą od warunków brzegowych belki i zostały zestawione w tabeli (3.1).

Po podstawieniu wyrażenia (3.65) do równania (3.63) oraz wykorzystaniu ortogonalności funkcji własnych (3.24) otrzymujemy układ separowanych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\ddot{Y}_n(T) + 2\alpha \dot{Y}_n(T) + \omega_n^2 Y_n(T) = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} W_n(T), \quad (3.67)$$

gdzie:

$$2\alpha = \frac{cL}{mv}, \quad (3.68)$$

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^4}{\sigma^2}. \quad (3.69)$$

Funkcje  $Y_n(T)$  przedstawimy w postaci:

$$Y_n(T) = A_n \sin \lambda_n T + B_n \cos \lambda_n T + C_n \sinh \lambda_n T + D_n \cosh \lambda_n T + e^{-\alpha T} (E_n \sin \Omega_n T + F_n \cos \Omega_n T), \quad (3.70)$$

gdzie:

$$\Omega_n^2 = \omega_n^2 - \alpha^2. \quad (3.71)$$

Stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  otrzymujemy z równań:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -\lambda_n^2 A_n - 2\alpha\lambda_n B_n + \omega_n^2 A_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{1n}, \\ 2) \quad & -\lambda_n^2 B_n + 2\alpha\lambda_n A_n + \omega_n^2 B_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{2n}, \\ 3) \quad & \lambda_n^2 C_n + 2\alpha\lambda_n D_n + \omega_n^2 C_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{3n}, \\ 4) \quad & \lambda_n^2 D_n + 2\alpha\lambda_n C_n + \omega_n^2 D_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{4n}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

z których wynika:

$$\begin{aligned} A_n &= P_0 \frac{G_{1n}(\omega_n^2 - \lambda_n^2) + 2G_{2n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 [(\omega_n^2 - \lambda_n^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda_n^2]}, \\ B_n &= P_0 \frac{G_{2n}(\omega_n^2 - \lambda_n^2) - 2G_{1n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 [(\omega_n^2 - \lambda_n^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda_n^2]}, \\ C_n &= P_0 \frac{G_{3n}(\omega_n^2 + \lambda_n^2) - 2G_{4n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 [(\omega_n^2 + \lambda_n^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda_n^2]}, \\ D_n &= P_0 \frac{G_{4n}(\omega_n^2 + \lambda_n^2) - 2G_{3n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 [(\omega_n^2 + \lambda_n^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda_n^2]}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Stałe  $E_n$  i  $F_n$  wynikają z warunków początkowych:

$$Y_n(0) = 0; \quad \dot{Y}_n(0) = 0 \quad (3.74)$$

i są określone jako:

$$E_n = \frac{\alpha F_n - \lambda_n(A_n + C_n)}{\Omega_n}; \quad F_n = -B_n - D_n. \quad (3.75)$$

Eliminując z równania (3.63) składnik związany z siłami tłumienia otrzymujemy równanie ruchu opisujące drgania nietłumione:

$$w^{IV}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = P_0 \delta(\xi - T), \quad (3.76)$$

które rozwiązujemy w sposób analogiczny. Funkcje  $Y_n(T)$  w przypadku braku tłumienia mają postać:

$$\begin{aligned} Y_n(T) &= A_n \sin \lambda_n T + B_n \cos \lambda_n T + C_n \sinh \lambda_n T + D_n \cosh \lambda_n T + \\ &+ E_n \sin \omega_n T + F_n \cos \omega_n T. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  wynikają z równań:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & -\lambda_n^2 A_n + \omega_n^2 A_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{1n} \rightarrow A_n = \frac{P_0 G_{1n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 (\omega_n^2 - \lambda_n^2)}; \\
 2) \quad & -\lambda_n^2 B_n + \omega_n^2 B_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{2n} \rightarrow B_n = \frac{P_0 G_{2n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 (\omega_n^2 - \lambda_n^2)}; \\
 3) \quad & \lambda_n^2 C_n + \omega_n^2 C_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{3n} \rightarrow C_n = \frac{P_0 G_{3n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 (\omega_n^2 + \lambda_n^2)}; \\
 4) \quad & \lambda_n^2 D_n + \omega_n^2 D_n = \frac{P_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} G_{4n} \rightarrow D_n = \frac{P_0 G_{4n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 (\omega_n^2 + \lambda_n^2)},
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

natomiast stałe  $E_n$  i  $F_n$  otrzymujemy z zerowych warunków początkowych:

$$E_n = -\frac{\lambda_n}{\omega_n} (A_n + C_n); \quad F_n = -B_n - D_n. \tag{3.79}$$

Tabela 3.1

Stałe  $G_{1n}$ ,  $G_{2n}$ ,  $G_{3n}$ ,  $G_{4n}$ ,  $\gamma_n^2$  i wartości własne  $\lambda_n$  przy różnych typach belek

Wartość:	Typ belki:			
	Przegubowo- przegubowa	Przegubowo- sztywna	Sztywno- przegubowa	Sztywno-sztywna
$\lambda_n$	$n\pi$	3,927 gdy $n = 1$	3,927 gdy $n = 1$	4,730 gdy $n = 1$
		7,069 gdy $n = 2$	7,069 gdy $n = 2$	7,853 gdy $n = 2$
		$(n + 0,25)\pi$ gdy $n > 2$	$(n + 0,25)\pi$ gdy $n > 2$	$(n + 0,5)\pi$ gdy $n > 2$
$\gamma_n^2$	0,5	0,9991 gdy $n = 1$	0,9997 gdy $n = 1$	1,00001 gdy $n = 1$
		1 gdy $n > 1$	1 gdy $n > 1$	1 gdy $n > 1$
$G_{1n}$	1	$\frac{1}{\sin\lambda_n}$	$\frac{\cos\lambda_n + \cosh\lambda_n}{\sin\lambda_n + \sinh\lambda_n}$	$\frac{\cosh\lambda_n - \cos\lambda_n}{\sinh\lambda_n - \sin\lambda_n}$
$G_{2n}$	0	0	-1	-1
$G_{3n}$	0	$-\frac{1}{\sinh\lambda_n}$	$-\frac{\cos\lambda_n + \cosh\lambda_n}{\sin\lambda_n + \sinh\lambda_n}$	$-\frac{\cosh\lambda_n - \cos\lambda_n}{\sinh\lambda_n - \sin\lambda_n}$
$G_{4n}$	0	0	1	1

Zauważmy, że jeśli spełniona będzie równość  $\sigma = \lambda_n$  to przy braku tłumienia wyrazy  $Y_n(T)$  w szeregu (3.65) zmierzają będą do nieskończoności. Stąd prędkości rezonansowe  $v_{cr,n}$  można opisać wzorem:

$$v_{cr,n} = \frac{\lambda_n}{L} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{3.80}$$

Prędkość z jaką porusza się siła  $P$  można wyrazić parametrem  $\eta$  określającym stosunek prędkości  $v$  do pierwszej prędkości rezonansowej  $v_{cr,1}$ :

$$\eta = \frac{v}{v_{cr,1}} = \frac{vL}{\lambda_1} \sqrt{\frac{m}{EI}}. \quad (3.81)$$

Drgania belki opisane wzorem (3.65) można przedstawić w postaci sumy:

$$w(\xi, T) = w_A(\xi, T) + w_S(\xi, T), \quad (3.82)$$

gdzie funkcja  $w_A(\xi, T)$  opisuje drgania aperiodyczne i jest całką szczególną niejednorodnego równania (3.63) lub (3.76) spełniającą zadane warunki brzegowe, nie spełniającą jednak zerowych warunków początkowych. Funkcja  $w_S(\xi, T)$  opisująca drgania swobodne jest całką ogólną równania jednorodnego (3.63) lub (3.76) gdy  $P_0 = 0$  i wraz z funkcją  $w_A(\xi, T)$  spełnia zarówno zadane warunki brzegowe jak i zerowe warunki początkowe ruchu. Funkcję  $w_A(\xi, T)$  można przedstawić jako:

$$w_A(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n T + B_n \cos \lambda_n T + C_n \sinh \lambda_n T + D_n \cosh \lambda_n T) W_n(\xi), \quad (3.83)$$

natomiast funkcję  $w_S(\xi, T)$  przy drganiach tłumionych i nietłumionych odpowiednio:

$$w_S(\xi, T) = e^{-\alpha T} \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \sin \Omega_n T + F_n \cos \Omega_n T) W_n(\xi), \quad (3.84)$$

$$w_S(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \sin \omega_n T + F_n \cos \omega_n T) W_n(\xi). \quad (3.85)$$

Drgania swobodne belki w czasie  $T \geq 1$ , gdy siła znajduje się poza belką, można zapisać w postaci sumy:

$$w(\xi, T) = w_S(\xi, T) + w_{S1}(\xi, T - 1); \quad T \geq 1, \quad (3.86)$$

gdzie wyrażenie  $w_S(\xi, T)$  określają wzory (3.84) i (3.85), natomiast  $w_{S1}(\xi, T - 1)$  w przypadku drgań tłumionych i nietłumionych określimy jako:

$$w_{S1}(\xi, T - 1) = e^{-\alpha(T-1)} \sum_{n=1}^{\infty} [I_n \sin \Omega_n (T - 1) + J_n \cos \Omega_n (T - 1)] W_n(\xi), \quad (3.87)$$

$$w_{S1}(\xi, T - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} [I_n \sin \omega_n (T - 1) + J_n \cos \omega_n (T - 1)] W_n(\xi). \quad (3.88)$$



Stałe  $I_n$  i  $J_n$  otrzymujemy z warunków początkowych:

$$w_{S1}(\xi, 0) = w_A(\xi, 1); \quad \dot{w}_{S1}(\xi, 0) = \dot{w}_A(\xi, 1), \quad (3.89)$$

co daje nam:

$$I_n = \frac{\lambda_n(A_n \cos \lambda_n - B_n \sin \lambda_n + C_n \cosh \lambda_n + D_n \sinh \lambda_n) - \alpha J_n}{\Omega_n} \quad (3.90)$$

$$J_n = A_n \sin \lambda_n + B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n. \quad (3.91)$$

W przypadku drgań nietłumionych stałą  $I_n$  określimy jako:

$$I_n = \frac{\lambda_n(A_n \cos \lambda_n - B_n \sin \lambda_n + C_n \cosh \lambda_n + D_n \sinh \lambda_n)}{\omega_n}. \quad (3.92)$$

Rozpatrzmy przypadek belki jednoprzęsłowej obciążonej siłą  $P$  w sposób statyczny, gdzie współrzędną  $T$  oznaczmy miejsce przyłożenia siły. Równanie ruchu (3.63) przyjmuje wtedy postać:

$$w_{stat}^{IV}(\xi, T) = P_0 \delta(\xi - T). \quad (3.93)$$

Rozwiązując równanie (3.93) otrzymujemy ugięcie statyczne belki jednoprzęsłowej w punkcie  $\xi$  wywołane siłą  $P$  przyłożoną w punkcie o współrzędnej  $T$ , wyrażone wzorem:

$$w_{stat}(\xi, T) = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(T)W_n(\xi)}{\lambda_n^4 \gamma_n^2}. \quad (3.94)$$

Ugięcie statyczne gdy  $\xi = 0,5$  i  $T = 0,5$  w zależności od schematu belki wynosi odpowiednio:

$$w_{stat}(0,5,0,5) = \frac{P_0}{48} - \text{belka swobodnie podparta} \quad (3.95)$$

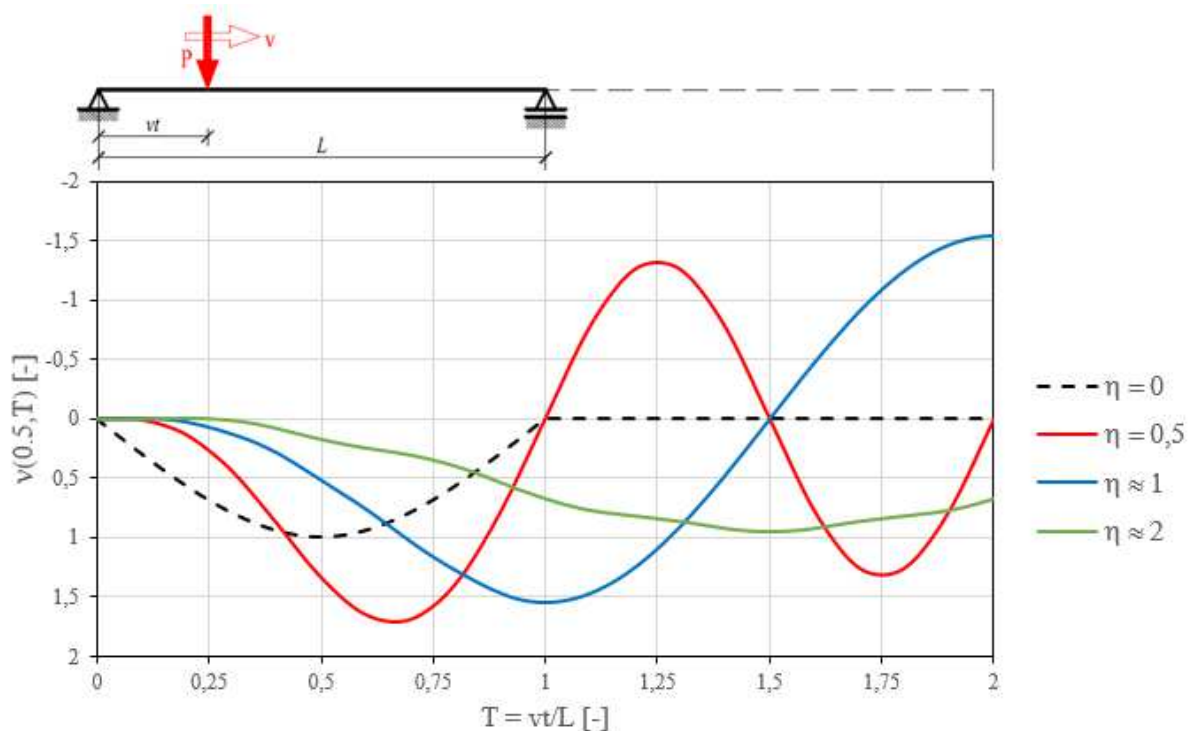
$$w_{stat}(0,5,0,5) = \frac{7P_0}{768} - \text{belka jednostronnie utwierdzona} \quad (3.96)$$

$$w_{stat}(0,5,0,5) = \frac{P_0}{192} - \text{belka obustronnie utwierdzona} \quad (3.97)$$

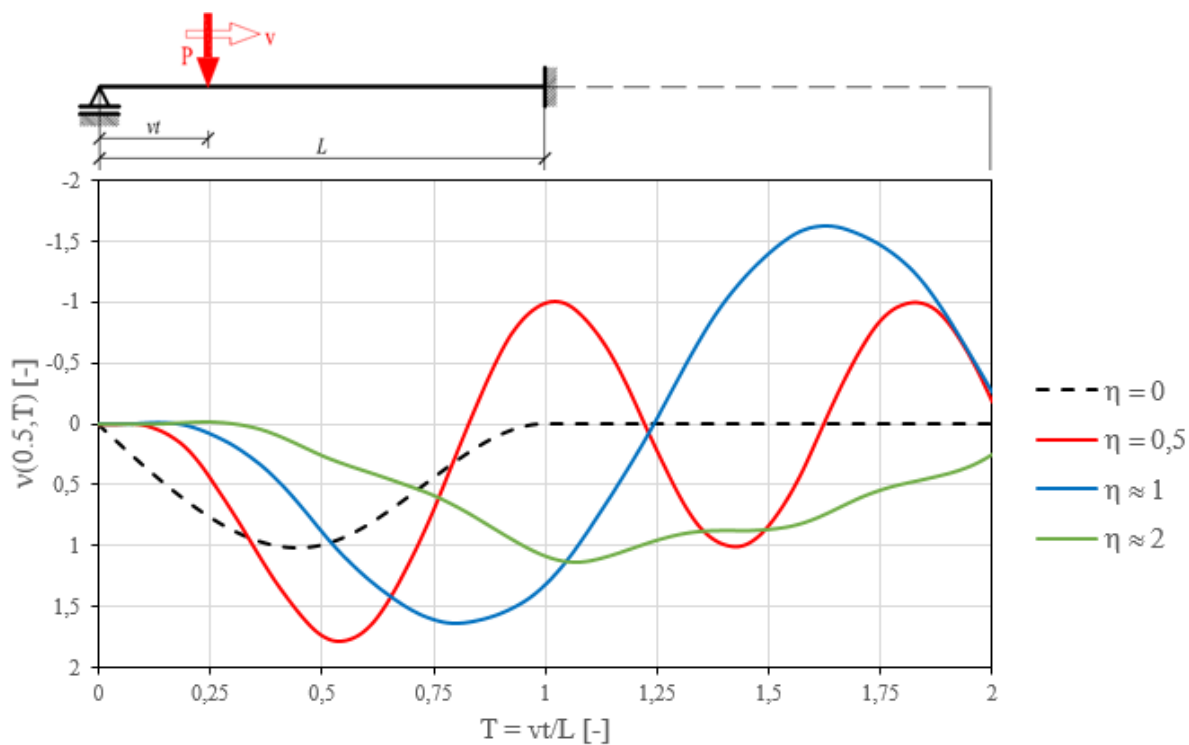
Stosunek ugięcia dynamicznego  $w(\xi, T)$  do odpowiadającego mu ugięcia statycznego  $w_{stat}(\xi, T)$  będziemy określać jako współczynnik dynamiczny  $v(\xi, T)$ .

$$v(\xi, T) = \frac{w(\xi, T)}{w_{stat}(\xi, T)}. \quad (3.98)$$

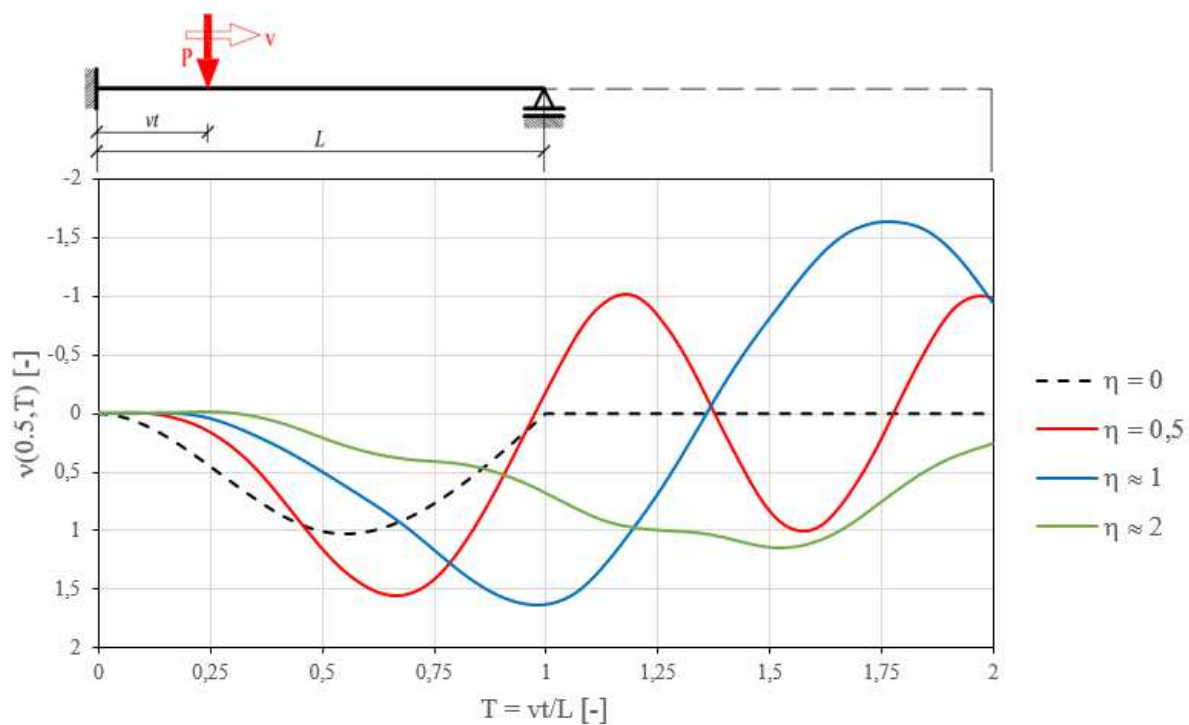
Wykresy na rysunkach (3.7-3.10) przedstawiają zmienność współczynnika dynamicznego przy drganiach nietłumionych środka rozpiętości belki  $\xi = 0,5$  w zależności od prędkości siły  $P$  wyrażonej parametrem  $\eta$ . Na każdym z rysunków linią przerywaną oznaczono linię wpływu ugięcia statycznego odpowiadającą przypadkowi  $\eta = 0$ .



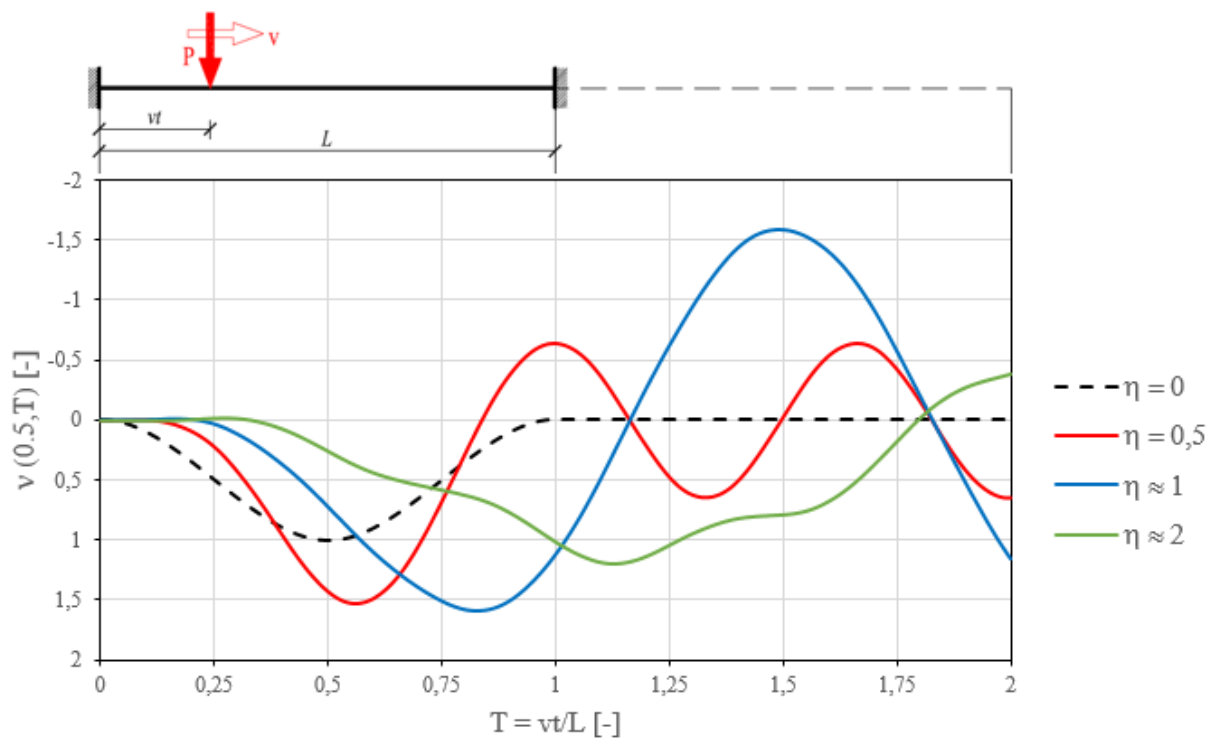
Rys. 3.7. Ugięcie dynamiczne belki swobodnie popartej mierzone w środku rozpiętości



Rys. 3.8. Ugięcie dynamiczne belki lewostronnie swobodnie podpartej i prawostronnie utwierdzonej mierzone w środku rozpiętości



Rys. 3.9. Ugięcie dynamiczne belki lewostronnie utwierdzonej i prawostronnie swobodnie podpartej mierzone w środku rozpiętości



Rys. 3.10. Ugięcie dynamiczne belki obustronnie utwierdzonej mierzone w środku rozpiętości

### 3.3.2. DRGANIA WYMUSZONE RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM ROZŁOŻONYM

Jako kolejny przypadek rozpatrzmy pryzmatyczną belkę Eulera-Bernoulliego poddaną działaniu ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego o stałym natężeniu  $q$ , poruszającego się ze stałą prędkością  $v$  (rys. 3.11). Równanie ruchu zapiszemy następująco:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = qH(vt - x), \quad (3.99)$$

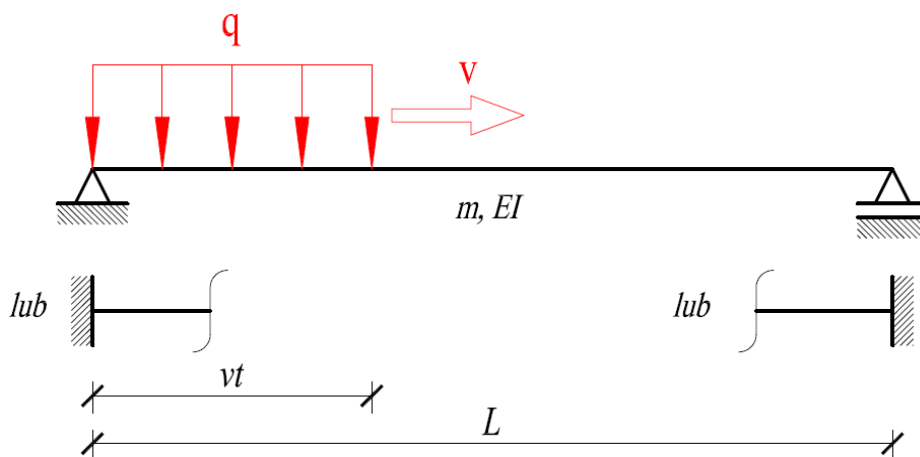
a po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych (3.10):

$$w^{IV}(\xi, T) + c_0 \dot{w}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = q_0 H(T - \xi), \quad (3.100)$$

gdzie wyrażenia  $c_0$  i  $\sigma^2$  opisano wzorami (3.12) i (3.13), natomiast wyrażenie  $q_0$  jest równe:

$$q_0 = \frac{qL^4}{EI}. \quad (3.101)$$

Symbolem  $H(\cdot)$  Oznaczono funkcję skokową Heaviside'a.



Rys. 3.11. Belka jednoprzęsłowa obciążona ruchomym obciążeniem równomiernie rozłożonym

Rozwiązania równania (3.100) poszukujemy w sposób analogiczny jak w przypadku ruchomej siły skupionej wykorzystując wzory (3.65) i (3.66) oraz dane z tabeli 3.1. Po podstawieniu wyrażenia (3.65) do równania (3.100) oraz wykorzystaniu ortogonalności funkcji własnych (3.24) otrzymujemy układ separowanych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\ddot{Y}_n(T) + 2\alpha \dot{Y}_n(T) + \omega_n^2 Y_n(T) = \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2} \int_0^T W_n(\xi) d\xi. \quad (3.102)$$

Całka występująca z prawej strony powyższego równania jest równa:

$$\int_0^T W_n(\xi) d\xi = \frac{G_{1n} - G_{3n} + G_{2n} \sin \lambda_n T - G_{1n} \cos \lambda_n T + G_{4n} \sinh \lambda_n T + G_{3n} \cosh \lambda_n T}{\lambda_n} \quad (3.103)$$

Funkcje  $Y_n(T)$  przedstawimy w postaci:

$$Y_n(T) = H_n + A_n \sin \lambda_n T + B_n \cos \lambda_n T + C_n \sinh \lambda_n T + D_n \cosh \lambda_n T + e^{-\alpha T} (E_n \sin \Omega_n T + F_n \cos \Omega_n T). \quad (3.104)$$

Stała  $H_n$  jest równa:

$$H_n = \frac{q_0 (G_{1n} - G_{3n})}{\gamma_n^2 \lambda_n^5}. \quad (3.105)$$

Stałe  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  otrzymujemy z równań:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -\lambda_n^2 A_n - 2\alpha \lambda_n B_n + \omega_n^2 A_n = \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{2n}, \\ 2) \quad & -\lambda_n^2 B_n + 2\alpha \lambda_n A_n + \omega_n^2 B_n = -\frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{1n}, \\ 3) \quad & \lambda_n^2 C_n + 2\alpha \lambda_n D_n + \omega_n^2 C_n = \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{4n}, \\ 4) \quad & \lambda_n^2 D_n + 2\alpha \lambda_n C_n + \omega_n^2 D_n = \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{3n}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

z których wynika:

$$\begin{aligned} A_n &= q_0 \frac{G_{2n}(\omega_n^2 - \lambda_n^2) - 2G_{1n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n [(\omega_n^2 - \lambda_n^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda_n^2]}, \\ B_n &= -q_0 \frac{G_{1n}(\omega_n^2 - \lambda_n^2) + 2G_{2n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n [(\omega_n^2 - \lambda_n^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda_n^2]}, \\ C_n &= q_0 \frac{G_{4n}(\omega_n^2 + \lambda_n^2) - 2G_{3n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n [(\omega_n^2 + \lambda_n^2)^2 - 4\alpha^2 \lambda_n^2]}, \\ D_n &= q_0 \frac{G_{3n}(\omega_n^2 + \lambda_n^2) - 2G_{4n}\alpha\lambda_n}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n [(\omega_n^2 + \lambda_n^2)^2 - 4\alpha^2 \lambda_n^2]}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Stałe  $E_n$  i  $F_n$  wynikają z warunków początkowych:

$$Y_n(0) = 0; \quad \dot{Y}_n(0) = 0 \quad (3.108)$$

i są określone jako:

$$E_n = \frac{\alpha F_n - \lambda_n(A_n + C_n)}{\Omega_n}; \quad F_n = -H_n - B_n - D_n. \quad (3.109)$$

Eliminując z równania (3.100) składnik związany z siłami tłumienia otrzymujemy równanie ruchu opisujące drgania nietłumione:

$$w^{IV}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = q_0 H(T - \xi), \quad (3.110)$$

które rozwiązujemy w sposób analogiczny. Funkcje  $Y_n(T)$  w przypadku braku tłumienia mają postać:

$$Y_n(T) = H_n + A_n \sin \lambda_n T + B_n \cos \lambda_n T + C_n \sinh \lambda_n T + D_n \cosh \lambda_n T + \\ + E_n \sin \omega_n T + F_n \cos \omega_n T. \quad (3.111)$$

Stałe  $A_n, B_n, C_n$  i  $D_n$  wynikają z równań:

$$\begin{aligned} 1) \quad -\lambda_n^2 A_n + \omega_n^2 A_n &= \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{2n} \rightarrow A_n = \frac{q_0 G_{2n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n (\omega_n^2 - \lambda_n^2)}; \\ 2) \quad -\lambda_n^2 B_n + \omega_n^2 B_n &= \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{1n} \rightarrow B_n = -\frac{q_0 G_{1n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n (\omega_n^2 - \lambda_n^2)}; \\ 3) \quad \lambda_n^2 C_n + \omega_n^2 C_n &= \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{4n} \rightarrow C_n = \frac{q_0 G_{4n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n (\omega_n^2 + \lambda_n^2)}; \\ 4) \quad \lambda_n^2 D_n + \omega_n^2 D_n &= \frac{q_0}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n} G_{3n} \rightarrow D_n = \frac{q_0 G_{3n}}{\gamma_n^2 \sigma^2 \lambda_n (\omega_n^2 + \lambda_n^2)} \end{aligned} \quad (3.112)$$

natomiast stałe  $E_n$  i  $F_n$  otrzymujemy z zerowych warunków początkowych:

$$E_n = -\frac{\lambda_n}{\omega_n} (A_n + C_n); \quad F_n = -H_n - B_n - D_n. \quad (3.113)$$

Stałą  $H_n$  wyrażamy wzorem (3.105).

Rozpatrzmy przypadek belki jednoprzęsłowej poddanej działaniu statycznego obciążenia równomiernie rozłożonego  $q$ . Równanie równowagi ma postać (3.114), gdzie współrzędna  $T$  opisuje położenie „czoła” obciążenia względem rozpiętości belki.

$$w_{\text{stat}}^{IV}(\xi, T) = q_0 H(T - \xi). \quad (3.114)$$

Rozwiązując równanie (3.114) otrzymujemy ugięcie statyczne belki jednoprzęsłowej w punkcie  $\xi$  wywołane obciążeniem równomiernym  $q$  rozłożonym na długości  $T$ , wyrażone wzorem:

$$w_{\text{stat}}(\xi, T) = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4 \gamma_n^2} \left[ \int_0^T W_n(\xi) d\xi \right] W_n(\xi). \quad (3.115)$$

Ugięcie statyczne gdy  $\xi = 0,5$  i  $T = 1$  w zależności od schematu belki wynosi odpowiednio:

$$w_{\text{stat}}(0,5,1) = \frac{5q_0}{384} - \text{belka swobodnie podparta} \quad (3.116)$$

$$w_{\text{stat}}(0,5,1) = \frac{q_0}{192} - \text{belka jednostronnie utwierdzona} \quad (3.117)$$

$$w_{\text{stat}}(0,5,1) = \frac{q_0}{384} - \text{belka obustronnie utwierdzona} \quad (3.118)$$

Drgania aperiodyczne  $w_A(\xi, T)$  belki opisuje wzór:

$$w_A(\xi, T) = \sum_{n=1}^{\infty} (H_n + A_n \sin \lambda_n T + B_n \cos \lambda_n T + C_n \sinh \lambda_n T + D_n \cosh \lambda_n T) W_n(\xi), \quad (3.119)$$

natomiast drgania swobodne  $w_S(\xi, T)$  można przedstawić tak samo jak w przypadku ruchomej siły skupionej (wzory (3.84) i (3.85)).

Gdy  $T \geq 1$ , a więc gdy „czoło” obciążenia rozłożonego znajduje się poza belką, drgania swobodne opisane są równaniem:

$$w(\xi, T) = w_{\text{stat}}(\xi, 1) + w_S(\xi, T) + w_{S1}(\xi, T - 1); \quad T \geq 1, \quad (3.120)$$

Gdzie wyrażenie  $w_S(\xi, T)$  i  $w_{S1}(\xi, T - 1)$  określają wzory (3.84), (3.85), (3.87) i (3.88), natomiast  $w_{\text{stat}}(\xi, 1)$  jest ugięciem statycznym belki w punkcie  $\xi$  wywołanym obciążeniem równomiernie rozłożonym na całej rozpiętości belki. Występujące we wzorach (3.87) i (3.88) stałe  $I_n$  i  $J_n$  w przypadku ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego otrzymujemy z warunków początkowych:

$$w_{S1}(\xi, 0) = w_{\text{stat}}(\xi, 1) + w_A(\xi, 1), \quad \dot{w}_{S1}(\xi, 0) = \dot{w}_A(\xi, 1), \quad (3.121)$$

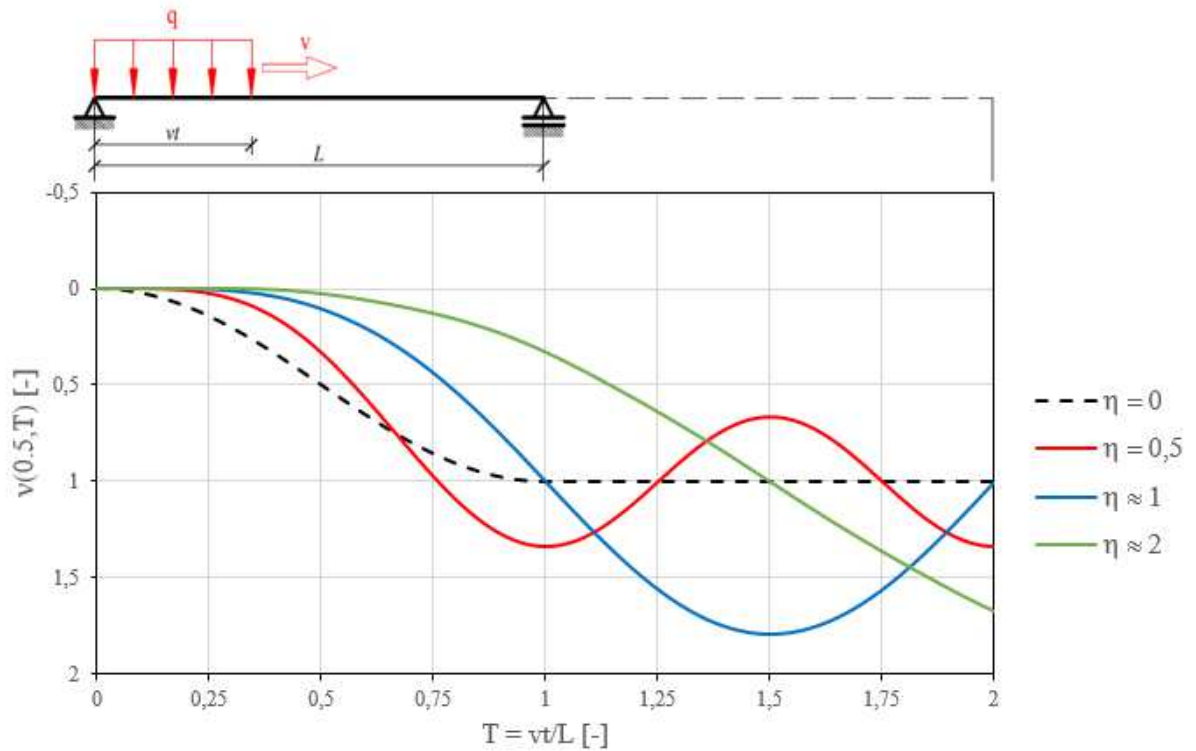
co daje nam:

$$J_n = H_n + A_n \sin \lambda_n + B_n \cos \lambda_n + C_n \sinh \lambda_n + D_n \cosh \lambda_n - Y_{n,\text{stat}}, \quad (3.122)$$

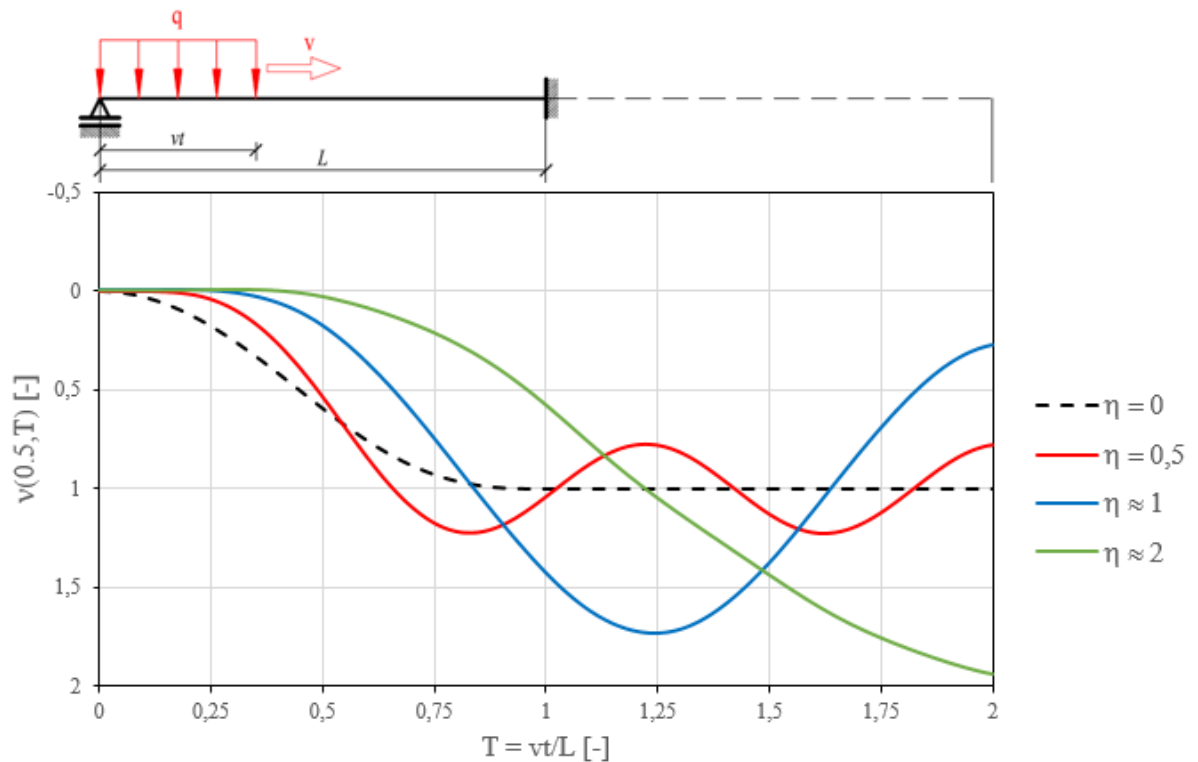
gdzie:

$$Y_{n,\text{stat}} = \frac{w_{\text{stat}}(\xi, 1)}{W_n(\xi)}, \quad (3.123)$$

Natomiast stałą  $I_n$  przy drganiach tłumionych oraz nietłumionych wyznaczmy zgodnie z wzorami (3.90) i (3.92) jak w przypadku ruchomej siły skupionej.

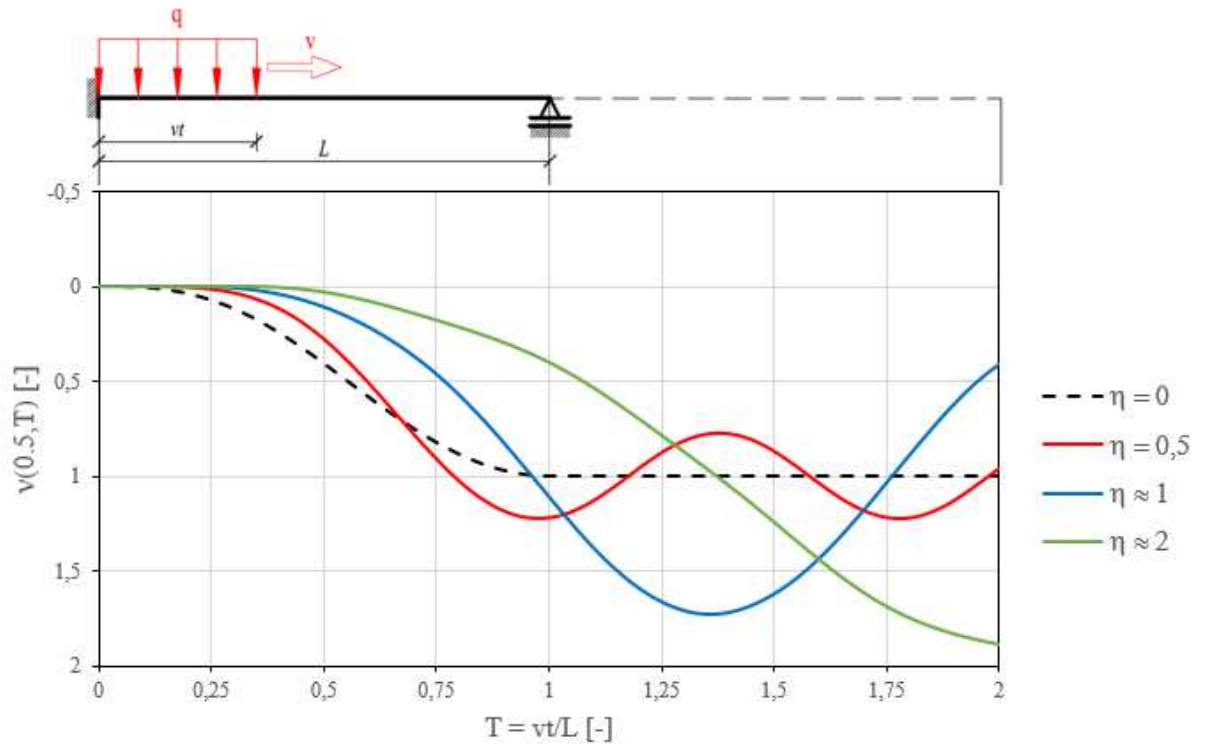


Rys. 3.11. Ugięcie dynamiczne belki swobodnie popartej mierzone w środku rozpiętości

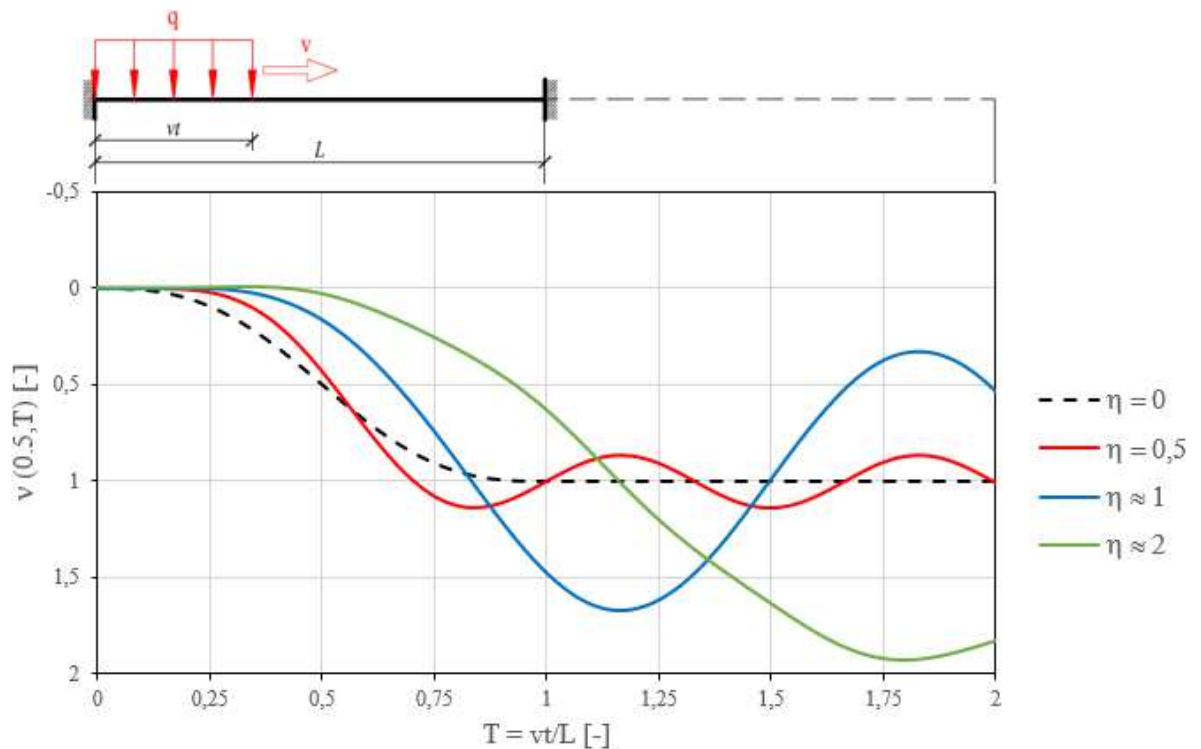


Rys. 3.12. Ugięcie dynamiczne belki lewostronnie swobodnie podpartej i prawostronnie utwierdzonej mierzone w środku rozpiętości





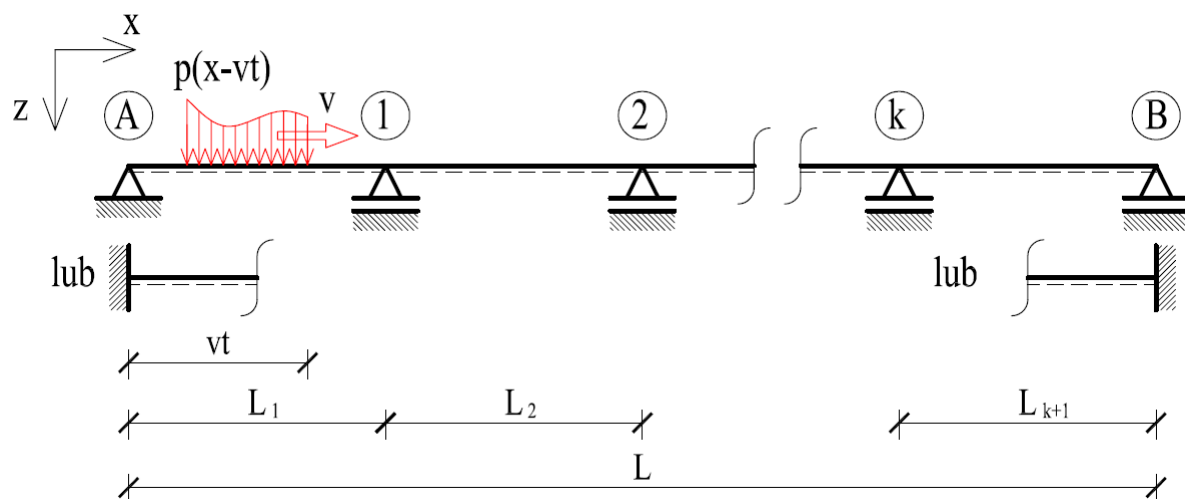
Rys. 3.13. Ugięcie dynamiczne belki lewostronnie utwierdzonej i prawostronnie swobodnie podpartej mierzone w środku rozpiętości



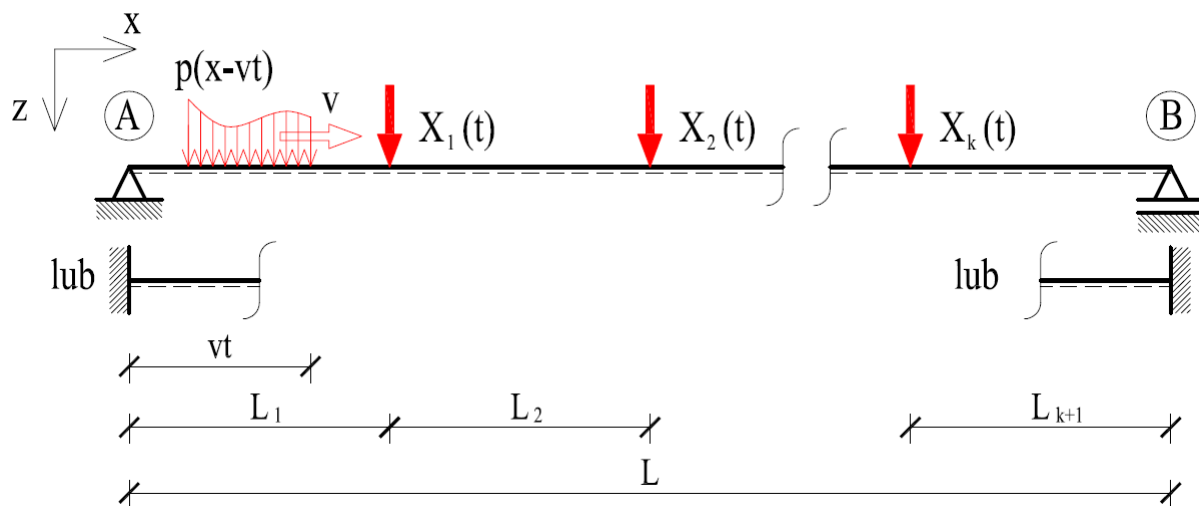
Rys. 3.14. Ugięcie dynamiczne belki obustronnie utwierdzonej mierzone w środku rozpiętości

## 4. DYNAMIKA BELEK WIELOPRZĘSŁOWYCH

Rozważmy wieloprzęślową ciągłą belkę pryzmatyczną o rozstawie podpór skrajnych równym  $L$ , charakteryzującą się stałą sztywnością giętą  $EI$ , rozkładem masy  $m$  oraz tłumieniem  $c$ . Belka w punktach skrajnych jest swobodnie podparta lub sztywno utwierdzona oraz posiada  $k$  dowolnie zlokalizowanych podpór pośrednich (rys. 4.1). Ustrój poddany jest działaniu pionowego obciążenia nieinercyjnego  $p(x - vt)$  poruszającego się z prędkością  $v$ .



Rys. 4.1. Wieloprzęślowa ciągła belka pryzmatyczna poddana działaniu obciążenia ruchomego



Rys. 4.2. Belka jednoprzęsłowa poddana działaniu obciążenia ruchomego oraz sił w usuniętych więziach nadliczbowych

Jeżeli myślowo usuniemy podpory pośrednie i w ich miejsce wprowadzimy siły nadliczbowe  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , ...  $X_k(t)$  to będziemy w stanie, analogicznie do statycznej metody sił, przedstawić drgania układu wieloprzęsłowego jako drgania podstawowej belki jednoprzęsłowej poddanej działaniu zadanego obciążenia ruchomego  $p(x - vt)$  oraz sił  $X_i(t)$  odpowiadających reakjom w usuniętych pośrednich więziach nadliczbowych (rys. 4.2). Drgania takiego układu można przedstawić w postaci superpozycji poszczególnych przypadków obciążeń:

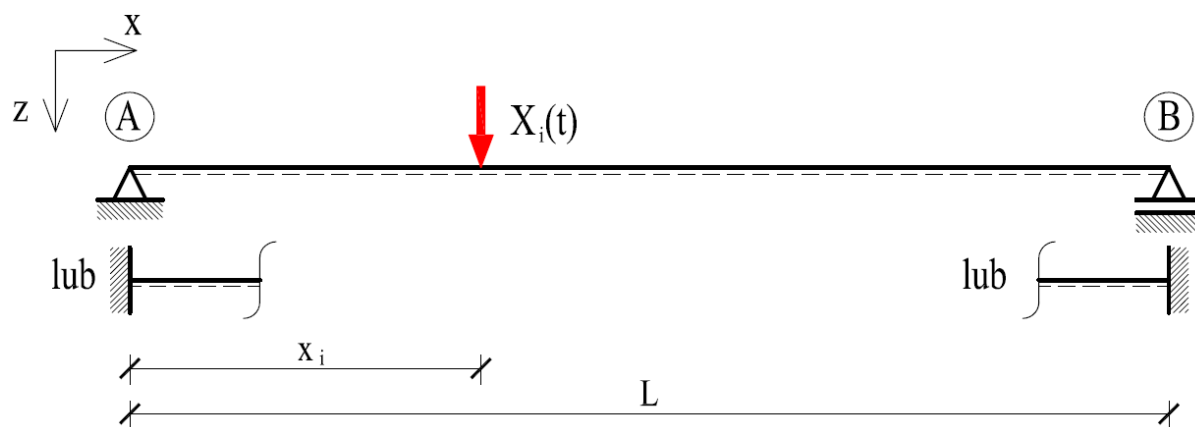
$$w(x, t) = w^p(x, t) + \sum_{i=1}^k w^{X_i}(x, t) \quad (4.1)$$

gdzie  $w^p(x, t)$  oznacza drgania belki jednoprzęsłowej wynikające z zadanego ruchomego obciążenia, natomiast  $w^{X_i}(x, t)$  oznacza drgania wywołane punktową siłą  $X_i(t)$  działającą w miejscu  $i$ -tej usuniętej więzi nadliczbowej.

Drgania  $w^p(x, t)$  pochodzące od obciążenia zewnętrznego zostały szczegółowo opisane w rozdziale poprzednim w przypadkach ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego.

#### 4.1. BELKA OBCIĄŻONA ZMIENNĄ W CZASIE SIŁĄ SKUPIONĄ

Rozpatrzmy jednoprzęsłową belkę pryzmatyczną poddaną działaniu zmiennej w czasie skupionej siły  $X_i(t)$  przyłożonej w punkcie  $x_i$  (rys. 4.3).



Rys. 4.3. Belka jednoprzęsłowa poddana działaniu zmiennej w czasie siły skupionej

Równanie ruchu w omawianym przypadku ma postać:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = X_i(t) \delta(x - x_i), \quad (4.2)$$

a po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych:

$$w^{IV}(\xi, T) + c_0 \dot{w}(\xi, T) + \sigma^2 \ddot{w}(\xi, T) = \frac{X_i(T)L^3}{EI} \delta(\xi - \xi_i), \quad (4.3)$$

gdzie:  $c_0 = \frac{cvL^3}{EI}$ ,  $\sigma^2 = \frac{mv^2L^2}{EI}$ . Rozwiązania powyższego równania poszukiwać będziemy w postaci (3.65) zgodnie z metodyką zastosowaną w przypadku ruchomego obciążenia opisaną szczegółowo w punkcie 3.2. Równanie różniczkowe zwyczajne uzyskane po uwzględnieniu ortogonalności funkcji własnych ma postać:

$$\ddot{Y}_n(T) + 2\alpha \dot{Y}_n(T) + \omega_n^2 Y_n(T) = \frac{X_i(T)L}{\gamma_n^2 mv^2} W_n(\xi_i). \quad (4.4)$$

Funkcję  $Y_n(T)$  przedstawmy w postaci spłotu:

$$Y_n(T) = \frac{LW_n(\xi_i)}{\gamma_n^2 mv^2} \int_0^T h_n(T - \tau) X_i(\tau) d\tau, \quad (4.5)$$

gdzie impulsowa funkcja przejścia  $h_n(T)$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego:

$$\ddot{h}_n(T) + 2\alpha \dot{h}_n(T) + \omega_n^2 h_n(T) = 0 \quad (4.6)$$

przy warunkach początkowych:

$$h_n(0) = 0; \quad \dot{h}_n(0) = 1 \quad (4.7)$$

i ma postać:

$$h_n(T) = e^{-\alpha T} \frac{1}{\Omega_n} \sin \Omega_n T \quad (4.8)$$

gdzie:  $\Omega_n = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$ , lub w przypadku drgań nietłumionych ( $\alpha = 0$ ):

$$h_n(T) = \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n T. \quad (4.9)$$

Ostatecznie drgania belki jednoprzęsłowej wywołane zmienną w czasie siłą  $X_i(T)$  działającą w punkcie o współrzędnej  $\xi_i$  można przedstawić w następującej postaci:

$$w(\xi, T) = \frac{L}{mv^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(\xi)W_n(\xi_i)}{\gamma_n^2} \int_0^T e^{-\alpha T} \frac{1}{\Omega_n} \sin \Omega_n(T - \tau) X_i(\tau) d\tau, \quad (4.10)$$

a przy braku tłumienia:

$$w(\xi, T) = \frac{L}{mv^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(\xi)W_n(\xi_i)}{\gamma_n^2} \int_0^T \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(T - \tau) X_i(\tau) d\tau, \quad (4.11)$$



więziach nadliczbowych wywołane ruchomym obciążeniem. Układ równań całkowych Volterra ma postać:

$$\begin{cases} \frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T d_{1j}(T-\tau) X_j(\tau) d\tau + w^p(\xi_1, T) = \Delta_1 = 0 \\ \frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T d_{2j}(T-\tau) X_j(\tau) d\tau + w^p(\xi_2, T) = \Delta_2 = 0 \\ \vdots \\ \frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T d_{kj}(T-\tau) X_j(\tau) d\tau + w^p(\xi_k, T) = \Delta_k = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

gdzie  $d_{ij}(T) = d_i(\xi_j, T)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , zgodnie z wzorami (4.13) i (4.14).

Porównując z przypadkiem obciążenia statycznego, układ równań ma postać:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k d_{1j,stat} X_j + w_{stat}^p(\xi_1, T) = \Delta_1 = 0 \\ \sum_{j=1}^k d_{2j,stat} X_j + w_{stat}^p(\xi_2, T) = \Delta_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k d_{kj,stat} X_j + w_{stat}^p(\xi_k, T) = \Delta_k = 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

gdzie:

$$d_{ij,stat} = \frac{L^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(\xi_i) W_n(\xi_j)}{\gamma_n^2 \lambda_n^4}, \quad (4.18)$$

natomiast wyraz wolny  $w_{stat}^p(\xi_i, T)$  w przypadku siły skupionej  $P$  przyłożonej w punkcie o współrzędnej  $T$  określony jest wzorem:

$$w_{stat}^p(\xi_i, T) = P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(\xi_i) W_n(T)}{\gamma_n^2 \lambda_n^4}, \quad (4.19)$$

a w przypadku obciążenia  $q$  rozłożonego na odcinku  $T$  patrząc od lewego krańca belki:

$$w_{stat}^p(\xi_i, T) = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(\xi_i)}{\gamma_n^2 \lambda_n^4} \int_0^T W_n(\xi) d\xi. \quad (4.20)$$

Ugięcie statyczne belki wieloprzęsłowej obciążonej siłą  $P$  przyłożoną w punkcie o współrzędnej  $T$  można przedstawić jako:

$$w_{\text{stat}}(\xi, T) = \frac{L^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ PW_n(T) + \sum_{i=1}^k X_j W_n(\xi_i) \right] \frac{W_n(\xi)}{\gamma_n^2 \lambda_n^4}, \quad (4.21)$$

natomiast ugięcie belki wieloprzęsłowej obciążonej obciążeniem  $q$  rozłożonym na długości  $T$  mierząc od lewego końca belki:

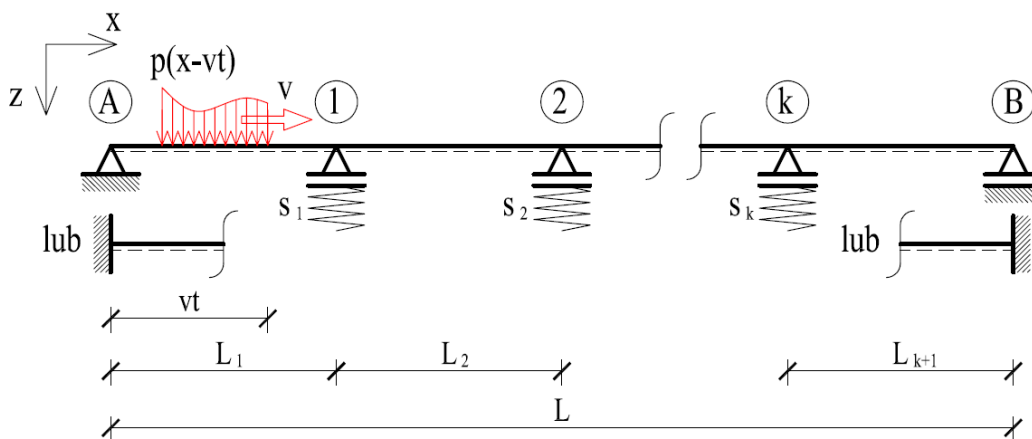
$$w_{\text{stat}}(\xi, T) = \frac{L^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ qL \int_0^T W_n(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^k X_j W_n(\xi_i) \right] \frac{W_n(\xi)}{\gamma_n^2 \lambda_n^4}. \quad (4.22)$$

Współczynnik dynamiczny  $v(\xi, T)$  możemy określić jako stosunek ugięcia dynamicznego  $w_d(\xi, T)$  do odpowiadającego mu maksymalnego ugięcia statycznego  $w_{\text{stat}}(\xi, T)$ :

$$v(\xi, T) = \frac{w_d(\xi, T)}{\max[w_{\text{stat}}(\xi, T)]}. \quad (4.23)$$

Jeżeli założymy, że podpory pośrednie belki wieloprzęsłowej są podporami sprężystymi charakteryzującymi się sztywnością  $s_i$  (rys. 4.3) to otrzymamy układ równań całkowych Voltery drugiego rodzaju, gdzie niewiadome funkcje  $X_i(T)$  będą występować nie tylko w wyrażeniu podcałkowym ale także jako wyraz wolny:

$$\begin{cases} \frac{L}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T d_{1j}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + w^p(\xi_1, T) = \Delta_1(T) = -\frac{X_1(T)}{s_1} \\ \frac{L}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T d_{2j}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + w^p(\xi_2, T) = \Delta_2(T) = -\frac{X_2(T)}{s_2} \\ \vdots \\ \frac{L}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T d_{kj}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + w^p(\xi_k, T) = \Delta_k(T) = -\frac{X_k(T)}{s_k}. \end{cases} \quad (4.24)$$



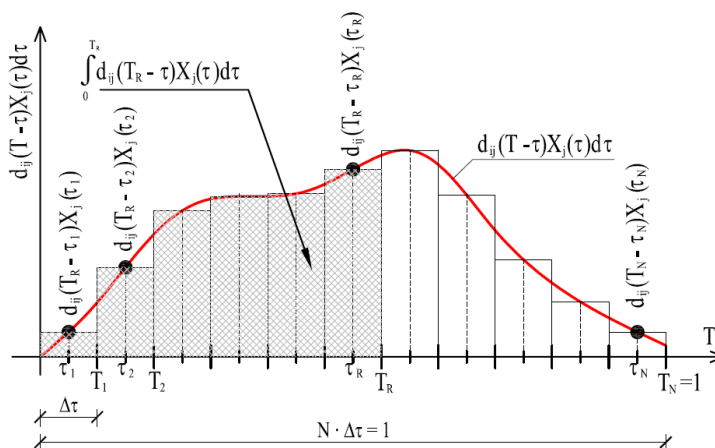
Rys. 4.3. Wieloprzęsłowa ciągła belka pryzmatyczna na podporach sprężystych poddana działaniu obciążenia ruchomego

#### 4.3. PROCEDURA NUMERYCZNA

Ponieważ układy równań całkowych Voltery przedstawione wzorami (4.16) i (4.24) są trudne rozwiązania metodami analitycznymi, zaproponowano rozwiązanie numeryczne zgodnie z niżej opisaną procedurą [46]. W pierwszej kolejności chcemy podzielić interwał czasowy  $[0,1]$  przejazdu obciążenia po belce na skończoną liczbę  $N$  przedziałów czasowych o jednakowym czasie trwania  $\Delta\tau = 1/N$  zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 4.4. W środku każdego segmentu przyjmujemy punkty obliczeniowe  $\tau_R$  co umożliwi nam zastąpienie bezpośredniego całkowania z wzoru (4.12) całką numeryczną bazującą na metodzie prostokątów:

$$\int_0^{T_R} d_{ij}(T_R - \tau)X_j(\tau)d\tau = \sum_{r=1}^R d_{ij}(T_R - \tau_r)X_j(\tau_r)\Delta\tau, \quad (4.25)$$

gdzie:  $T_R = R\Delta\tau$ ,  $\tau_r = (r - 0,5)\Delta\tau$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ ,  $R = 1, 2, \dots, N$ .



Rys. 4.4. Schemat obliczeń numerycznych



Celem zaprezentowanej powyżej procedury jest wyznaczenie wartości reakcji  $X_i(T)$  w podporach pośrednich w chwilach  $\tau_R$ . Dzięki takiemu zabiegowi jesteśmy w stanie zastąpić każde z równań całkowych Volterry układem rekurencyjnych równań algebraicznych:

$$\frac{L\Delta\tau}{v} \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^R d_{ij}(T_R - \tau_r) X_j(\tau_r) + w^p(\xi_k, T_R) = 0, \quad (4.26)$$

gdzie liczba układów równań w postaci przedstawionej powyżej odpowiada liczbie  $k$  podpór pośrednich. Przykładowo gdy mamy do czynienia z belką dwuprzęsłową z jedną podporą pośrednią ( $k = 1$ ), pierwsze trzy oraz ostatnie z równań algebraicznych mają postać:

$$\begin{aligned} R = 1 & \rightarrow \frac{L\Delta\tau}{v} d_{11}(T_1 - \tau_1) \mathbf{X}_1(\tau_1) + w^p(\xi_1, T_1) = 0; \\ R = 2 & \rightarrow \frac{L\Delta\tau}{v} [d_{11}(T_2 - \tau_1) \mathbf{X}_1(\tau_1) + d_{11}(T_2 - \tau_2) \mathbf{X}_1(\tau_2)] + w^p(\xi_1, T_2) = 0; \\ R = 3 & \rightarrow \frac{L\Delta\tau}{v} [d_{11}(T_3 - \tau_1) \mathbf{X}_1(\tau_1) + d_{11}(T_3 - \tau_2) \mathbf{X}_1(\tau_2) \\ & \quad + d_{11}(T_3 - \tau_3) \mathbf{X}_1(\tau_3)] + w^p(\xi_1, T_3) = 0; \\ & \quad \vdots \\ R = N & \rightarrow \frac{L\Delta\tau}{v} \sum_{r=1}^N d_{11}(T_N - \tau_r) \mathbf{X}_1(\tau_r) + w^p(\xi_1, T_N) = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

gdzie  $T_R - \tau_R = \tau_1 = 0,5\Delta\tau$ ,  $T_R - \tau_{R-r} = \tau_1 + r\Delta\tau$ . Oznacza to, że w każdym kolejnym równaniu mamy o jedną niewiadomą więcej do wyznaczenia względem równania poprzedniego. Po wyznaczeniu wartości siły  $X_1(T)$  w podporze pośredniej w chwilach  $\tau_R$  jesteśmy w stanie zbudować równanie opisujące drgania belki dwuprzęsłowej:

$$w(\xi, T_R) = \frac{L\Delta\tau}{v} \sum_{r=1}^R d_1(\xi, T_R - \tau_r) X_1(\tau_r) + w^p(\xi, T_R). \quad (4.28)$$

Rozmiar segmentu czasowego  $\Delta\tau$  powinien być odpowiednio dobrany aby uzyskać stabilne, akceptowalne rozwiązanie. Przyjęta długość przedziału czasowego zależy najwyższej wartości  $\omega_n = \lambda_n/\sigma$  użytej w szeregach (3.65) i powinna być określona jako:

$$\Delta\tau \leq \frac{2\pi}{\omega_{n,\max}}, \quad (4.29)$$

Stąd liczba  $N$  segmentów czasowych przyjęta do kalkulacji numerycznych powinna wynosić:

$$N \geq \frac{\omega_{n,\max}}{2\pi}. \quad (4.30)$$

Równanie (4.16) można przedstawić w zapisie macierzowym:

$$\sum_{j=1}^k \mathbf{D}_{ij} \cdot \bar{X}_j + \bar{b}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.31)$$

gdzie poszczególne macierze oraz wektory mają postać:

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ \dots & d_{ij,Rr} & 0 \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{N \times N} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.32)$$

$$d_{ij,Rr} = 0 \quad \text{dla } r > R \quad (4.33)$$

$$d_{ij,Rr} = \frac{L}{v} d_{ij}(\tau_1) \Delta\tau \quad \text{dla } r = R \quad (4.34)$$

$$d_{ij,Rr} = \frac{L}{v} d_{ij}(T_R - \tau_r) \Delta\tau \quad \text{dla } r < R \quad (4.35)$$

$$\bar{X}_j = \begin{bmatrix} X_j(\tau_1) \\ X_j(\tau_2) \\ \vdots \\ X_j(\tau_N) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.36)$$

$$\bar{b}_i = \begin{bmatrix} w^p(\xi_i, T_1) \\ w^p(\xi_i, T_1) \\ \vdots \\ w^p(\xi_i, T_N) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (4.37)$$

Przykładowo równanie macierzowe i jego rozwiązanie w przypadku belki dwuprzęsłowej ma postać:

$$\mathbf{D}_{11} \cdot \bar{X}_1 + \bar{b}_1 = \bar{0} \quad \rightarrow \quad \bar{X}_1 = -\mathbf{D}_{11}^{-1} \cdot \bar{b}_1, \quad (4.38)$$

a dla belki z  $k$  podporami pośrednimi:

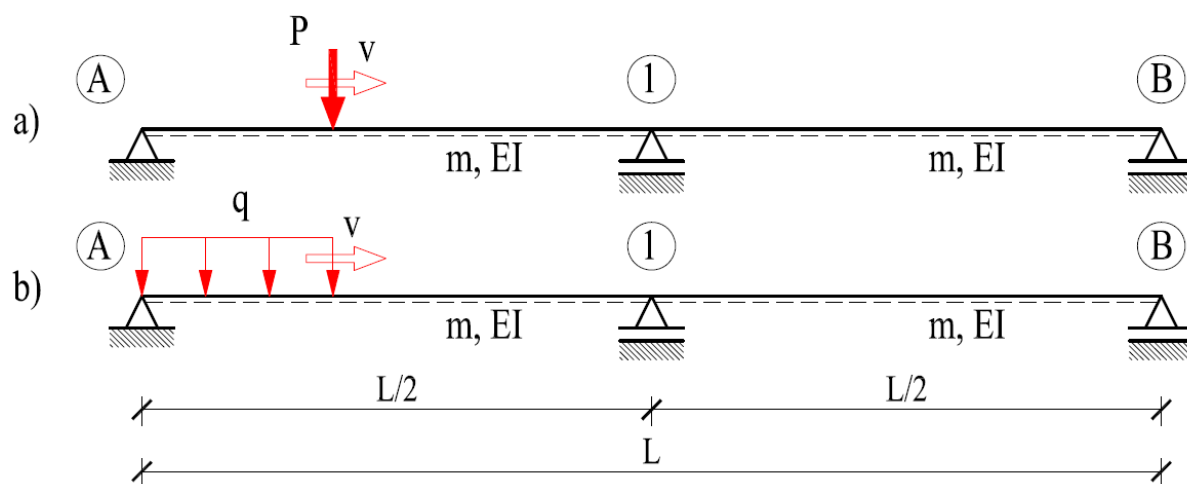
$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \dots & \mathbf{D}_{1k} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{D}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{k1} & \mathbf{D}_{k2} & \dots & \mathbf{D}_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad (4.39)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \dots & \mathbf{D}_{1k} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \dots & \mathbf{D}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{k1} & \mathbf{D}_{k2} & \dots & \mathbf{D}_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_k \end{bmatrix}.$$

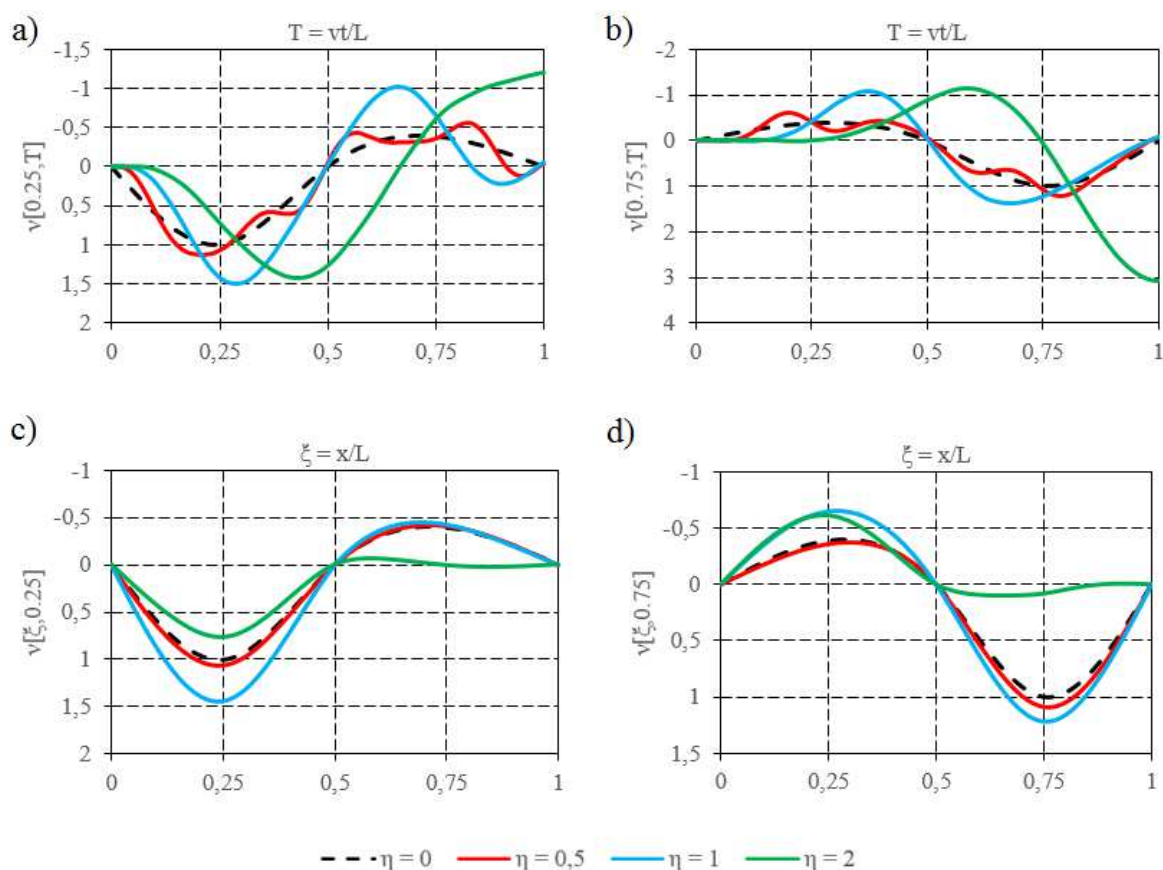
#### 4.4. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

##### 4.4.1. BELKA DWUPRZĘSŁOWA

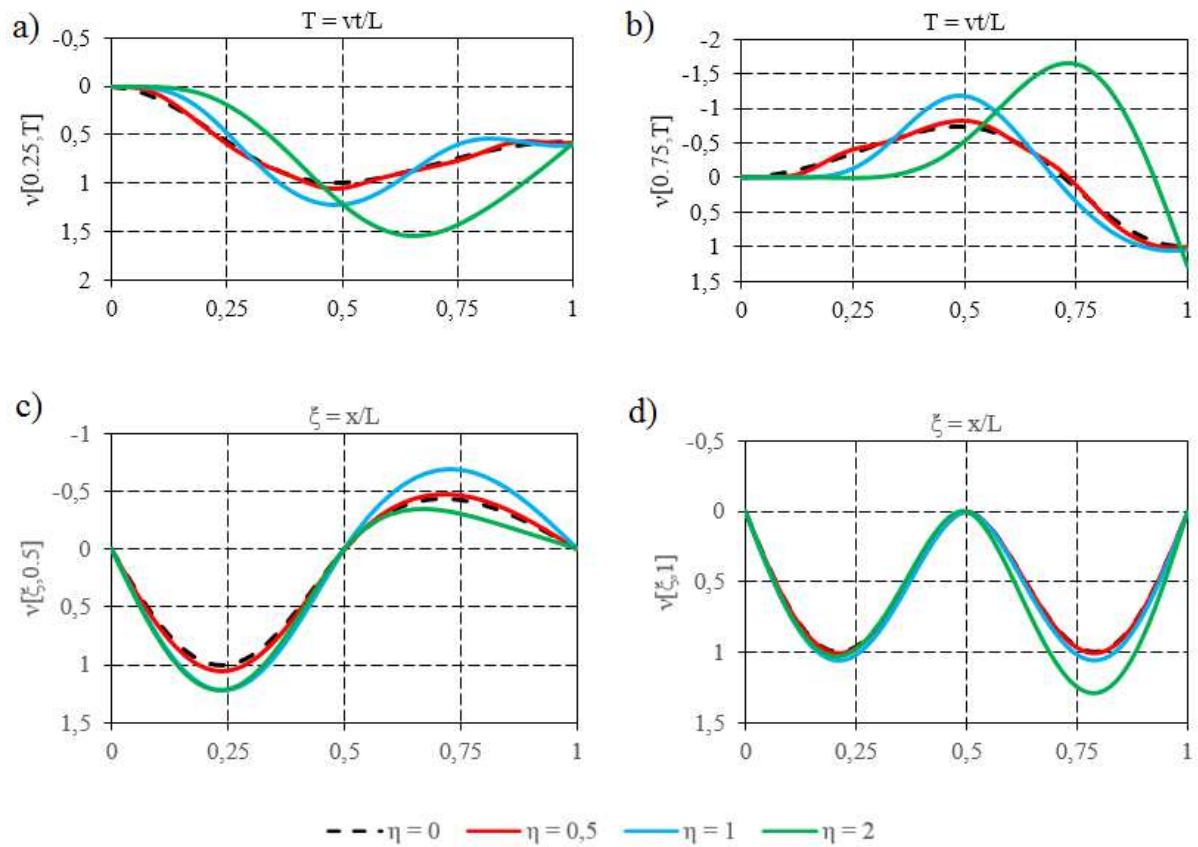
Pierwszy przykład dotyczy belki dwuprzęsłowej przedstawionej na rysunku 4.5. Rozpiętość belki w osiach podpór skrajnych wynosi  $L = 40$  m. Belka podparta jest na obu końcach w sposób przegubowy oraz posiada jedną podporę pośrednią w środku rozpiętości. Masa jednostkowa belki wynosi  $m = 1000$  kg/m, a jej sztywność giętą  $EI = 2 \cdot 10^9$  Nm<sup>2</sup>. Rozpatrujemy układ poddany działaniu ruchomej siły  $P = 10000$  N oraz ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego  $q = 2000$  N/m. W obu przypadkach obciążenie porusza się ze stałą prędkością  $v$ . Model numeryczny zastosowany w dalszych obliczeniach zbudowano dzieląc czas przejazdu obciążenia po belce na  $N = 200$  równych kroków czasowych o czasie trwania  $\Delta\tau = 0,005$  uzyskując tym samym układ 200 rekurencyjnych równań algebraicznych. Wyniku uzyskano sumując pierwsze 10 wyrazów w szeregach (3.65) i (4.14). Na rysunkach 4.6a i 4.6b przedstawiono ugięcie dynamiczne środka lewego i prawego przęsła belki, wyrażone za pomocą współczynnika dynamicznego, względem czasu przejazdu siły skupionej po belce, natomiast rysunki 4.6c i 4.6d przedstawiają oś odkształconą belki w czasie  $T = 0,25$  oraz  $T = 0,75$  odpowiadającym chwili, gdy siła znajduje się w środku lewego oraz prawego przęsła. Analogicznie rysunki 4.7a i 4.7b prezentują dynamiczne ugięcie środków lewego i prawego przęsła belki poddanych działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego natomiast rysunki 4.7c i 4.7d przedstawiają osie odkształcone belki w czasie  $T = 0,5$ , gdy obciążenie rozłożone obejmuje lewe przęsło belki oraz  $T = 1$  gdy obciążenie obejmuje całą belkę. Obliczenia przeprowadzono przyjmując cztery różne prędkości ruchu obciążenia wyrażone za pomocą parametru  $\eta$  określającego stosunek prędkości  $v$  do pierwszej prędkości rezonansowej dla belki jednoprzęsłowej. Przypadek  $\eta = 0$  odpowiada rozwiązaniu statycznemu a uzyskane w ten sposób wykresy przedstawiają linie wpływu ugięcia statycznego oraz oś odkształconą belki poddanej działaniu obciążenia zmieniającego swoje położenie w sposób statyczny.



Rys. 4.5. Belka dwuprzęsłowa poddana działaniu: a) ruchomej siły skupionej; b) ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego



Rys. 4.6. Ugięcie dynamiczne belki dwuprzęsłowej poddanej działaniu siły ruchomej:  
 a) ugięcie środka lewego przęsła belki względem czasu przejazdu siły;  
 b) ugięcie środka prawego przęsła belki względem czasu przejazdu siły;  
 c) oś odkształcona belki w chwili gdy siła znajduje się po środku lewego przęsła;  
 d) oś odkształcona belki w chwili gdy siła znajduje się po środku prawego przęsła

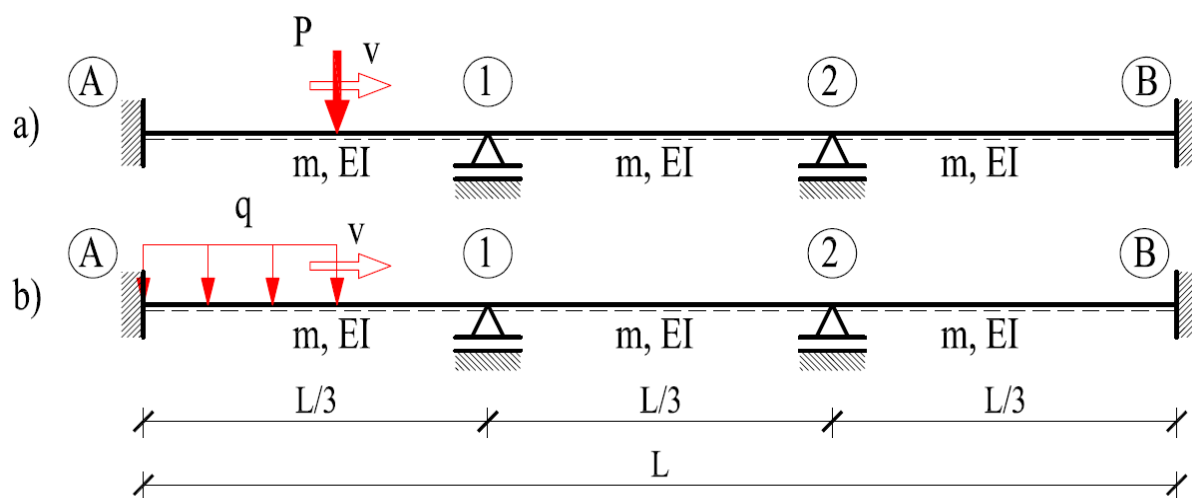


Rys. 4.7. Ugięcie dynamiczne belki dwuprzęsłowej poddanej działaniu ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego:

- a) ugięcie środka lewego przęsła belki względem czasu przejazdu obciążenia;
- b) ugięcie środka prawego przęsła belki względem czasu przejazdu obciążenia;
- c) oś odkształcona belki w chwili gdy obciążenie obejmuje całe lewe przęsło;
- d) oś odkształcona belki w chwili gdy obciążenie obejmuje całą belkę

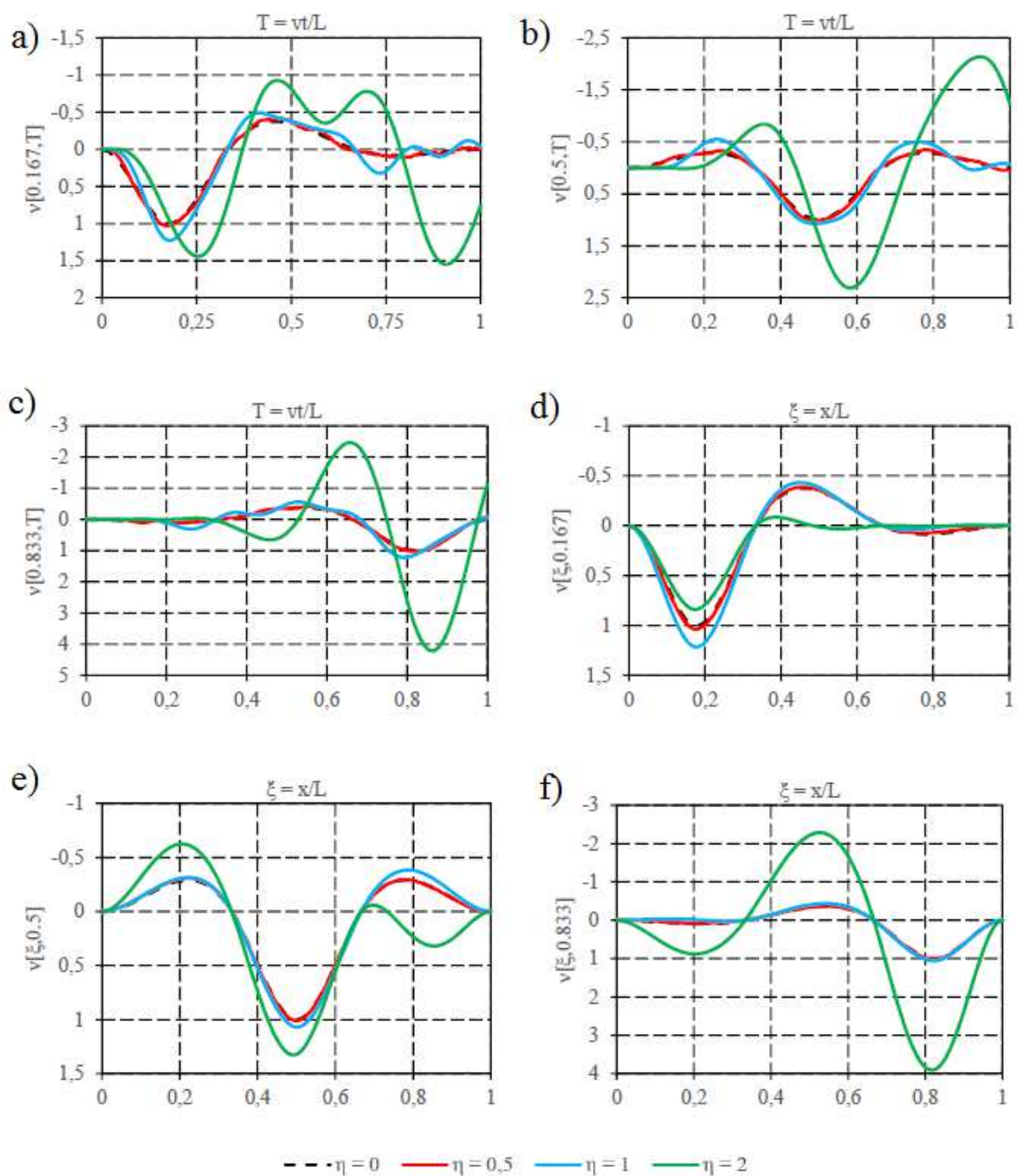
**4.4.2. BELKA TRÓJPRZEŚŁOWA**

Jako drugi przykład rozpatrzmy belkę trójprześłową o rozpiętości między podporami skrajnymi  $L = 60$  m (rys. 4.8). Belka jest sztywno utwierdzona na obu końcach oraz posiada dwie podpory pośrednie dzielącą ją na trzy równe przejścia. Masę jednostkową oraz sztywność giętną belki przyjęto jak w przykładzie poprzednim. Belka poddana jest również działaniu ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia rozłożonego. Rysunki 4.9a-c oraz 4.10a-c przedstawiają ugięcie dynamiczne środka każdego z prześeł względem czasu przejazdu obciążenia. Rysunki 4.9d-f przedstawiają oś odkształconą belki w chwili gdy ruchoma siła skupiona znajduje się w środku każdego z prześeł natomiast rysunki 4.10d-f przedstawiają oś odkształconą belki w chwili gdy obciążenie obejmuje odpowiednio: pierwsze prześeł, pierwsze i drugie prześeł oraz całą belkę. Model numeryczny oraz liczbę sumowanych wyrazów szeregow przyjęto jak w przykładzie poprzednim.



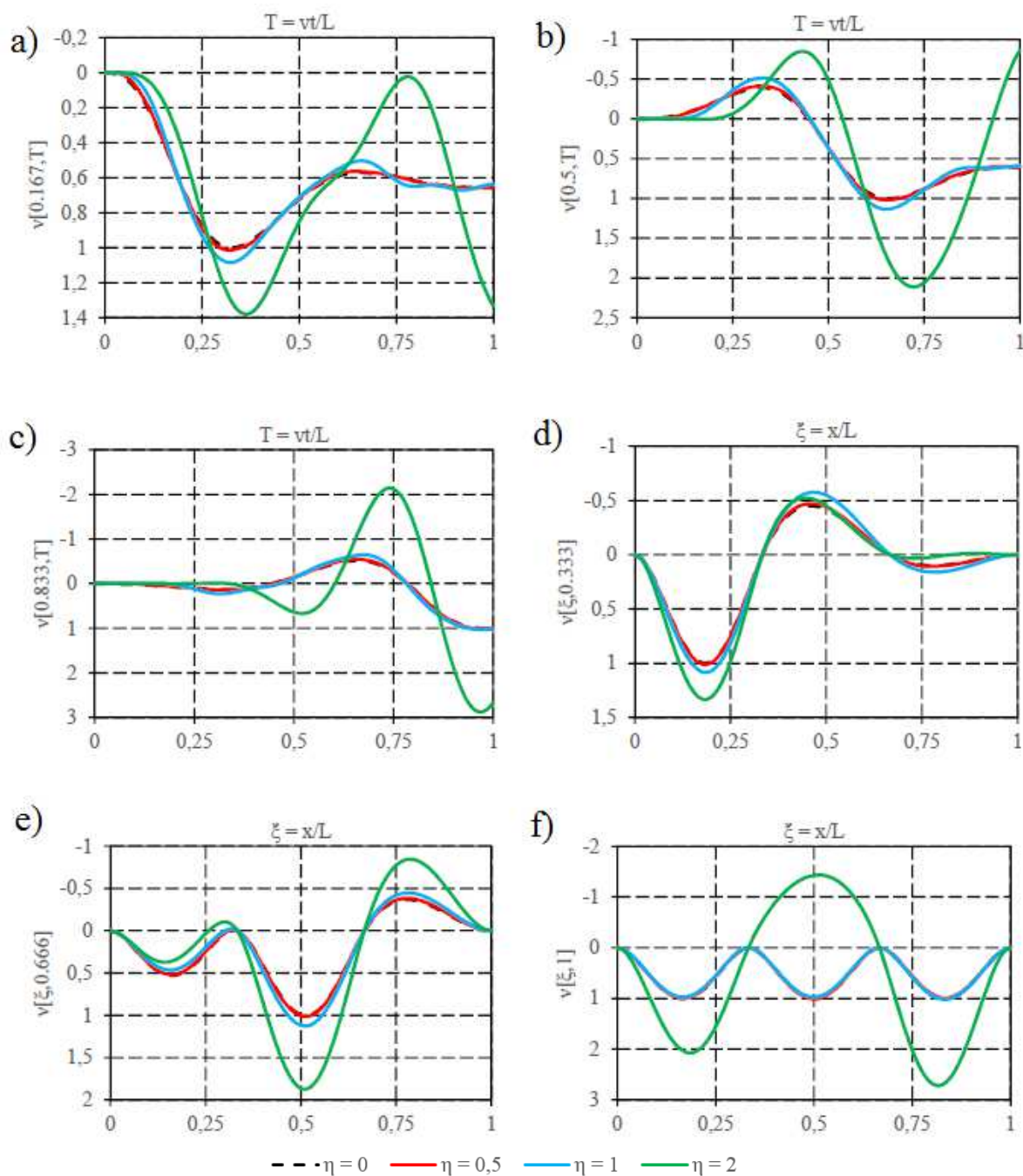
Rys. 4.8. Belka trójprześłowa poddana działaniu:

a) ruchomej siły skupionej; b) ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego



Rys. 4.9. Ugięcie dynamiczne belki trójprzęsłowej poddanej działaniu ruchomej siły skupionej: a) ugięcie środka lewego przęsła; b) środka centralnego przęsła; c) środka prawego przęsła względem czasu przejazdu obciążenia; os' okształcona belki w chwili gdy ruchoma siła znajduje się w środku d) lewego przęsła; e) centralnego przęsła; f) prawego przęsła



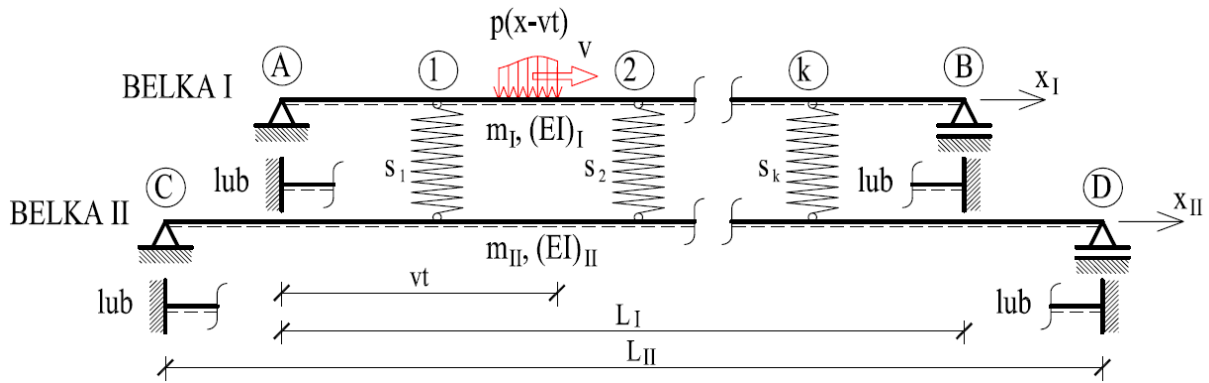


Rys. 4.10. Ugięcie dynamiczne belki trójprzęsłowej poddanej działaniu ruchomego obciążenia rozłożonego: a) ugięcie środka lewego przęsła; b) środka centralnego przęsła; c) środka prawego przęsła względem czasu przejazdu obciążenia; ós odkształcona belki w chwili gdy ruchoma siła znajduje się w środku: d) lewego przęsła; e) centralnego przęsła; f) prawego przęsła



### 5. DYNAMIKA UKŁADU DWÓCH BELEK SPRZĘŻONYCH

W niniejszym rozdziale skupimy się na analizie drgań układu dwóch belek Eulera-Bernoulliego połączonych między sobą punktowymi więziami sprężystymi o skończonej sztywności (rys. 5.1). Układ składa się z belki górnej (belka I) oraz belki dolnej (belka II) o zróżnicowanej rozpiętości, sztywności giętej, rozkładzie masy, charakterystyce tłumienia oraz warunkach podparcia na podporach skrajnych. Belki są sprzężone ze sobą k więziami sprężystymi o skończonej sztywności  $s$  (jednakowej lub zróżnicowanej dla każdej z więzi). Jedna z belek (belka I) poddana jest działaniu ruchomego obciążenia nieinercyjnego  $p(x - vt)$ .



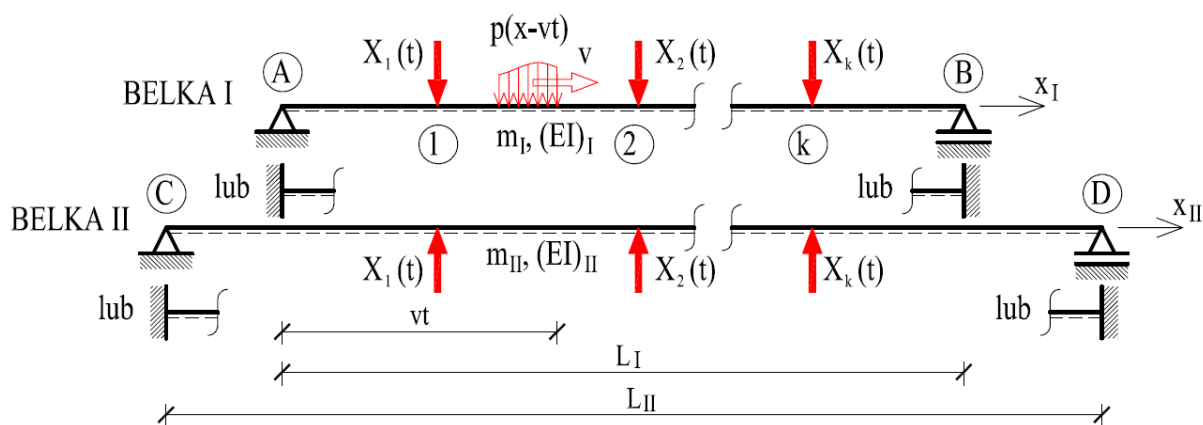
Rys. 5.1. Układ dwóch belek sprzężonych punktowymi więziami sprężystymi poddany działaniu obciążenia ruchomego

Równania ruchu opisujące drgania obydwu belek  $w_I = w(x_I, t)$  oraz  $w_{II} = w(x_{II}, t)$  można przedstawić w następującej postaci:

$$(EI)_I w_I^{IV} + c_I \dot{w}_I + m_I \ddot{w}_I + \sum_{i=1}^k s_i [w_I - w_{II}] \delta(x_I - x_{I,i}) = p(x_I - vt), \quad (5.1)$$

$$(EI)_{II} w_{II}^{IV} + c_{II} \dot{w}_{II} + m_{II} \ddot{w}_{II} + \sum_{i=1}^k s_i [w_{II} - w_I] \delta(x_{II} - x_{II,i}) = 0, \quad (5.2)$$

gdzie wszystkie parametry dotyczące obciążonej belki górnej oznaczono dolnym indeksem „I” natomiast parametry związane z nieobciążoną belką dolną oznaczono indeksem „II”. Jeżeli myślowo usuniemy więzi łączące obie belki, wprowadzając w ich miejsce siły  $X_i(t)$ , co pokazano na rysunku 5.2, będziemy w stanie opisać drgania belki górnej poprzez superpozycję drgań belki jedoprzęsłowej obciążonej zadaniem ruchomym obciążeniem oraz punktowymi siłami skupionymi, zmiennymi w czasie, odzwierciedlającymi reakcje w usuniętych więziach sprężystych. Drgania nieobciążonej belki dolnej będą natomiast pochodzić od sił  $X_i(t)$ .



Rys. 5.2. Dwie belki jednoprzęsłowe poddane działaniu obciążenia ruchomego oraz skupionych sił nadliczbowych

Po takim zabiegu drgania obydwu belek przedstawimy następująco:

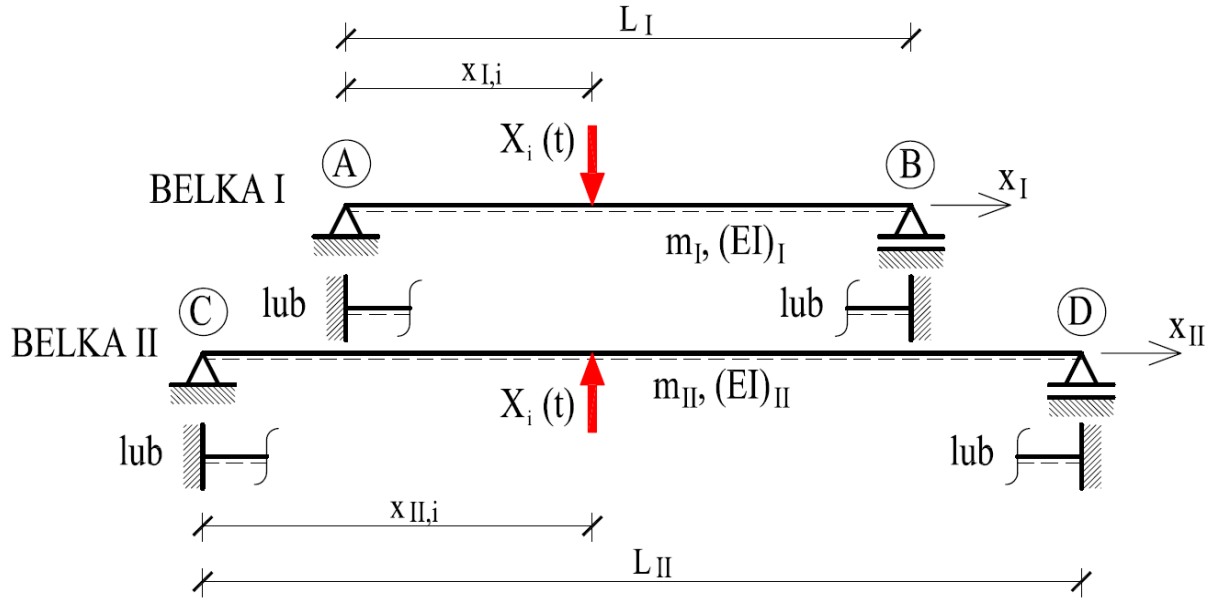
$$w_I = w_I^p + \sum_{i=1}^k w_I^{X_i}; \quad w_{II} = - \sum_{i=1}^k w_{II}^{X_i}, \quad (5.3)$$

gdzie górny indeks „p” lub „ $X_i$ ” oznacza przyczynę powstawania drgań, mianowicie zadane obciążenie ruchome lub reakcję w „i”-tej więzi sprężystej.

### 5.1. DYNAMIKA BELEK POJEDYNCZYCH

Drgania pojedynczych belek jednoprzęsłowych poddanych działaniu obciążenia ruchomego w postaci ruchomej siły skupionej lub ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego przedstawiono w rozdziale 3. Uzyskane rozwiązania można w niezmienionej postaci wykorzystać do opisu drgań  $w_I^p$  z wzoru 5.3.

Jeżeli chodzi o drgania  $w_I^{X_i}$  oraz  $w_{II}^{X_i}$  wynikające z siły  $X_i(t)$  reprezentującej reakcję w myślowo usuniętej więzi sprężystej, rozwiązanie przedstawione w formie opisanej w punkcie 4.1 można zastosować jedynie w przypadku belek o jednakowej rozpiętości, parametrach geometryczno-materiałowych oraz warunkach podparcia. W sytuacji gdy belki różnią się pod względem któregośkolwiek z wyżej wymienionych parametrów (rys. 5.3) konieczna jest modyfikacja uprzednio uzyskanego rozwiązania.



Rys. 5.3. Dwie belki jednoprzęsłowe poddane działaniu skupionej siły nadliczbowej

Rozwiązania dla powyższego problemu poszukiwać będziemy w bazie współrzędnych bezwymiarowych:

$$\xi = \frac{x_I}{L_I}, \xi \in [0,1]; \quad \zeta = \frac{x_{II}}{L_{II}}, \zeta \in [0,1]; \quad T = \frac{vt}{L_I}, T \in [0,1]. \quad (5.4)$$

Warto zauważyć, że wprowadzono oddzielne współrzędne przestrzenne  $\xi$  oraz  $\zeta$  osobno dla każdej z belek. Współrzędna czasowa  $T$  powiązana jest natomiast z rozpiętością  $L_I$  belki po której porusza się obciążenie. Przy tak określonych współrzędnych bezwymiarowych równania ruchu belek I i II prezentują się następująco:

$$[w_I^{X_i}(\xi, T)]^{IV} + c_{0,I} \dot{w}_I^{X_i}(\xi, T) + \sigma_I^2 \ddot{w}_I^{X_i}(\xi, T) = X_{0,I} \delta(\xi - \xi_i), \quad (5.5)$$

$$[w_{II}^{X_i}(\zeta, T)]^{IV} + c_{0,II} \dot{w}_{II}^{X_i}(\zeta, T) + \sigma_{II}^2 \ddot{w}_{II}^{X_i}(\zeta, T) = X_{0,II} \delta(\zeta - \zeta_i), \quad (5.6)$$

gdzie:  $c_{0,I} = \frac{c_I v L_I^3}{(EI)_I}$ ,  $\sigma_I^2 = \frac{m_I v^2 L_I^2}{(EI)_I}$ ,  $X_{0,I} = \frac{X_i(T) L_I^3}{(EI)_I}$ ,  $c_{0,II} = \frac{c_{II} v L_{II}^4}{(EI)_{II} L_I}$ ,  $\sigma_{II}^2 = \frac{m_{II} v^2 L_{II}^4}{(EI)_{II} L_I^2}$ ,  $X_{0,II} = \frac{X_i(T) L_{II}^3}{(EI)_{II}}$ .

Rozwiązania układu równań poszukiwać będziemy w taki sam sposób jak postępowaliśmy w pkt. 3.2. Drgania górnej oraz dolnej belki przedstawimy w postaci splotów:

$$w_I^{X_i}(\xi, T) = \frac{L_I}{v} \int_0^T d_{I,i}(\xi, T - \tau) X_i(\tau) d\tau, \quad (5.7)$$

$$w_{II}^{X_i}(\zeta, T) = \frac{L_I}{v} \int_0^T d_{II,i}(\zeta, T - \tau) X_i(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

gdzie:

$$d_{I,i}(\xi, T) = \frac{vL_I^2}{\sigma_I^2(EI)_I} e^{-\alpha_I T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_{I,n} T W_{I,n}(\xi_i) W_{I,n}(\xi)}{\gamma_{I,n}^2 \Omega_{I,n}}, \quad (5.9)$$

$$d_{II,i}(\zeta, T) = \frac{vL_{II}^3}{\sigma_{II}^2(EI)_{II} L_I} e^{-\alpha_{II} T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_{II,n} T W_{II,n}(\zeta_i) W_{II,n}(\zeta)}{\gamma_{II,n}^2 \Omega_{II,n}}, \quad (5.10)$$

$$\alpha_I = \frac{c_I L_I}{2m_I v}; \quad \Omega_{I,n} = \sqrt{\omega_{I,n}^2 - \alpha_I^2}; \quad \omega_{I,n}^2 = \frac{\lambda_{I,n}^4}{\sigma_I^2} \quad (5.11)$$

$$\alpha_{II} = \frac{c_{II} L_I}{2m_{II} v}; \quad \Omega_{II,n} = \sqrt{\omega_{II,n}^2 - \alpha_{II}^2}; \quad \omega_{II,n}^2 = \frac{\lambda_{II,n}^4}{\sigma_{II}^2} \quad (5.12)$$

## 5.2. DRGANIA BELEK SPRZĘŻONYCH

Chcąc opisać drgania układu dwóch belek sprzężonych punktowymi więziami sprężystymi zbudujemy układ równań zgodności przemieszczeń, na podstawie którego będziemy wyznaczać siły  $X_i(T)$  w pośrednich więzjach sprężystych:

$$\begin{cases} w_I^P(\xi_1, T) + \sum_{i=1}^k w_I^{Xi}(\xi_i, T) + \sum_{i=1}^k w_{II}^{Xi}(\zeta_i, T) = -\frac{X_1(T)}{s_1} \\ w_I^P(\xi_2, T) + \sum_{i=1}^k w_I^{Xi}(\xi_i, T) + \sum_{i=1}^k w_{II}^{Xi}(\zeta_i, T) = -\frac{X_2(T)}{s_2} \\ \vdots \\ w_I^P(\xi_k, T) + \sum_{i=1}^k w_I^{Xi}(\xi_i, T) + \sum_{i=1}^k w_{II}^{Xi}(\zeta_i, T) = -\frac{X_k(T)}{s_k} \end{cases} \quad (5.13)$$

Powyższy układ równań po zastosowaniu uzyskanych uprzednio rozwiązań staje się układem równań całkowych Voltery drugiego rodzaju:

$$\begin{cases} \frac{L_I}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T d_{ij}(T-\tau) X_1(\tau) d\tau + w_I^P(\xi_1, T) = -\frac{X_1(T)}{s_1} \\ \frac{L_I}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T d_{ij}(T-\tau) X_2(\tau) d\tau + w_I^P(\xi_2, T) = -\frac{X_2(T)}{s_2} \\ \vdots \\ \frac{L_I}{v} \sum_{i=1}^k \int_0^T d_{ij}(T-\tau) X_k(\tau) d\tau + w_I^P(\xi_k, T) = -\frac{X_k(T)}{s_k} \end{cases} \quad (5.14)$$

gdzie:

$$d_{ij}(T) = d_{I,i}(\xi_j, T) + d_{II,i}(\zeta_j, T). \quad (5.15)$$

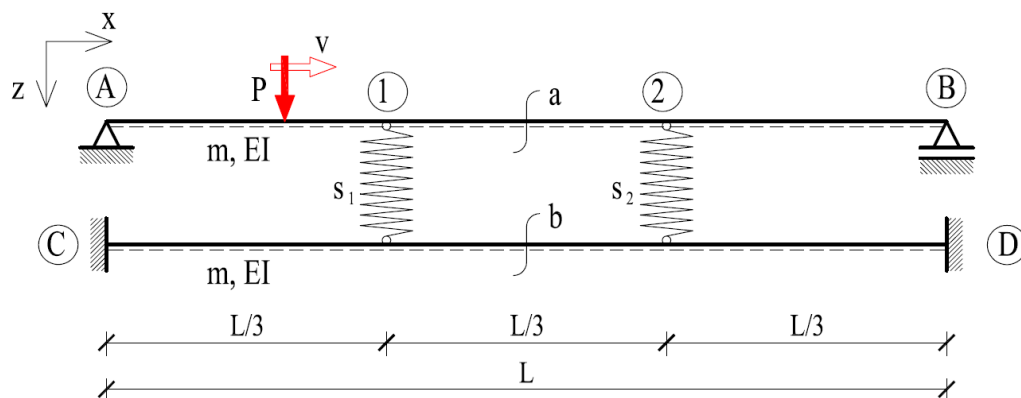
Procedura numeryczna rozwiązania powyższego układu równań całkowych jest identyczna jak w przypadku pojedynczej belki wieloprzęsłowej. Po wyznaczeniu reakcji w pośrednich więziach sprężystych drgania belki I i II można przedstawić następująco:

$$w_I(\xi, T_R) = \frac{L_I \Delta \tau}{v} \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^R d_{I,i}(\xi, T_R - \tau_r) X_i(\tau_r) + w_I^p(\xi, T_R), \quad (5.16)$$

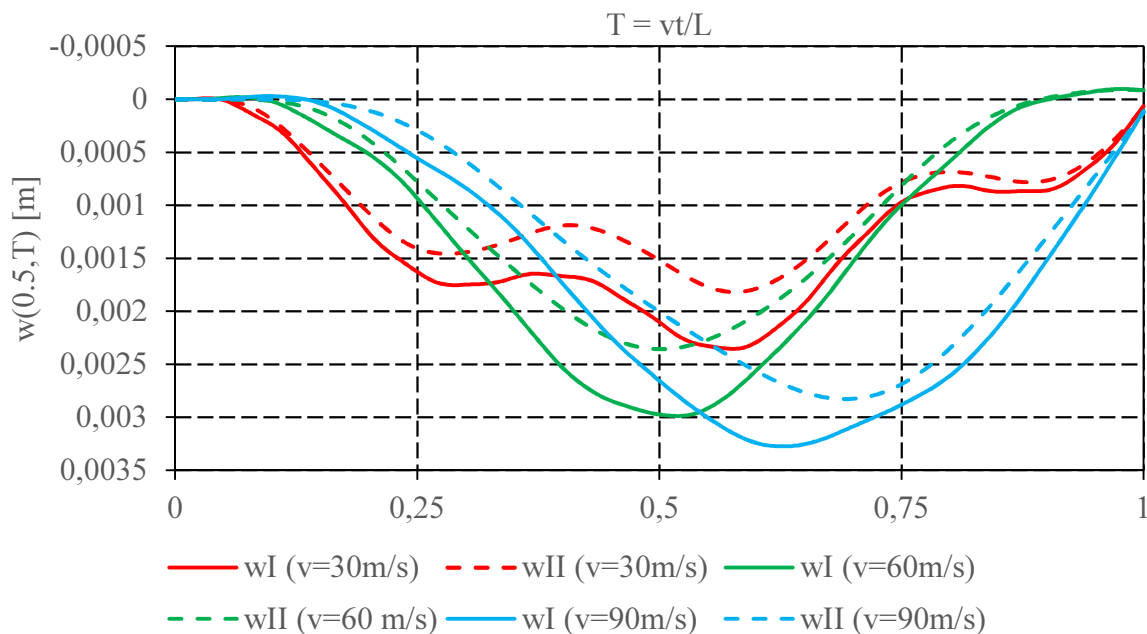
$$w_{II}(\zeta, T_R) = -\frac{L_{II} \Delta \tau}{v} \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^R d_{II,i}(\zeta, T_R - \tau_r) X_i(\tau_r). \quad (5.17)$$

### 5.3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

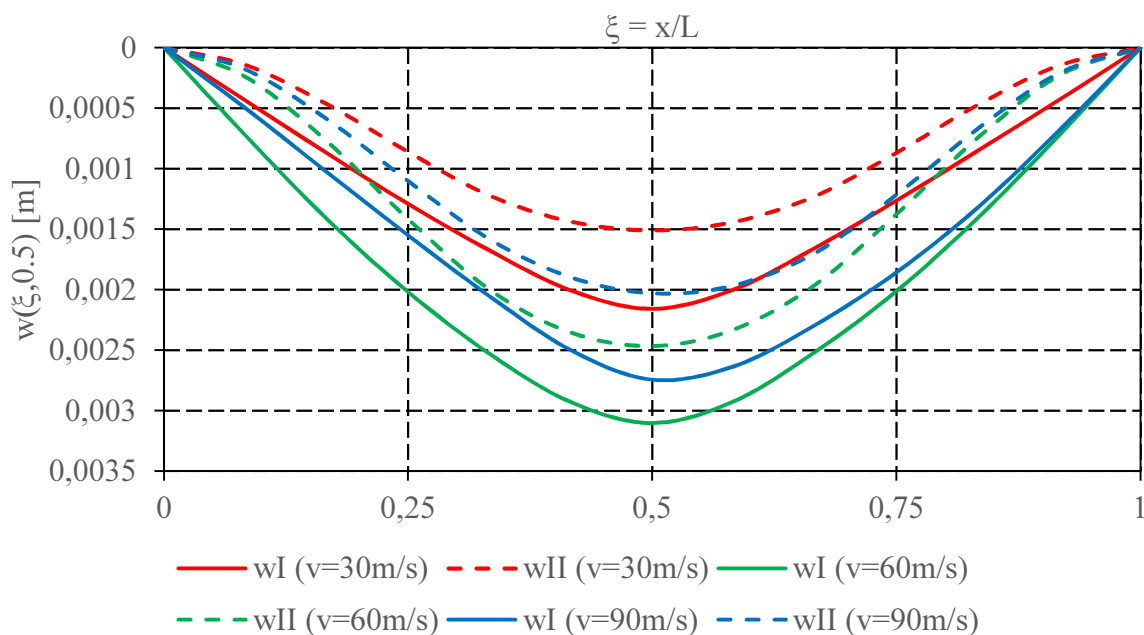
Rozpatrzmy układ dwóch belek o jednakowej rozpiętości  $L = 12$  m, sztywności giętej  $EI = 4 \cdot 10^6$  Nm<sup>2</sup> oraz masie  $m = 25$  kg/m sprzężonych ze sobą więziami sprężystymi o jednakowej sztywności  $s_1 = s_2 = 1 \cdot 10^6$  N/m umiejscowionymi w 1/3 oraz 2/3 rozpiętości belek (rys. 5.4). Górna belka jest swobodnie podparta na obu końcach, podczas, gdy belka dolna jest sztywno utwierdzona. Układ poddany jest działaniu siły skupionej  $P = 1000$  N poruszającej się po belce górnej ze stałą prędkością  $v$ . W obliczeniach przeanalizowano dynamiczne ugięcia punktów „a” i „b” umieszczonych w środku rozpiętości obu belek (rys. 5.6) oraz linie ugięcia obu belek w chwili  $T = 0,5$  odpowiadającej położeniu siły  $P$  w środku rozpiętości belki górnej. W obliczeniach rozpatrzono 3 różne prędkości ruchu siły, mianowicie  $v = 30$  m/s,  $v = 60$  m/s oraz  $v = 90$  m/s. W modelu numerycznym przyjęto podział czasu przejazdu siły po belce na  $N = 200$  równych segmentów czasowych.



Rys. 5.4. Dwie sprzężone belki poddane działaniu ruchomej siły skupionej



Rys. 5.5. Ugięcie dynamiczne środka belki I i II w zależności od prędkości ruchu siły

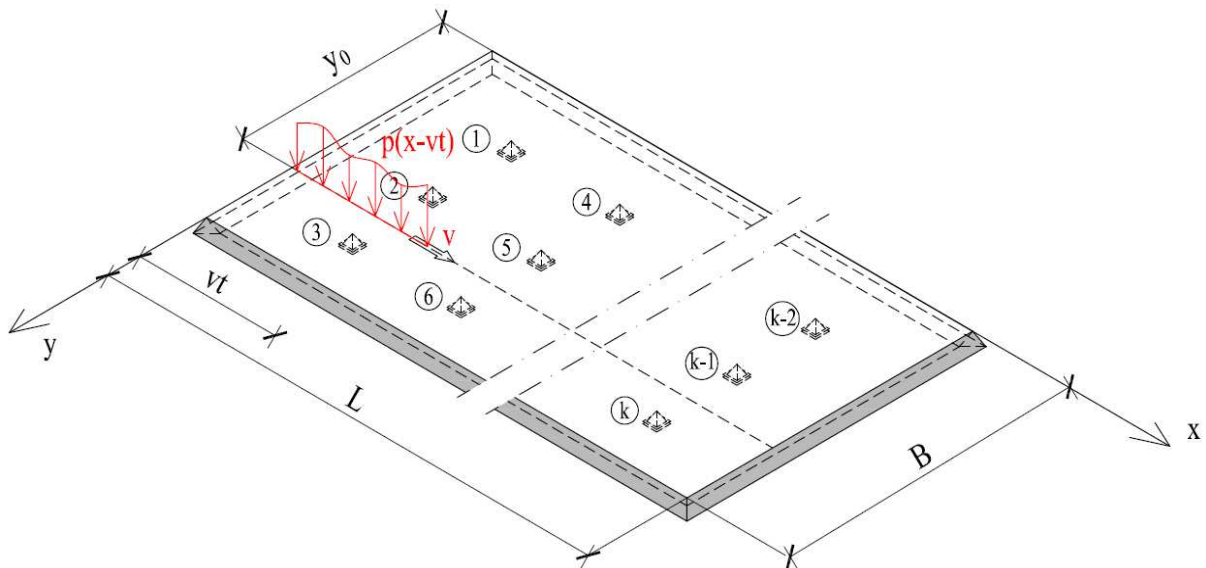
Rys. 5.6. Oś odkształcona belki I i II w chwili  $T = 0.5$  w zależności od prędkości ruchu siły

## 6. DYNAMIKA CIENKICH PŁYT IZOTROPOWYCH

W tym rozdziale skupimy się na dynamice cienkiej prostokątnej płyty izotropowej o wymiarach  $B \times L$  i grubości  $h$ , wykonanej z materiału o gęstości  $\rho$ , charakteryzującego się modułem Younga  $E$  oraz współczynnikiem Poissona  $\nu$ . Sztywność giętą takiej płyty wyrażona jest wzorem:

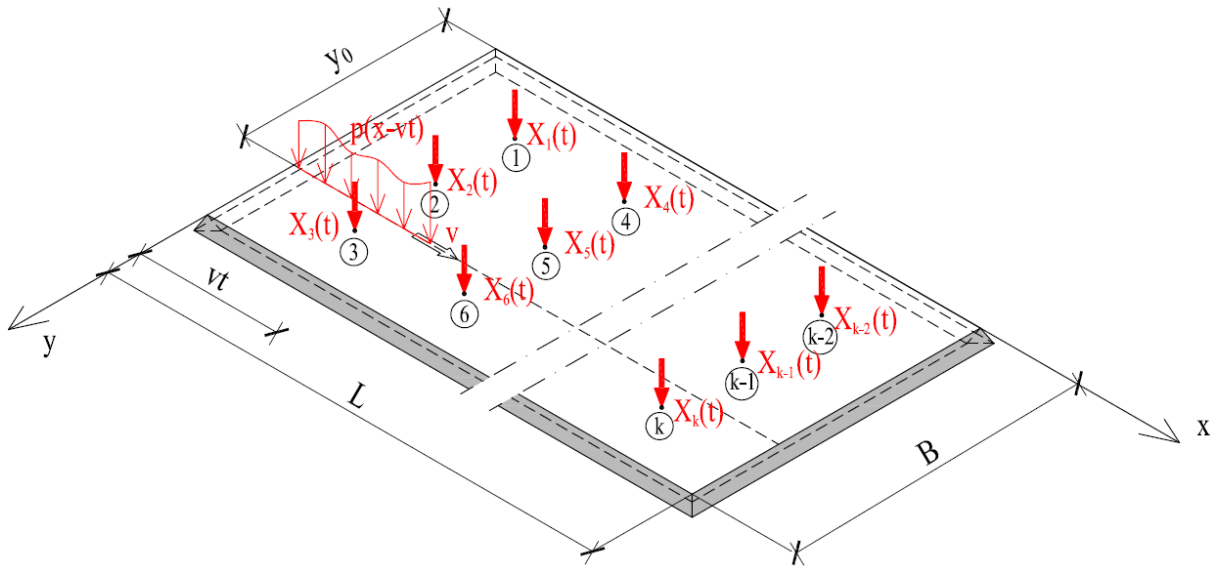
$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (6.1)$$

natomiast masa rozłożona na powierzchni płyty jest równa  $\mu = \rho h$ . Płyta jest swobodnie podparta na wszystkich czterech krawędziach oraz posiada liczbę  $k$  punktowych podpór pośrednich rozmieszczonych w dowolnych punktach swojego obszaru. Omawiany ustrój poddany jest działaniu obciążenia  $p(x - vt)$ , skierowanego prostopadłe do płaszczyzny płyty oraz poruszającego się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x$  (rys.6.1).



Rys. 6.1. Cienka płyta izotropowa podparta swobodnie na swoich krawędziach oraz punktowo w swoim obszarze, poddana działaniu obciążenia ruchomego

Metodyka rozwiązania omawianego problemu będzie analogiczna do procedury zaproponowanej w rozdziałach 4. i 5., mianowicie po myślowym usunięciu punktowych podpór pośrednich i zastąpieniu ich siłami  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , ...  $X_k(t)$  będziemy w stanie sprowadzić analizowane zagadnienie do płyty swobodnie podpartej poddanej działaniu zadanego obciążenia ruchomego oraz  $k$  nadliczbowych sił skupionych zmiennych w czasie (rys.6.2).



Rys. 6.2. Cienka płyta izotropowa podparta swobodnie na swoich krawędziach poddana działaniu obciążenia ruchomego oraz sił w usuniętych więziach nadliczbowych

Opisany powyżej zabieg pozwoli nam przedstawić drgania płyty podpartej punktowo jako superpozycję drgań pochodzących od zadanego obciążenia ruchomego oraz od każdej z sił w usuniętych podporach pośrednich, podobnie jak to miało miejsce w przypadku belek w rozdziale 4 i 5. Oznacza to, że kolejnym krokiem powinno być uzyskanie rozwiązań przypadków płyty swobodnie podpartej poddanej działaniu obciążenia ruchomego oraz zmiennej w czasie siły skupionej przyłożonej w miejscu usuniętej podpory punktowej. W przypadku obciążenia ruchomego skupimy się na ruchomej sile skupionej oraz ruchomym obciążeniu równomiernie rozłożonym.

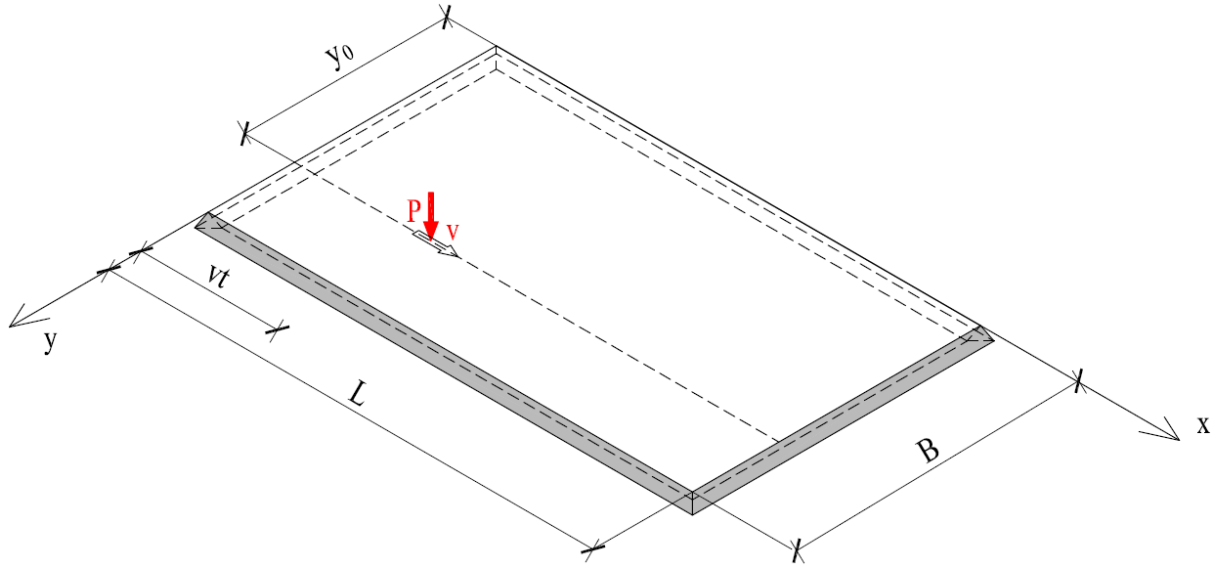
### 6.1. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA PODDANA DZIAŁANIU RUCHOMEJ SIŁY SKUPIONEJ

Rozważmy prostokątną cienką płytę izotropową, swobodnie podpartą na wszystkich krawędziach, poddaną działaniu siły o stałej wartości  $P$  poruszającej się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x$  (rys. 6.2). Równanie ruchu dla opisywanego przypadku ma postać:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = P \delta(x - vt) \delta(y - y_0), \quad (6.2)$$

gdzie  $D$  oznacza sztywność giętną płyty wyrażoną wzorem (6.1),  $c$  wyraża stałą tłumienia natomiast  $\mu$  jest masą płyty rozłożoną na powierzchni.





Rys. 6.3. Cienka płyta izotropowa podparta swobodnie na swoich krawędziach poddana działaniu ruchomej siły skupionej

Po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych:

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad \zeta = \frac{y}{B}; \quad T = \frac{vt}{L}, \quad (6.3)$$

równanie ruchu opisujące drgania płyty  $w = w(\xi, \zeta, T)$  przyjmie postać:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{L^4 \partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{B^2 L^2 \partial \xi^2 \partial \zeta^2} + \frac{\partial^4 w}{B^4 \partial \zeta^4} \right] + \frac{cv}{L} \dot{w} + \frac{\mu v^2}{L^2} \ddot{w} = \frac{P}{LB} \delta(\xi - T) \delta(\zeta - \zeta_0), \quad (6.4)$$

a po wprowadzeniu parametrów  $\psi = \frac{L^2}{B^2}$ ,  $c_0 = \frac{cvL^3}{D}$ ,  $\sigma^2 = \frac{\mu v^2 L^2}{D}$ ,  $P_0 = \frac{PL^3}{DB}$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\psi \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + \psi^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} + c_0 \dot{w} + \sigma^2 \ddot{w} = P_0 \delta(\xi - T) \delta(\zeta - \zeta_0). \quad (6.5)$$

Rozwiązania równania (6.5) poszukiwać będziemy w postaci:

$$w = w(\xi, \zeta, T) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(T) \sin m\pi \xi \sin n\pi \zeta. \quad (6.6)$$

Po podstawieniu wyrażenia (6.6) do równania (6.5) i wykorzystaniu metody ortogonalności uzyskamy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\ddot{Y}_{mn}(T) + 2\alpha \dot{Y}_{mn}(T) + \omega_{mn}^2 Y_{mn}(T) = \frac{4P_0}{\sigma^2} \sin m\pi T \sin n\pi \zeta_0, \quad (6.7)$$

gdzie:

$$2\alpha = \frac{c_0}{\sigma^2} = \frac{cL}{\mu v}, \quad (6.8)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\sigma^2} [(m\pi)^4 + 2\psi(m\pi)^2(n\pi)^2 + \psi^2(n\pi)^4]. \quad (6.9)$$

Rozwiązania równania (6.7) poszukiwać będziemy w postaci:

$$Y_{mn}(T) = Y_{mn,s}(T) + Y_{mn,o}(T), \quad (6.10)$$

gdzie wyrażenia  $Y_{mn,s}(T)$  oraz  $Y_{mn,o}(T)$  będące kolejno całką szczególną oraz ogólną równania (6.7) mają postać:

$$Y_{mn,s}(T) = \frac{4P_0[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]\sin m\pi T \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2\{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 + 4\alpha^2(m\pi)^2\}} - \frac{8P_0\alpha(m\pi)\cos m\pi T \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2\{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 + 4\alpha^2(m\pi)^2\}}, \quad (6.11)$$

$$Y_{mn,o}(T) = e^{-\alpha T} \left[ \frac{8P_0\alpha^2(m\pi)\sin \Omega_{mn} T \sin n\pi \zeta_0}{\Omega_{mn}\sigma^2\{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 + 4\alpha^2(m\pi)^2\}} - \frac{4P_0(m\pi)[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]\sin \Omega_{mn} T \sin n\pi \zeta_0}{\Omega_{mn}\sigma^2\{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 + 4\alpha^2(m\pi)^2\}} + \frac{8P_0\alpha(m\pi)\cos \Omega_{mn} T \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2\{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 + 4\alpha^2(m\pi)^2\}} \right], \quad (6.12)$$

a w przypadku braku tłumienia:

$$Y_{mn,s}(T) = \frac{4P_0[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]\sin m\pi T \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2}, \quad (6.13)$$

$$Y_{mn,o}(T) = -\frac{4P_0(m\pi)[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]\sin \omega_{mn} T \sin n\pi \zeta_0}{\omega_{mn}\sigma^2[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2}. \quad (6.14)$$

## 6.2. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA OBCIĄŻONA RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM ROZŁOŻONYM

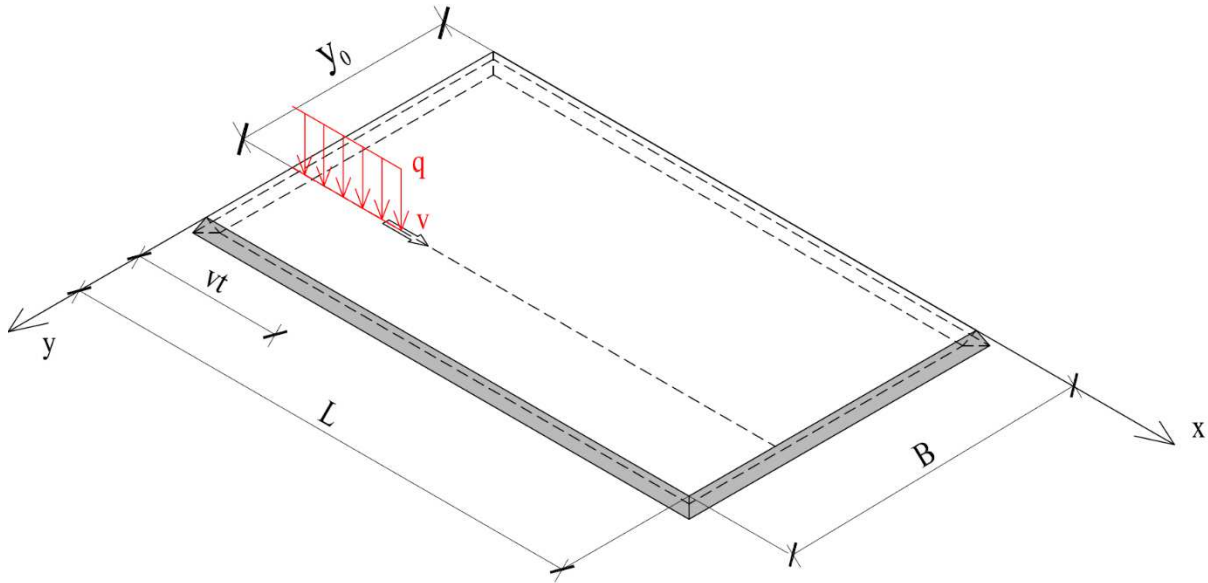
Jako kolejny przypadek rozpatrzmy płytę opisaną parametrami jak punkcie poprzednim, poddaną działaniu liniowego obciążenia równomiernie rozłożonego o natężeniu  $q$  poruszającego się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $y$  (rys. 6.4). Równanie ruchu w tym wypadku ma następującą postać:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = qH(vt - x)\delta(y - y_0), \quad (6.15)$$

a po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych (6.3):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\psi \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + \psi^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} + c_0 \dot{w} + \sigma^2 \ddot{w} = q_0 H(T - \xi) \delta(\zeta - \zeta_0), \quad (6.16)$$

gdzie  $q_0 = \frac{qL^4}{DB}$ , natomiast  $H(T - \xi)$  oznacza funkcję Heaviside'a.



Rys. 6.4. Cienka płyta izotropowa podparta swobodnie na swoich krawędziach poddana działaniu ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego

Przyjmując rozwiązanie w postaci (6.6) i podstawiając je do równania (6.16), a następnie stosując metodę ortogonalności otrzymujemy:

$$\ddot{Y}_{mn}(T) + 2\alpha \dot{Y}_{mn}(T) + \omega_{mn}^2 Y_{mn}(T) = \frac{4q_0 \sin n\pi \zeta_0 (1 - \cos m\pi T)}{\sigma^2 m\pi}. \quad (6.17)$$

Całka szczególna oraz całka ogólna powyższego równania mają postać:

$$Y_{mn,s}(T) = \frac{4q_0 \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2 \omega_{mn}^2 m\pi} - \frac{8q_0 \alpha m\pi \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2 m\pi \{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 - 4\alpha^2 (m\pi)^2\}} - \frac{4q_0 [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2] \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2 m\pi \{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 - 4\alpha^2 (m\pi)^2\}}, \quad (6.18)$$

$$Y_{mn,0}(T) = e^{-\alpha T} \left[ -\frac{4q_0 \alpha \sin n\pi \zeta_0 \sin \Omega_{mn} T}{\sigma^2 \Omega_{mn} \omega_{mn}^2 m\pi} + \frac{4q_0 \alpha [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2] \sin n\pi \zeta_0 \sin \Omega_{mn} T}{\sigma^2 \Omega_{mn} m\pi \{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 - 4\alpha^2 (m\pi)^2\}} + \frac{8q_0 \alpha (m\pi)^2 \sin n\pi \zeta_0 \sin \Omega_{mn} T}{\sigma^2 \Omega_{mn} m\pi \{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 - 4\alpha^2 (m\pi)^2\}} - \frac{4q_0 \sin n\pi \zeta_0 \cos \Omega_{mn} T}{\sigma^2 \omega_{mn}^2 m\pi} + \frac{4q_0 [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2] \sin n\pi \zeta_0 \cos \Omega_{mn} T}{\sigma^2 m\pi \{[\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2 - 4\alpha^2 (m\pi)^2\}} \right], \quad (6.19)$$

a w przypadku drgań nietłumionych:

$$Y_{mn,s}(T) = \frac{4q_0 \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2 \omega_{mn}^2 m\pi} - \frac{4q_0 [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2] \sin n\pi \zeta_0}{\sigma^2 m\pi [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2}, \quad (6.20)$$

$$Y_{mn,0}(T) = -\frac{4q_0 \sin n\pi \zeta_0 \cos \omega_{mn} T}{\sigma^2 \omega_{mn}^2 m\pi} + \frac{4q_0 [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2] \sin n\pi \zeta_0 \cos \Omega_{mn} T}{\sigma^2 m\pi [\omega_{mn}^2 - (m\pi)^2]^2}, \quad (6.21)$$

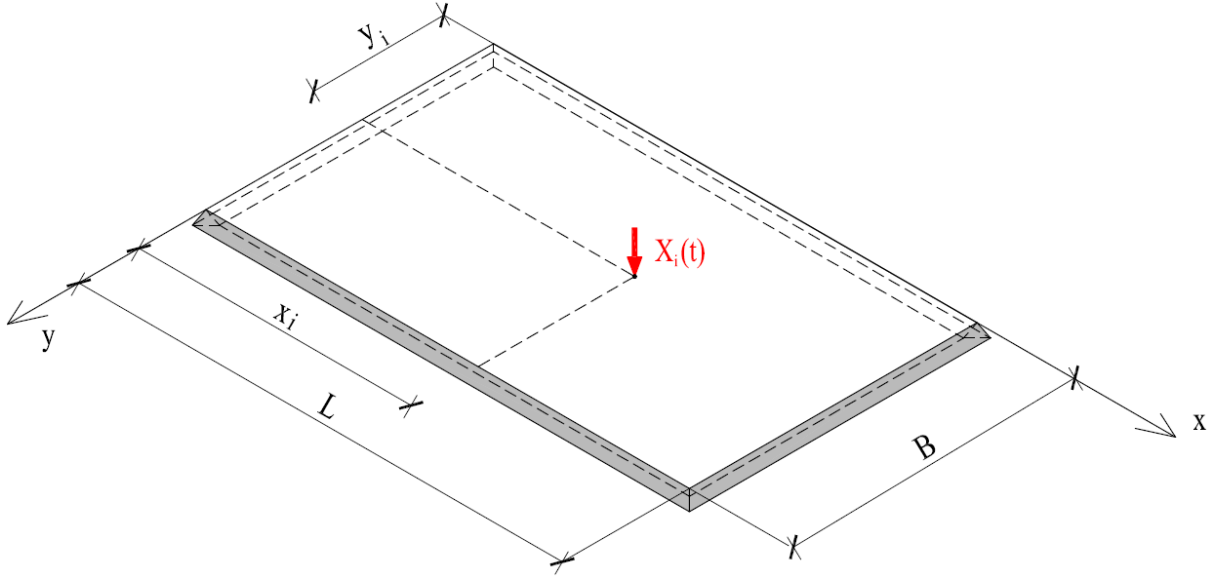
### 6.3. PŁYTA SWOBODNIE PODPARTA OBCIĄŻONA ZMIENNĄ W CZASIE SIŁĄ SKUPIONĄ

Rozpatrzmy przypadek płyty swobodnie podpartej o charakterystykach geometryczno-materiałowych jak w punktach poprzednich poddanej działaniu zmiennej w czasie siły skupionej  $X_i(t)$  przyłożonej w punkcie o współrzędnych  $(x_i, y_i)$  odpowiadających położeniu usuniętej podpory punktowej (rys. 6.5). Siła  $X_i(t)$  odpowiadać będzie reakcji pionowej w tej podporze. Wyprowadźmy równanie ruchu dla omawianego zagadnienia:

$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = X_i(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (6.22)$$

które w bazie współrzędnych bezwymiarowych (6.3) przyjmie postać:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\psi \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + \psi^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} + c_0 \dot{w} + \sigma^2 \ddot{w} = \frac{X_i(T) L^3}{DB} \delta(\xi - \xi_i) \delta(\zeta - \zeta_i). \quad (6.23)$$



Rys. 6.5. Cienka płyta izotropowa podparta swobodnie na swoich krawędziach poddana działaniu zmiennej w czasie siły skupionej

Rozwiązanie równania (6.23) przyjmujemy w postaci (6.6) i podobnie jak w omawianych poprzednio przypadkach stosujemy metodę ortogonalizacji, w wyniku czego otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\ddot{Y}_{mn}(T) + 2\alpha\dot{Y}_{mn}(T) + \omega_{mn}^2 Y_{mn}(T) = \frac{4L\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\zeta_i X_i(T)}{\mu v^2 B}. \quad (6.24)$$

Postępując podobnie jak w przypadku belek wieloprzęsłowych, spróbujemy przedstawić rozwiązanie równania (6.24) w postaci spłotu:

$$Y_{mn}(T) = \frac{4L\sin m\pi\xi_i \sin n\pi\zeta_i}{\mu v^2 B} \int_0^T h_{mn}(T - \tau) X_i(\tau) d\tau, \quad (6.25)$$

gdzie  $h_{mn}(T)$  jest impulsową funkcją przejścia, otrzymaną z równania jednorodnego:

$$\ddot{h}_{mn}(T) + 2\alpha\dot{h}_{mn}(T) + \omega_{mn}^2 h_{mn}(T) = 0 \quad (6.26)$$

przy warunkach początkowych:

$$h_{mn}(0) = 0; \quad \dot{h}_{mn}(0) = 1 \quad (6.27)$$

i ma postać:

$$h_{mn}(T) = e^{-\alpha T} \frac{1}{\Omega_{mn}} \sin \Omega_{mn} T \quad (6.28)$$

gdzie:  $\Omega_n = \sqrt{\omega_{mn}^2 - \alpha^2}$ , lub w przypadku braku tłumienia ( $\alpha = 0$ ):

$$h_{mn}(T) = \frac{1}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} T. \quad (6.29)$$

Ostatecznie drgania płyty swobodnie podpartej pochodzące od zmiennej w czasie siły skupionej  $X_i(T)$  działającej w punkcie o współrzędnych bezwymiarowych  $(\xi_i, \zeta_i)$  można przedstawić następująco:

$$w(\xi, \zeta, T) = \frac{4L}{\mu v^2 B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \Omega_{mn} T \sin m \pi \xi \sin n \pi \zeta \sin m \pi \xi_i \sin n \pi \zeta_i}{\Omega_{mn}} \cdot \int_0^T e^{-\alpha \tau} \sin \Omega_{mn} (T - \tau) X_i(T) d\tau, \quad (6.30)$$

a w przypadku drgań nietłumionych:

$$w(\xi, \zeta, T) = \frac{4L}{\mu v^2 B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{mn} T \sin m \pi \xi \sin n \pi \zeta \sin m \pi \xi_i \sin n \pi \zeta_i}{\omega_{mn}} \cdot \int_0^T \sin \omega_{mn} (T - \tau) X_i(T) d\tau, \quad (6.31)$$

lub w prostszej postaci:

$$w(\xi, \zeta, T) = \frac{L}{v} \int_0^T d_i(\xi, \zeta, T - \tau) X_i(T) d\tau, \quad (6.32)$$

gdzie wyrażenie  $d_i(\xi, \zeta, T)$  w przypadku drgań tłumionych i nietłumionych ma odpowiednio postać:

$$d_i(\xi, \zeta, T) = \frac{4}{\mu v B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha T} \sin \Omega_{mn} T \sin m \pi \xi \sin n \pi \zeta \sin m \pi \xi_i \sin n \pi \zeta_i}{\Omega_{mn}}, \quad (6.33)$$

$$d_i(\xi, \zeta, T) = \frac{4}{\mu v B} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_{mn} T \sin m \pi \xi \sin n \pi \zeta \sin m \pi \xi_i \sin n \pi \zeta_i}{\omega_{mn}}. \quad (6.34)$$

#### 6.4. DRGANIA PŁYTY SWOBODNIE PODPARTEJ Z PUNKTOWYMI PODPORAMI POŚREDNIMI

Wykorzystajmy uzyskane w punktach poprzednich rozwiązania aby przedstawić drgania płyty z punktowymi podporami pośrednimi (rys.6.1) jako superpozycję drgań płyty swobodnie podpartej wynikających z zadanego obciążenia ruchomego oraz od sił skupionych odpowiadających reakcjom w usuniętych więziach punktowych (rys.6.2). Trzymając się założenia, że podpory punktowe są nieodkształcalne (ugięcia w punktach podparcia pośredniego są równe zero) budujemy układ równań zgodności przemieszczeń:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k w^{Xi}(\xi_1, \zeta_1, T) + w^P(\xi_1, \zeta_1, T) = \Delta_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^k w^{Xi}(\xi_2, \zeta_2, T) + w^P(\xi_2, \zeta_2, T) = \Delta_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k w^{Xi}(\xi_k, \zeta_k, T) + w^P(\xi_k, \zeta_k, T) = \Delta_k = 0, \end{cases} \quad (6.35)$$

gdzie  $w^P(\xi, \zeta, T)$  oznacza drgania płyty swobodnie podpartej wynikające z zadanego ruchomego obciążenia, natomiast  $w^{Xi}(\xi, \zeta, T)$  oznacza drgania wywołane punktową siłą  $X_i(T)$  działającą w miejscu  $i$ -tej usuniętej podpory punktowej.

Wprowadzając do układu równań (6.35) rozwiązania uzyskane w punkcie 6.3 uzyskujemy układ równań całkowych Voltery pierwszego rodzaju, gdzie, analogicznie jak w przypadku belek wieloprzęsłowych opisywanych w punkcie 4, niewiadomymi  $X_i(T)$  są funkcje reakcji podporowych w usuniętych więziach punktowych. Postać układu równań całkowych Voltery jest następująca:

$$\begin{cases} \frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T d_{1j}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + w^P(\xi_1, \zeta_1, T) = \Delta_1 = 0 \\ \frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T d_{2j}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + w^P(\xi_2, \zeta_2, T) = \Delta_2 = 0 \\ \vdots \\ \frac{L}{v} \sum_{j=1}^k \int_0^T d_{kj}(T - \tau) X_j(\tau) d\tau + w^P(\xi_k, \zeta_k, T) = \Delta_k = 0, \end{cases} \quad (6.36)$$

gdzie  $d_{ij}(T) = d_i(\xi_j, \zeta_j, T)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , zgodnie z wzorami (6.33) i (6.34).

Jeżeli założymy, że płyta poddana jest działaniu obciążenia statycznego, powyższy układ równań przyjmie postać:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k d_{1j,stat} X_j + w_{stat}^p(\xi_1, \zeta_1, T) = \Delta_1 = 0 \\ \sum_{j=1}^k d_{2j,stat} X_j + w_{stat}^p(\xi_2, \zeta_2, T) = \Delta_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k d_{kj,stat} X_j + w_{stat}^p(\xi_k, \zeta_k, T) = \Delta_k = 0, \end{cases} \quad (6.37)$$

gdzie:

$$d_{ij,stat} = \frac{4L^3}{DB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m\pi \xi_i \sin^2 n\pi \zeta_i}{[(m\pi)^2 + \psi(n\pi)^2]^2}, \quad (6.38)$$

natomiast wyraz wolny  $w_{stat}^p(\xi_i, \zeta_i, T)$  oznaczający ugięcie statyczne płyty w punkcie określonym współrzędnymi  $(\xi_i, \zeta_i)$  przypadku siły skupionej  $P$  przyłożonej w punkcie o współrzędnych  $(T, \zeta_0)$  określony jest wzorem:

$$w_{stat}^p(\xi_i, \zeta_i, T) = 4P_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi T \sin n\pi \zeta_0 \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \zeta_i}{[(m\pi)^2 + \psi(n\pi)^2]^2}, \quad (6.39)$$

a w przypadku obciążenia  $q$  rozłożonego wzdłuż osi "x" na odcinku  $T$  patrząc krawędzi płyty o współrzędnej  $x = 0$ :

$$w_{stat}^p(\xi_i, \zeta_i, T) = 4q_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos m\pi T) \sin n\pi \zeta_0 \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \zeta_i}{[(m\pi)^2 + \psi(n\pi)^2]^2} \quad (6.40)$$

Ugięcie statyczne płyty swobodnie podpartej z pośrednimi podporami punktowymi obciążonej siłą  $P$  przyłożoną w punkcie o współrzędnych  $(T, \zeta_0)$  można wyrazić wzorem:

$$w_{stat}(\xi, \zeta, T) = \frac{4L^3}{DB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{P \sin m\pi T \sin n\pi \zeta_0}{\sum_{i=1}^k X_i \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \zeta_i} \right] \frac{\sin m\pi \xi \sin n\pi \zeta}{[(m\pi)^2 + \psi(n\pi)^2]^2}, \quad (6.41)$$

natomiast ugięcie statyczne płyty poddanej działaniu obciążenia  $q$  rozłożonego na długości  $T$  wzdłuż osi "x" patrząc od krawędzi  $x = 0$ :

$$w_{stat}(\xi, \zeta, T) = \frac{4L^3}{DB} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{qL(1 - \cos m\pi T) \sin n\pi \zeta_0}{\sum_{i=1}^k X_i \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \zeta_i} \right] \frac{\sin m\pi \xi \sin n\pi \zeta}{[(m\pi)^2 + \psi(n\pi)^2]^2}. \quad (6.42)$$



Współczynnik dynamiczny  $v(\xi, \zeta, T)$  określimy podobnie jak w przypadku belek jako stosunek ugięcia dynamicznego  $w_d(\xi, \zeta, T)$  do odpowiadającego mu maksymalnego ugięcia statycznego  $w_{stat}(\xi, \zeta, T)$ :

$$v(\xi, T) = \frac{w_d(\xi, \zeta, T)}{\max[w_{stat}(\xi, \zeta, T)]} \quad (6.43)$$

Warto zwrócić uwagę, że jeżeli spełniona jest równość  $\omega_{mn}^2 = (m\pi)^2$  to wyrazy  $Y_{mn,s}(T)$  oraz  $Y_{mn,0}(T)$  określone wzorami (6.11)-(6.14) oraz (6.18)-(6.21), zmierzają będą do nieskończoności. Stąd wzór pierwszą prędkość rezonansową można wyprowadzić z wyrażenia określającego wartość  $\omega_{11}$ :

$$\omega_{11} = \frac{1}{\sigma} [\pi^2(1 + \psi)], \quad (6.44)$$

co daje nam:

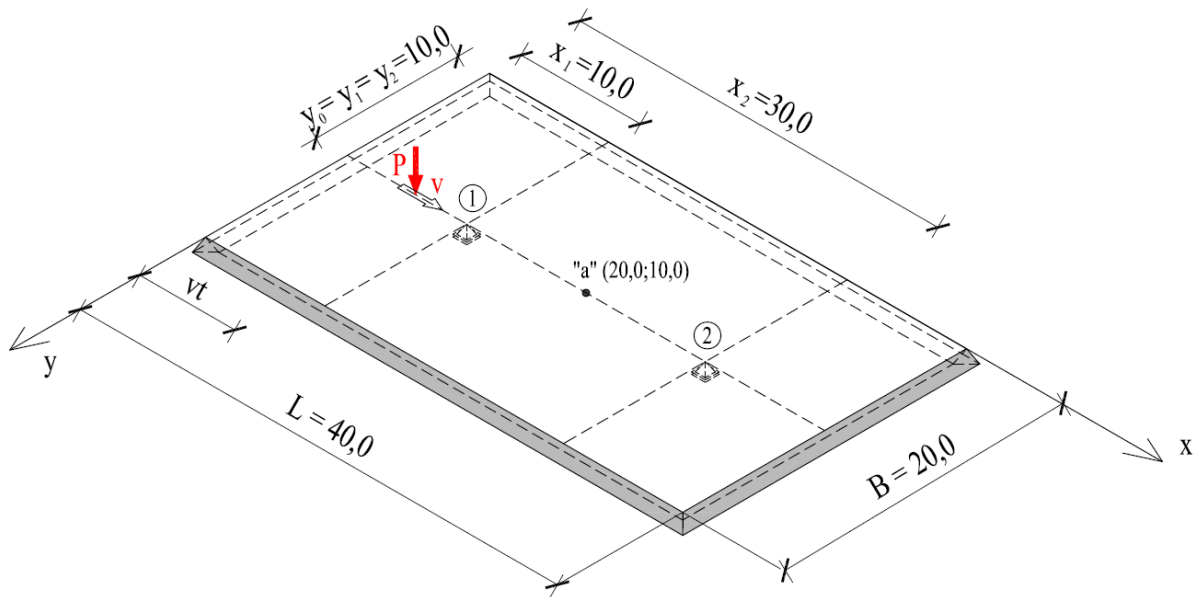
$$v_{cr,1} = \frac{\pi(1 + \psi)}{L} \sqrt{\frac{D}{\mu}} \quad (6.45)$$

Podobnie jak w przypadku belek, możemy wyrazić prędkość ruchu obciążenia po płycie za pomocą parametru  $\eta$  określającego stosunek prędkości ruchu obciążenia do pierwszej prędkości rezonansowej:

$$\eta = \frac{v}{v_{cr,1}} = \frac{vL}{\pi(1 + \psi)} \sqrt{\frac{\mu}{D}} \quad (6.46)$$

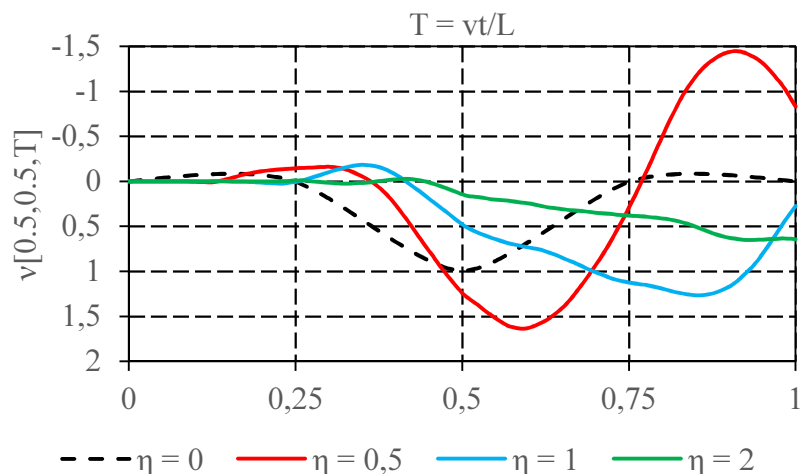
### 6.5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Rozpatrzmy cieką płytę izotropową o kształcie prostokąta o wymiarach  $L = 40,0$  m i  $B = 20,0$  m. Grubość płyty wynosi  $h = 0,4$  m, masa przypadająca na jednostkę powierzchni  $\mu = 960$  kg/m<sup>2</sup> natomiast parametry materiału, z którego jest wykonana są równe odpowiednio  $E = 30$  GPa i  $\nu = 0,2$ . Płyta podparta jest swobodnie na całym swoim obwodzie oraz punktowo za pośrednictwem 2 podpór umiejscowionych w punktach o współrzędnych  $(x_1 = 10,0; y_1 = 10,0)$  oraz  $(x_2 = 30,0; y_2 = 10,0)$ . Płyta poddana jest działaniu siły skupionej o wartości  $P = 100$  kN poruszającej się wzdłuż osi  $x$ . Odległość toru ruchu siły od dłuższej krawędzi płyty wynosi  $y_0 = 10,0$  m (rys. 6.6).

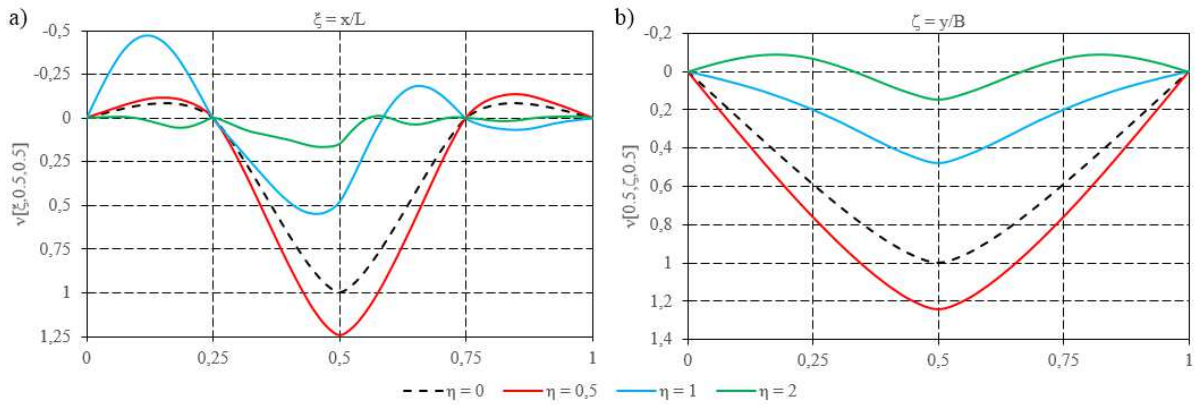


Rys. 6.6. Cienka płyta izotropowa z dwoma podporami punktowymi obciążona ruchomą siłą skupioną

W obliczeniach przeanalizowano ugięcie dynamiczne punktu „a” usytuowanego w środku płyty względem czasu przejazdu obciążenia oraz ugięcie globalne płyty w osiach o współrzędnych bezwymiarowych  $\xi = 0,5$  oraz  $\zeta = 0,5$  w chwili  $T = 0,5$  odpowiadającej położeniu siły w punkcie „a”. Rozpatrywano 4 różne prędkości ruchu siły opisane parametrem  $\eta$ , mianowicie  $\eta = 0$  (odpowiadające przypadkowi statycznemu),  $\eta = 0,5$ ,  $\eta = 1$  oraz  $\eta = 2$ . Wyniki przedstawiono na rysunkach 6.7-6.9.

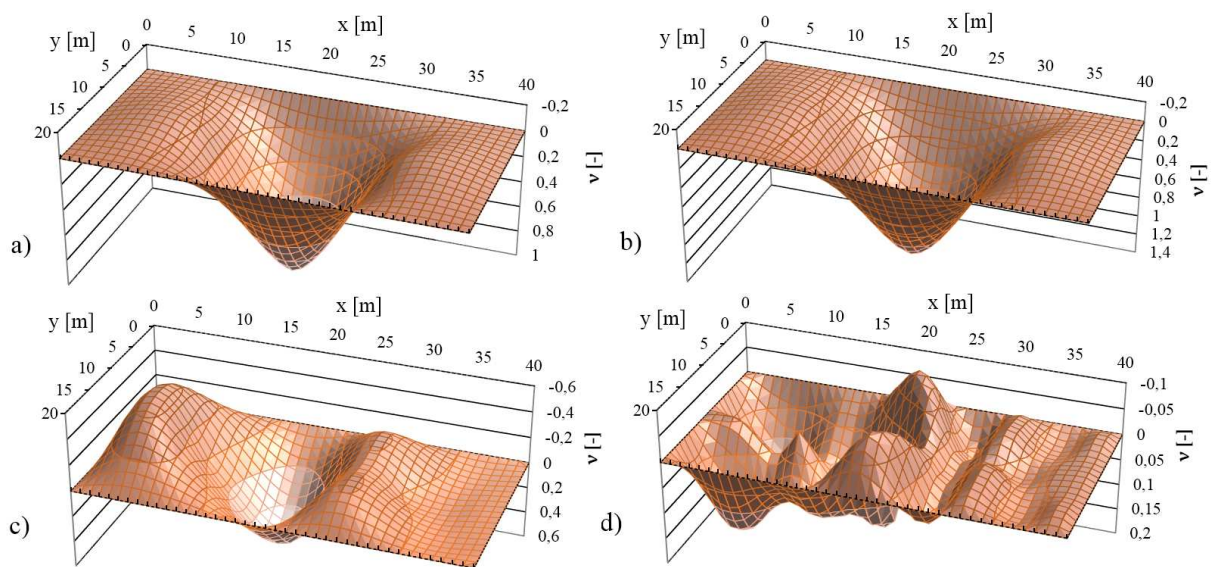


Rys. 6.7. Ugięcie dynamiczne punktu „a” w zależności od czasu przejazdu obciążenia po płycie przy różnych prędkościach



Rys. 6.8. Linia deformacji płyty w chwili, gdy siła znajduje się w punkcie „a” ( $T = 0,5$ ):

a) w osi  $\zeta = 0,5$ ; b) w osi  $\xi = 0,5$



Rys. 6.9. Powierzchnia odkształcona płyty w chwili,

gdy siła znajduje się w punkcie „a” ( $T = 0,5$ ):

a)  $\eta = 0$ ; b)  $\eta = 0,5$ ; c)  $\eta = 1$ ; d)  $\eta = 2$ .

## 7. UKŁADY DYSKRETNE

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się analizą dynamiczną układów o ciągłym rozkładzie masy, charakteryzujących się nieskończoną liczbą stopni swobody. Takie ujęcie problemu prowadzi do uzyskania najdokładniejszych wyników i najlepiej opisuje procesy jakie zachodzą w rozpatrywanym ustroju konstrukcyjnym. Z drugiej jednak strony, uzyskanie pełnego analitycznego rozwiązania dla układu ciągłego jest często bardzo pracochłonne, a w niektórych przypadkach nawet niemożliwe, stąd uzasadnione staje się zastępowanie układów ciągłych układami o skończonej liczbie stopni swobody. W zagadnieniach związanych z dynamiką budowli często w miejsce układu o ciągłym rozkładzie masy wprowadzamy odpowiadający mu układ dyskretny, w którym masę rozłożoną zastępujemy pewną ilością punktów masowych o jednym stopniu swobody. Innymi metodami fizycznej dyskretyzacji modelu ciągłego są metoda różnic skończonych oraz metoda elementów skończonych. Popularność oraz szeroki zakres stosowania wyżej wymienionych metod pokazuje, że właściwie skonstruowany model dyskretny o odpowiednio gęstej siatce dyskretyzacyjnej pozwala uzyskać wyniki nie odbiegające od wyników otrzymanych z analizy układów ciągłych. W kolejnych podrozdziałach skupimy się na wykorzystaniu metody różnic skończonych oraz metody granulacji mas zastosowanych w wieloprzęsłowych belkach oraz punktowo podpartych cienkich płytach izotropowych.

### 7.1. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Metoda różnic skończonych (MRS) należy do najstarszych metod numerycznych służących rozwiązywaniu zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi, takimi jak omawiany problem układów konstrukcyjnych poddanych działaniu obciążenia ruchomego. Idea metody polega na zastosowaniu odpowiednich ilorazów różnicowych pozwalających na zastąpieniu równań różniczkowych równaniami algebraicznymi opisującymi dynamiczne zachowanie układu w przyjętej bazie współrzędnych uogólnionych przypisanych do węzłów siatki dyskretyzacyjnej. Zaletą tej metody jest jej prostota oraz możliwość zastosowania zarówno w analizie układów belkowych jak i płytowych, czym zajmiemy się w dalszej części pracy.

## 7.1.1. MRS W DYNAMICE BELEK WIELOPRZĘSŁOWYCH

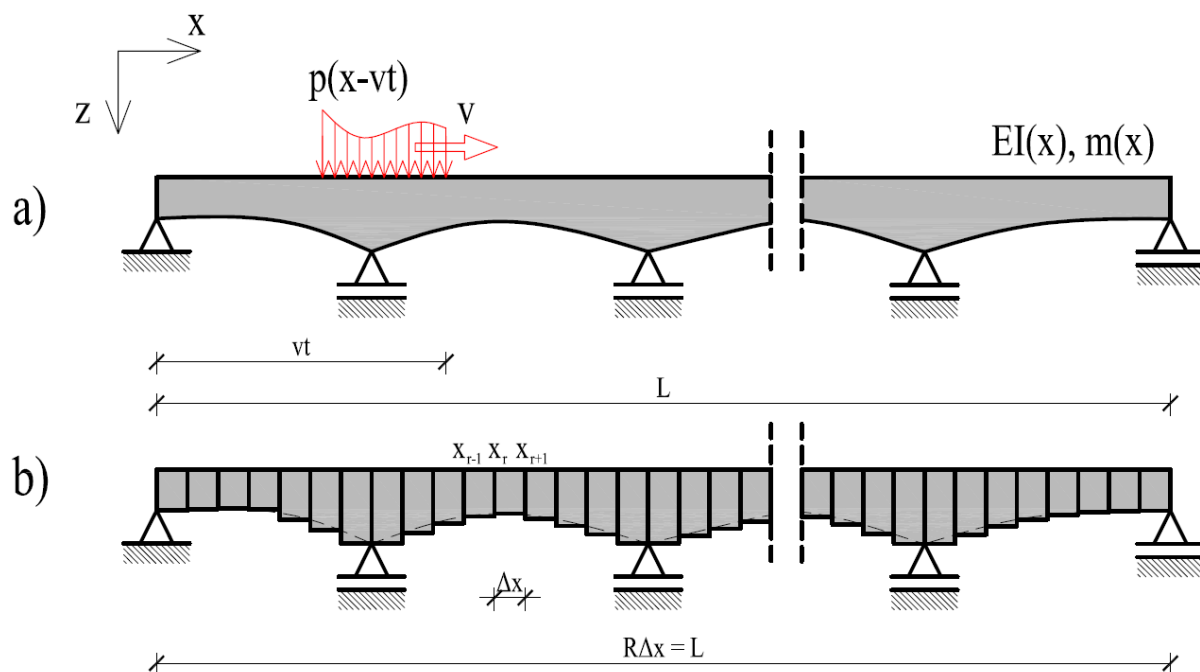
Rozpatrzmy belkę wieloprzęsłową o skończonej rozpiętości  $L$  między podporami skrajnymi, charakteryzującą się zmienną sztywnością giętną, poddaną działaniu obciążenia poruszającego się ze stałą prędkością  $v$  (rys. 7.1a). Równanie ruchu dla analizowanego przypadku będzie miało postać:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + c(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x - vt), \quad (7.1)$$

gdzie  $D(x) = EI(x)$ , a w przypadku belki pryzmatycznej (gdy  $D(x) = D = EI = \text{const.}$ ):

$$D \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = p(x - vt). \quad (7.2)$$

Zastąpmy model ciągły belki wieloprzęsłowej modelem dyskretnym metody różnic skończonych uzyskany przez podział belki na skończoną liczbę  $R$  segmentów o jednakowej długości  $\Delta x = L/R$  (rys. 7.1b). Przyjmijmy, że w każdym z węzłów siatki dyskretyzacyjnej o współrzędnej  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, R$ ) belka charakteryzuje się sztywnością  $D_r$ , masą  $m_r$  oraz stałą tłumienia  $c_r$ .



Rys. 7.1. Wieloprzęsłowa belka o zmiennej sztywności poddana działaniu obciążenia ruchomego: a) model ciągły; b) model dyskretny MRS

Stosując procedurę metody różnic skończonych dążymy do zastąpienia różniczkowania po współrzędnej przestrzennej  $x$  z równań 7.1 i 7.2 następującymi ilorazami różnicowymi:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ D(x_r) \frac{\partial^2 w(x_r, t)}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{(\Delta x)^4} [D_{r-1} w_{r-2}(t) - 2(D_{r-1} + D_r) w_{r-1}(t) + (D_{r-1} + 4D_r + D_{r+1}) w_r(t) - 2(D_r + D_{r+1}) w_{r+1}(t) + D_{r+1} w_{r+2}(t)] \quad (7.3)$$

w przypadku belki o zmiennej sztywności, lub, w przypadku belki pryzmatycznej:

$$D \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = \frac{D}{(\Delta x)^4} [w_{r-2}(t) - 4w_{r-1}(t) + 6w_r(t) - 4w_{r+1}(t) + w_{r+2}(t)], \quad (7.4)$$

gdzie  $w_r(t) = w(x_r, t)$ . Wprowadzając wyrażenia 7.3 oraz 7.4 do równań 7.1 i 7.2 otrzymamy układ  $(R - 1)$  równań algebraicznych, w których niewiadomymi będą przemieszczenia pionowe węzłów siatki dyskretyzacyjnej  $w_r(t)$ , jak również prędkości oraz przyspieszenia tych przemieszczeń  $\dot{w}_r(t) = \frac{dw_r(t)}{dt}$  oraz  $\ddot{w}_r(t) = \frac{d^2 w_r(t)}{dt^2}$ . Równanie takie wiązać będzie ugięcie węzła  $r$  oraz węzłów sąsiadujących  $r - 2, r - 1, r + 1$  oraz  $r + 2$ :

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} [D_{r-1} w_{r-2}(t) - 2(D_{r-1} + D_r) w_{r-1}(t) + (D_{r-1} + 4D_r + D_{r+1}) w_r(t) - 2(D_r + D_{r+1}) w_{r+1}(t) + D_{r+1} w_{r+2}(t)] + c_r \dot{w}_r(t) + m_r \ddot{w}_r(t) = p_r(t), \quad (7.5)$$

a w przypadku belki pryzmatycznej:

$$\frac{D}{(\Delta x)^4} [w_{r-2}(t) - 4w_{r-1}(t) + 6w_r(t) - 4w_{r+1}(t) + w_{r+2}(t)] + c_r \dot{w}_r(t) + m_r \ddot{w}_r(t) = p_r(t). \quad (7.6)$$

Układy równań 7.5 oraz 7.6 wygodnie jest przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{w}}(t) + \mathbf{C} \dot{\bar{w}}(t) + \mathbf{K} \bar{w}(t) = \bar{p}(t) \quad (7.7)$$

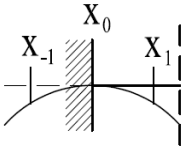
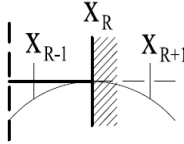
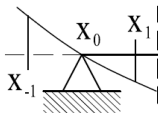
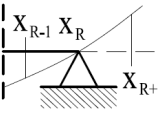
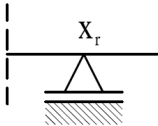
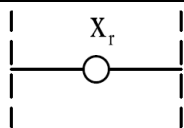
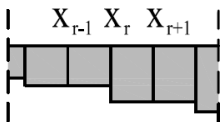
Gdzie  $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_r\}$  oznacza macierz bezwładności,  $\mathbf{C}$  jest macierzą tłumienia natomiast  $\mathbf{K}$  jest macierzą sztywności. Wektory  $\ddot{\bar{w}}(t)$ ,  $\dot{\bar{w}}(t)$  oraz  $\bar{w}(t)$  są odpowiednio wektorami przyspieszeń, prędkości oraz przemieszczeń pionowych podczas gdy wektor  $\bar{p}(t)$  stanowi wektor obciążeń węzłowych. Wyraży  $m_r$  wyznaczmy jako

$$m_r = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_r - \Delta x/2}^{x_r + \Delta x/2} m(x) dx. \quad (7.8)$$

Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  określimy podstawie macierzy bezwładności oraz macierzy sztywności zgodnie z zależnością  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \kappa \mathbf{K}$ , gdzie  $\alpha$  i  $\kappa$  są współczynnikami tłumienia zewnętrznego oraz wewnętrznego.

Tworząc macierz sztywności  $\mathbf{K}$  należy uwzględnić odpowiednie związki między ugięciami węzłów wynikające z warunków podparcia na obu końcach belki, zerowe wartości ugięć w miejscach podpór pośrednich w celu zredukowania liczby niewiadomych w równaniu macierzowym, a także ewentualne przeguby pośrednie i zmiany sztywności giętej belki. Najważniejsze warunki przedstawiono w tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Związki między ugięciami węzłów siatki dyskretyzacyjnej wynikające z warunków podparcia

Oznaczenie	Opis	Warunek
	Utwierdzenie z lewej strony	$w_0 = 0,$ $w_1 = w_{-1}$
	Utwierdzenie z prawej strony	$w_R = 0,$ $w_{R-1} = w_{R+1}$
	Swobodne podparcie z lewej strony	$w_0 = 0,$ $w_1 = -w_{-1}$
	Swobodne podparcie z prawej strony	$w_R = 0,$ $w_{R-1} = -w_{R+1}$
	Podpora pośrednia	$w_r = 0$
	Przegub pośredni	$D_r = 0$
	Skokowa zmiana sztywności giętej	$D_r = \frac{2D_{r-1}D_{r+1}}{D_{r-1}+D_{r+1}}$

Figurujący po prawej stronie równania (7.7) wektor obciążeń  $\bar{p}(t)$  ma postać:

$$\bar{p}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_R(t) \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Jeżeli analizowana belka poddana jest działaniu siły skupionej  $P$  poruszającej się ze stałą prędkością  $v$ , (rys. 7.2 a) poszczególne wyrazy wektora  $\bar{p}(t)$  przedstawimy jako:

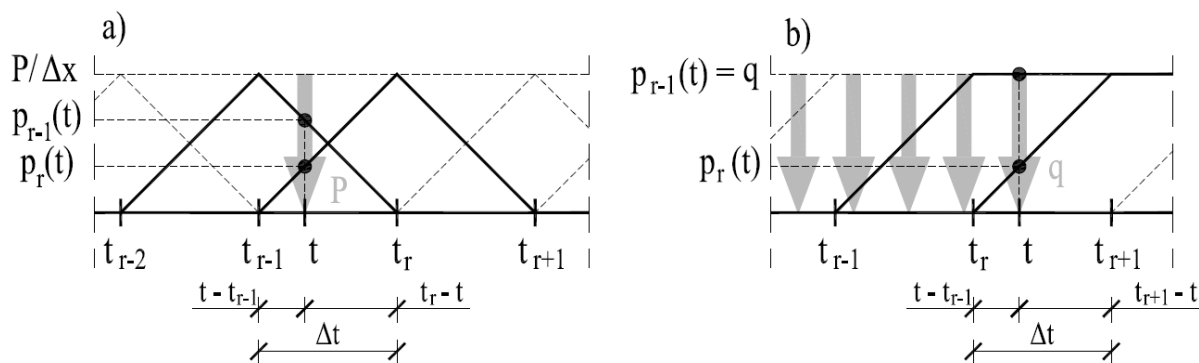
$$\begin{aligned} p_{r-1}(t) &= P \frac{t_r - t}{\Delta x \Delta t}; & p_r(t) &= P \frac{t - t_{r-1}}{\Delta x \Delta t}, \\ p_s(t) &= 0 \quad \text{gdy } s \neq r; s \neq r - 1; s = 1, 2, \dots, R \end{aligned} \quad (7.10)$$

gdzie:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}; \quad t_r = r \Delta t; \quad t_{r-1} \leq t \leq t_r. \quad (7.11)$$

Jeżeli natomiast belka obciążona jest obciążeniem równomiernie rozłożonym  $q$  poruszającym się ze stałą prędkością  $v$  (rys. 7.2 b) poszczególne wyrazy wektora  $\bar{p}(t)$  będą miały postać:

$$\begin{aligned} p_r(t) &= q \frac{t - t_{r-1}}{\Delta t} \\ p_s(t) &= q \quad \text{gdy } s < r \\ p_s(t) &= 0 \quad \text{gdy } s > r; s = 1, 2, \dots, R. \end{aligned} \quad (7.12)$$



Rys. 7.2. Schemat wyznaczania obciążeń węzłowych w zależności od czasu przejazdu obciążenia: a) ruchoma siła skupiona; b) ruchome obciążenie równomiernie rozłożone



Macierzowe równanie ruchu (7.7) całkować będziemy numerycznie posługując się metodą Newmarka ([51], [40]). Czas przejazdu obciążenia po belce podzielimy na  $N$  równych segmentów czasowych  $\Delta t = \frac{L}{Nv}$ , a następnie wyznaczać będziemy wektory  $\bar{w}(t)$ ,  $\dot{\bar{w}}(t)$  oraz  $\ddot{\bar{w}}(t)$  w chwilach  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots, N$ , zakładając, że znamy wspomniane wyżej wektory w chwilach  $t_n$ . Zgodnie z procedurą metody Newmarka wektory przemieszczeń oraz prędkości w chwili  $t_{n+1}$  będą wyznaczone wg poniższych wzorów:

$$\begin{aligned}\bar{w}(t_{n+1}) &= \bar{w}(t_n) + \Delta t \dot{\bar{w}}(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{\bar{w}}(t_n) + \beta(\Delta t)^2 \ddot{\bar{w}}(t_{n+1}) \\ \dot{\bar{w}}(t_{n+1}) &= \dot{\bar{w}}(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t [\ddot{\bar{w}}(t_n) + \ddot{\bar{w}}(t_{n+1})],\end{aligned}\tag{7.13}$$

gdzie  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Parametry  $\alpha$  i  $\beta$  będziemy w dalszych obliczeniach przyjmować jak w metodzie stałego przyspieszenia:

$$\alpha = 0,5 - \beta; \quad \beta = \alpha = 0,25;\tag{7.14}$$

Rozwiązania równania ruchu poszukiwać będziemy przy założeniu zerowych warunków początkowych:

$$\bar{w}(0) = \bar{0}; \quad \dot{\bar{w}}(0) = \bar{0}; \quad \ddot{\bar{w}}(0) = \bar{0}\tag{7.15}$$

Nieznany w każdym kolejnym kroku całkowania wektor przyspieszeń  $\ddot{\bar{w}}(t_{n+1})$  wyznaczymy przekształcając równanie:

$$\tilde{\mathbf{M}} \ddot{\bar{w}}(t_{n+1}) = \tilde{\mathbf{p}}(t_{n+1}),\tag{7.16}$$

gdzie macierz  $\tilde{\mathbf{M}}$  wyznaczymy znając macierze  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$ , oraz  $\mathbf{K}$ :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C} + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{K},\tag{7.17}$$

natomiast wektor  $\tilde{\mathbf{p}}(t_{n+1})$  określimy jako:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{p}}(t_{n+1}) &= \bar{\mathbf{p}}(t_{n+1}) - \mathbf{C} \left[ \dot{\bar{w}}(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{\bar{w}}(t_n) \right] - \\ &\quad - \mathbf{K} [\bar{w}(t_n) + \Delta t \dot{\bar{w}}(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{\bar{w}}(t_n)].\end{aligned}\tag{7.18}$$

### 7.1.2. MRS W DYNAMICE PUNKTOWO PODPARTYCH CIENKICH PŁYT IZOTROPOWYCH

Metoda różnic skończonych może być z powodzeniem zastosowana również w analizie drgań cienkich płyt izotropowych. Rozpatrzmy płytę omawianą w rozdziale 6., dla której równanie ruchu ma postać (6.2) lub (6.15). Stosując procedury metody różnic skończonych podzielmy obszar płyty liniami prostopadłymi do krawędzi B i L oddalonymi od siebie o odległości  $\Delta x$  i  $\Delta y$  (rys.7.3). Stworzymy w ten sposób siatkę dyskretyzacyjną o oczkach prostokątnych, której węzły znajdować będą się w punktach przecięcia linii. Jeżeli przyjmiemy liczbę linii I prostopadłych do osi x oraz J prostopadłych do osi y to uzyskamy liczbę  $I \cdot J$  węzłów siatki dyskretyzacyjnej, których przemieszczenia pionowe  $w_{i,j} = w(x_i, y_j, t)$  będziemy analizować w dalszych obliczeniach. Przyjmijmy następującą formułę różnicową:

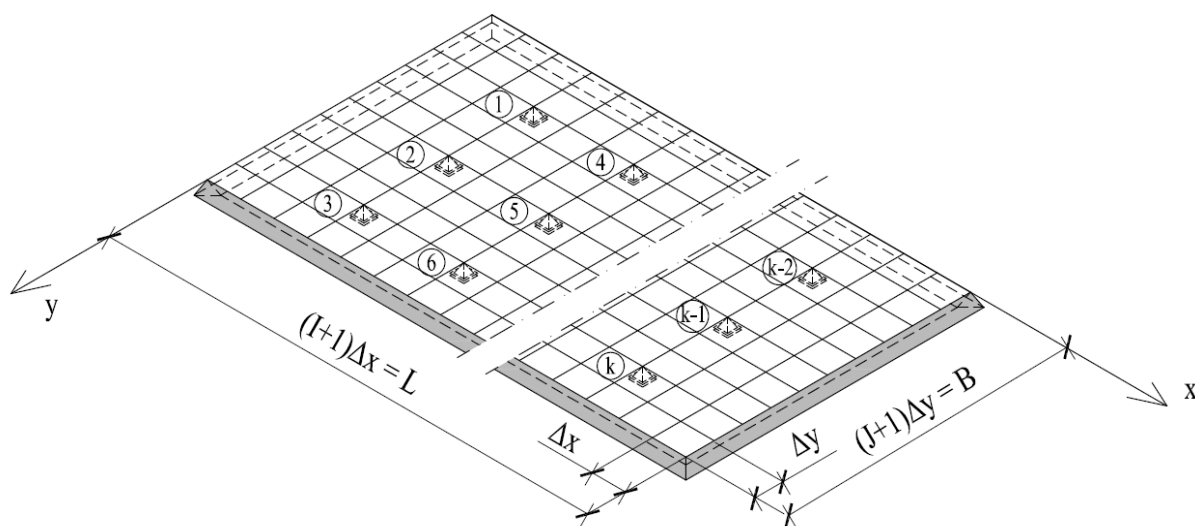
$$D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right] =$$

$$= \frac{D}{\lambda^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}$$

$$+ w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) + (w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2})],$$
(7.19)

gdzie:

$$\lambda = \Delta x = \Delta y; \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad j = 1, 2, \dots, J.$$
(7.20)



Rys. 7.3. Model dyskretny MRS cienkiej płyty izotropowej z punktowymi podporami pośrednimi

Podstawiając wyrażenie (7.19) do równań (6.2) lub (6.15) zastąpimy różniczkowe równanie ruchu równaniem algebraicznym:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\lambda^4} [20w_{i,j} - 8(w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) \\ & + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) \\ & + (w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j-2} + w_{i,j+2})] + c_{i,j}\dot{w}_{i,j} + m_{i,j}\ddot{w}_{i,j} = p_{i,j}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

gdzie:

$$w_{i,j} = w(x_i, y_j, t); \quad \dot{w}_{i,j} = \frac{\partial w(x_i, y_j, t)}{\partial t}; \quad \ddot{w}_{i,j} = \frac{\partial^2 w(x_i, y_j, t)}{\partial t^2}. \quad (7.22)$$

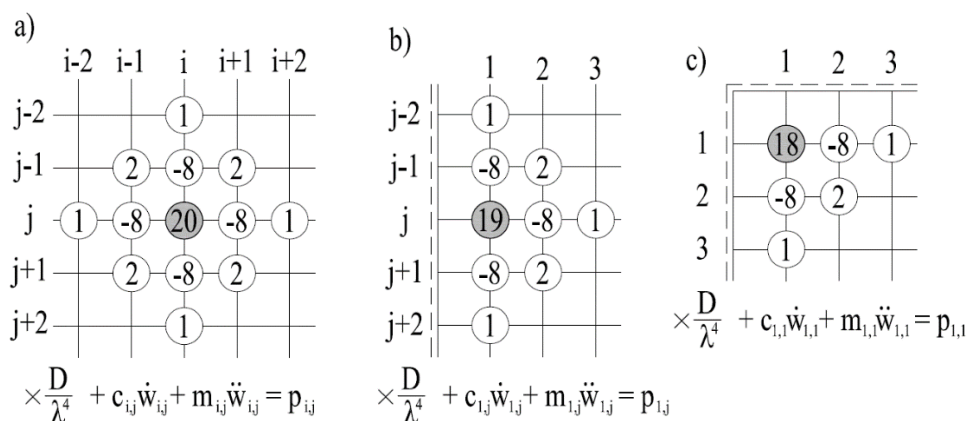
Ilość równań (7.21) odpowiadać będzie liczbie  $I \times J$  węzłów siatki dyskretyzacyjnej MRS. Powstały w ten sposób układ równań przedstawmy w postaci macierzowej:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{w}}(t) + \mathbf{C}\dot{\bar{w}}(t) + \mathbf{K}\bar{w}(t) = \bar{p}(t), \quad (7.23)$$

gdzie każda z macierzy jest wymiaru  $(I \times J) \times (I \times J)$  Macierz bezwładności  $\mathbf{M}$  jest macierzą diagonalną:

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{\rho h\}, \quad (7.24)$$

macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  można przedstawić analogicznie jak w przypadku belek natomiast macierz sztywności  $\mathbf{K}$  jest macierzą symetryczną, w której każdy wiersz dotyczy ugięcia  $w_{i,j}$  i zawiera współczynniki występujące przy ugięciach węzła o współrzędnych  $x_i = i \cdot \lambda$ ,  $y_j = j \cdot \lambda$  oraz węzłów sąsiednich, z uwzględnieniem warunków brzegowych, zgodnie ze schematami przedstawionymi na rys. 7.4 [30].



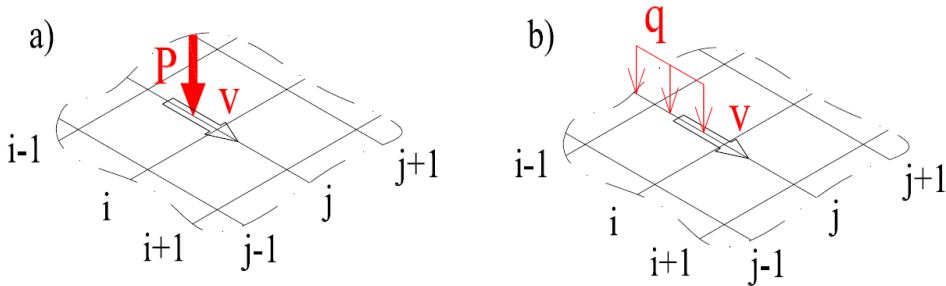
Rys. 7.4. Współczynniki przy ugięciach węzłów siatki dyskretyzacyjnej MRS:

a) przypadek ogólny; b) węzeł przy krawędzi swobodnie podpartej; c) węzeł przy narożniku swobodnie podpartym

Wektor obciążeń  $\bar{p}(t)$  z równania (7.23) ma postać:

$$\bar{p}(t) = \begin{bmatrix} p_{1,1} \\ \vdots \\ p_{i,j} \\ \vdots \\ p_{I,J} \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

gdzie  $p_{i,j} = p(x_i, y_j, t)$ . Rozpatrujemy przypadki ruchomej siły skupionej  $P$  oraz ruchomego obciążenia  $q$  poruszających się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x$ . Zakładamy, że tor ruchu obciążenia pokrywa się z osią  $j$  siatki dyskretyzacyjnej (rys, 7.5).



Rys. 7.5. Modele obciążeń ruchomych: a) ruchoma siła skupiona; b) ruchome obciążenie rozłożone

W przypadku ruchomej siły skupionej wyrazy  $p_{i,j}$  wektora obciążeń określać będziemy w następujący sposób:

$$p_{i-1,j}(t) = P \frac{t_i - t}{\lambda^2 \Delta t}; \quad p_{i,j}(t) = P \frac{t - t_{i-1}}{\lambda^2 \Delta t}; \quad (7.26)$$

$$p_{r,s}(t) = 0 \text{ gdy } r \neq i, r \neq i - 1, s \neq j,$$

natomiast w przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego:

$$p_{i,j}(t) = q \frac{t - t_{i-1}}{\lambda \Delta t};$$

$$p_{r,s}(t) = q \text{ gdy } r < i, s = j, \quad (7.27)$$

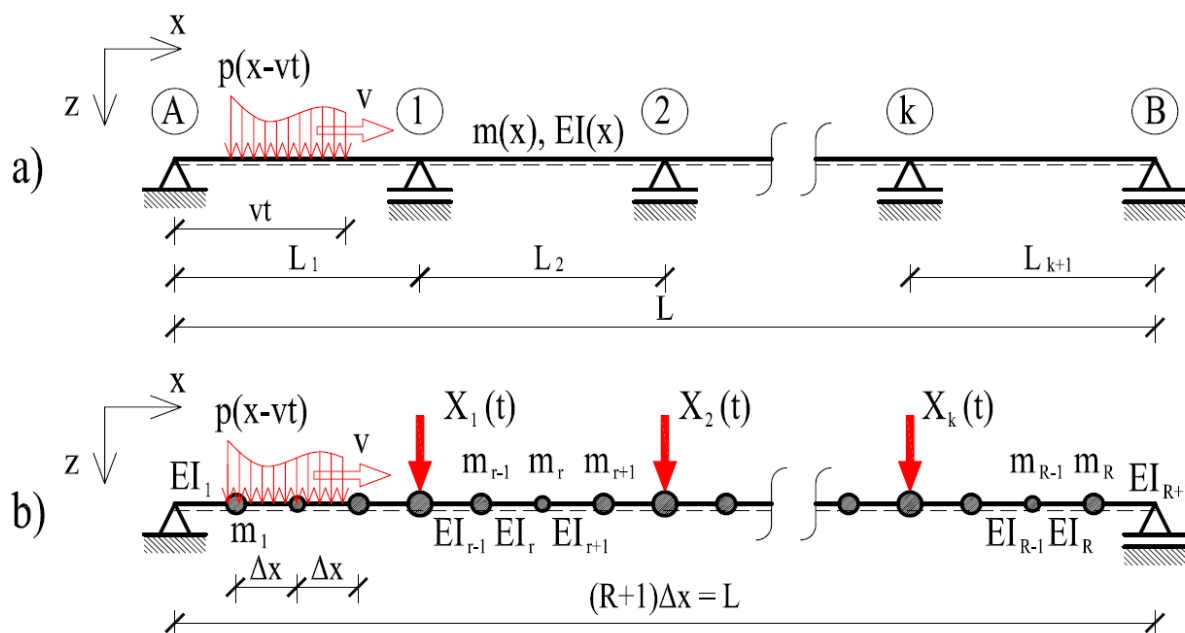
$$p_{r,s}(t) = 0 \text{ gdy } r > i, s \neq j,$$

gdzie  $\Delta t = \lambda/v$ ,  $t_i = i \cdot \Delta t$ .

Całkowanie numeryczne macierzowego równania ruchu (7.23) będziemy wykonywać zgodnie z procedurą Newmarka w sposób identyczny jak w przypadku belek wieloprzęsłowych.

## 7.2. METODA GRANULACJI MAS

Alternatywnym, w stosunku do opisaną wcześniej metody różnic skończonych, sposobem dyskretyzacji przestrzennej układu dynamicznego jest zastąpienie układu o ciągłym rozkładzie masy (takiego jak przedstawiona na rys. 7.6a belka wieloprzęsłowa o zmiennej sztywności giętej  $EI(x)$  oraz zmiennej masie na jednostkę długości  $m(x)$ ) układem o skończonej liczbie stopni swobody dynamicznej uzyskany przez wprowadzenie grupy  $R$  mas skupionych  $m_r$  odzwierciedlających drgania masy rozłożonej  $m(x)$ . Przyjmujemy, że masy  $m_r$  ( $r = 1, 2, \dots, R$ ) rozmieszczone są w równym rozstawie  $\Delta x = L/(R + 1)$ . Ponadto usuwamy myślowo podpory pośrednie 1, 2, ...,  $k$  i wprowadzamy w ich miejsce siły reprezentujące reakcje podporowe  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$ , ...,  $X_k(t)$ , dzięki czemu uzyskujemy model dyskretny odpowiadający układowi ciągłym rozpatrywanym w rozdziale 4 (rys. 7.6b)



Rys. 7.6. Wieloprzęsłowa belka o zmiennej sztywności poddana działaniu obciążenia ruchomego: a) model o ciągłym rozkładzie masy; b) model dyskretny z masami skupionymi

Macierzowe równanie ruchu ma postać analogiczną jak w przypadku MRS:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{w}}(t) + \mathbf{C}\dot{\bar{w}}(t) + \mathbf{K}\bar{w}(t) = \bar{p}^p(t) + \bar{p}^x(t), \quad (7.28)$$

gdzie macierze bezwładności  $\mathbf{M}$ , tłumienia  $\mathbf{C}$ , oraz sztywności  $\mathbf{K}$  są macierzami kwadratowymi o wymiarze  $R \times R$ , co oznacza, że rozpatrywać będziemy drgania układu dyskretnego o  $R$  stopniach swobody dynamicznej.

Macierz  $\mathbf{M}$  jest macierzą diagonalną:

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_R\}_{R \times R}, \quad (7.29)$$

a jej poszczególne elementy można przedstawić jako:

$$m_r = \int_{x_r - \Delta x/2}^{x_r + \Delta x/2} m(x) dx, \quad (7.30)$$

gdzie  $x_r$  oznacza współrzędną masy  $m_r$  względem lewego końca belki. Macierz  $\mathbf{K}$  jest kwadratową macierzą symetryczną:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1R} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{R1} & k_{R2} & \dots & k_{RR} \end{bmatrix}_{R \times R}, \quad (7.31)$$

którą najłatwiej jest zbudować bazując na statycznej metodzie sił:

$$\mathbf{K} = [\mathcal{M}_Q^T \cdot \mathbf{D}_0 \cdot \mathcal{M}_Q]_{R \times R}^{-1}, \quad (7.32)$$

gdzie  $\mathcal{M}_Q$  jest macierzą wpływu obciążeń jednostkowych przyłożonych w miejscu przyjętych współrzędnych uogólnionych na wartości momentów zginających. Macierz ta zawiera wartości momentów zginających na końcach poszczególnych przedziałów o długości  $\Delta x$  i może być przedstawiona jako:

$$\mathcal{M}_Q = \begin{bmatrix} M_{0,1}^1 & M_{0,1}^2 & \dots & M_{0,1}^R \\ M_{1,0}^1 & M_{1,0}^2 & \dots & M_{1,0}^R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{R+1,R}^1 & M_{R+1,R}^2 & \dots & M_{R+1,R}^R \end{bmatrix}_{(2R+2) \times R}. \quad (7.33)$$

Macierz podatności  $\mathbf{D}_0$  jest macierzą pasmową:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} [\mathbf{d}_1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\mathbf{d}_2] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [\mathbf{d}_R] \end{bmatrix}_{(R+2) \times (R+2)}. \quad (7.34)$$

a jej poszczególne elementy mają postać:

$$\mathbf{d}_r = \frac{\Delta x}{6(EI)_r} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

gdzie:

$$EI_r = \frac{EI(x_{r-1}) + EI(x_r)}{2}. \quad (7.36)$$

Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  może być utworzona analogicznie jak w przypadku MRS. Prawa strona macierzowego równania 7.28 związana jest z obciążeniem belki. Wektor  $\bar{p}^P(t)$  odpowiada zadanemu obciążeniu ruchomemu i można go przedstawić następująco:

$$\bar{p}^P(t) = \begin{bmatrix} p_1^P(t) \\ p_2^P(t) \\ \vdots \\ p_R^P(t) \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

Wyrazy  $p_r^P(t)$  w przypadku belki poddanej działaniu siły skupionej  $P$  poruszającej się ze stałą prędkością  $v$  mają postać:

$$\begin{aligned} p_{r-1}^P(t) &= P \frac{t_r - t}{\Delta t}; \quad p_r^P(t) = P \frac{t - t_{r-1}}{\Delta t}, \\ p_s^P(t) &= 0 \quad \text{gdy } s \neq r; s \neq r - 1; s = 1, 2, \dots, R \end{aligned} \quad (7.38)$$

gdzie:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}; \quad t_r = r\Delta t; \quad t_{r-1} \leq t \leq t_r. \quad (7.39)$$

Jeżeli belka poddana jest działaniu ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego o natężeniu  $q$  poruszającego się ze stałą prędkością  $v$ , wyrazy  $p_r^P(t)$  przedstawimy jako:

$$\begin{aligned} p_r^P(t) &= q\Delta x \frac{t - t_{r-1}}{\Delta t} \\ p_s^P(t) &= q\Delta x \quad \text{gdy } s < r \\ p_s^P(t) &= 0 \quad \text{gdy } s > r; s = 1, 2, \dots, R. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Wektor  $\bar{p}^X(t)$  odpowiada siłom  $X_i(t)$  obciążającym masy skupione zlokalizowane w miejscach usuniętych podpór pośrednich i ma następującą postać:

$$\bar{p}^X(t) = \begin{bmatrix} p_1^X(t) \\ p_2^X(t) \\ \vdots \\ p_R^X(t) \end{bmatrix}. \quad (7.41)$$

Należy zwrócić uwagę, że wyrazy  $p_r^X(t)$  przyjmują niezerowe wartości jedynie w przypadku współrzędnych uogólnionych odpowiadających drganiom mas poddanych działaniu obciążeń nadliczbowych  $X_i(t)$ :

$$\begin{aligned} p_r^X(t) &= X_i(t) \quad \text{gdy } x_r = x_i \\ p_r^X(t) &= 0 \quad \text{gdy } x_r \neq x_i \end{aligned} \quad (7.42)$$

Występujący w równaniu macierzowym 7.28 wektor przemieszczeń możemy przedstawić jako sumę składowych związanych z zadaniem ruchomym obciążeniem oraz układem sił nadliczbowych odpowiadających reakcjom w usuniętych podporach pośrednich:

$$\bar{w}(t) = \bar{w}^P(t) + \bar{w}^X(t). \quad (7.43)$$

Analogicznie możemy postąpić w przypadku wektorów prędkości  $\dot{\bar{w}}(t)$  oraz przyspieszeń  $\ddot{\bar{w}}(t)$ . Wektor  $\bar{w}^P(t)$  uzyskamy rozwiązując przypadek belki obciążonej jedynie zadaniem obciążeniem ruchomym. Macierzowe równanie ruchu ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{w}}^P(t) + \mathbf{C}\dot{\bar{w}}^P(t) + \mathbf{K}\bar{w}^P(t) = \bar{p}^P(t) \quad (7.44)$$

Rozwiązanie możemy otrzymać drogą numeryczną stosując metodę Newmarka wg procedur opisanych w rozdziale dotyczącym Metody Różnic Skończonych, podstawiając macierze, oraz wektory opisane wzorami (7.13)-(7.18).

Zajmijmy się teraz przypadkiem układu dyskretnego poddanego działaniu układu sił  $X_i(t)$ . Macierzowe równanie ruchu ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{w}}^X(t) + \mathbf{C}\dot{\bar{w}}^X(t) + \mathbf{K}\bar{w}^X(t) = \bar{p}^X(t) \quad (7.45)$$

W odróżnieniu od przypadku poprzedniego, wartości sił  $X_i(t)$  działających na belkę nie są znane. Aby je wyznaczyć posłużymy się uzyskanym poprzednio rozwiązaniem dla zadanego obciążenia ruchomego oraz wynikającą z równania zgodności przemieszczeń informacją o zerowych wartościach ugięć w punktach podparcia pośredniego:

$$w_r^X(t) + w_r^P(t) = 0 \quad \text{gdy } x_r = x_i. \quad (7.46)$$

Macierz  $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$  niezbędną do wyznaczenia wektora przyspieszeń przedstawmy jako:

$$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t\mathbf{C} + \beta(\Delta t)^2\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \cdots & \tilde{m}_{1R} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \cdots & \tilde{m}_{2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{m}_{R1} & \tilde{m}_{R2} & \cdots & \tilde{m}_{RR} \end{bmatrix}_{R \times R}, \quad (7.47)$$

natomiast wektor  $\tilde{\bar{p}}(t_{n+1})$ :

$$\tilde{\bar{p}}(t_{n+1}) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(t_{n+1}) \\ \tilde{p}_2(t_{n+1}) \\ \vdots \\ \tilde{p}_R(t_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$



gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_r(t_{n+1}) &= X_i(t_{n+1}) - u_r(t_n) \quad \text{gdy } x_r = x_i; \\ \tilde{p}_r(t_{n+1}) &= -u_r(t_n) \quad \text{gdy } x_r \neq x_i.\end{aligned}\tag{7.49}$$

Wyrazy  $u_r(t_n)$  są kolejnymi wyrazami wektora  $\bar{u}(t_n)$  uzyskanego zgodnie z wzorem:

$$\begin{aligned}\bar{u}(t_n) &= \begin{bmatrix} u_1(t_n) \\ u_2(t_n) \\ \vdots \\ u_R(t_n) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{C} \left[ \dot{w}^x(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{w}(t_n) \right] + \mathbf{K} [\bar{w}^x(t_n) + \Delta t \dot{w}^x(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \ddot{w}^x(t_n)].\end{aligned}\tag{7.50}$$

Całkowanie numeryczne równania ruchu wykonamy zakładając zerowe wartości przemieszczeń, prędkości oraz przyspieszeń w chwili pojawienia się obciążenia ruchomego na belce. Wektor przyspieszeń dla kolejnych kroków całkowania określimy jako:

$$\ddot{w}^x(t_{n+1}) = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{p}}(t_{n+1}) = \begin{bmatrix} -\sum_{r=1}^R \tilde{m}_{1r} u_r(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{1i} X_i(t_{n+1}) \\ -\sum_{r=1}^R \tilde{m}_{2r} u_r(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{2i} X_i(t_{n+1}) \\ \vdots \\ -\sum_{r=1}^R \tilde{m}_{Rr} u_r(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{Ri} X_i(t_{n+1}) \end{bmatrix}.\tag{7.51}$$

Znając wartości przyspieszeń w chwili  $t_{n+1}$  jesteśmy w stanie określić wektor przemieszczeń:

$$\begin{aligned}\bar{w}^x(t_{n+1}) &= \\ &= \begin{bmatrix} w_1^x(t_n) + \Delta t \dot{w}_1^x(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \left( \dot{w}_1^x(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{1i} X_i(t_{n+1}) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{1r} u_r(t_n) \right) \\ w_2^x(t_n) + \Delta t \dot{w}_2^x(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \left( \dot{w}_2^x(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{2i} X_i(t_{n+1}) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{2r} u_r(t_n) \right) \\ \vdots \\ w_R^x(t_n) + \Delta t \dot{w}_R^x(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \left( \dot{w}_R^x(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{Ri} X_i(t_{n+1}) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{Rr} u_r(t_n) \right) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7.52}$$

oraz wektor prędkości:

$$\dot{w}^x(t_{n+1}) = \begin{bmatrix} \dot{w}_1^x(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{w}_1^x(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{1i} X_i(t_{n+1}) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{1r} u_r(t_n) \right) \\ \dot{w}_2^x(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{w}_1^x(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{2i} X_i(t_{n+1}) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{2r} u_r(t_n) \right) \\ \vdots \\ \dot{w}_R^x(t_n) + \frac{\Delta t}{2} \left( \ddot{w}_1^x(t_n) + \sum_{i=1}^k \tilde{m}_{Ri} X_i(t_{n+1}) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{Rr} u_r(t_n) \right) \end{bmatrix}. \quad (7.53)$$

Zakładając zerowe przemieszczenia mas skupionych  $m_i$  w punktach podparcia pośredniego  $w_i(t) = w(x_i, t) = 0$ , jesteśmy w stanie zbudować układ równań zgodności przemieszczeń:

$$\alpha(\Delta t)^2 \sum_{j=1}^k \tilde{m}_{ij} X_j(t_{n+1}) + d_i(t_n) + w_i^p(t_{n+1}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (7.54)$$

gdzie:

$$d_i(t_n) = w_i(t_n) + \Delta t \dot{w}_i(t_n) + \alpha(\Delta t)^2 \left[ \ddot{w}_i(t_n) - \sum_{r=1}^R \tilde{m}_{ir} u_r(t_n) \right]. \quad (7.55)$$

Układ równań (7.54) przedstawmy w zapisie macierzowym:

$$\mathbf{B} \cdot \bar{x}(t_{n+1}) + \bar{b}(t_{n+1}) = \bar{0}. \quad (7.56)$$

gdzie:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{11} & \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{12} & \cdots & \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{1k} \\ \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{21} & \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{22} & \cdots & \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{k1} & \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{k2} & \cdots & \alpha(\Delta t)^2 \tilde{m}_{kk} \end{bmatrix}_{k \times k},$$

$$\bar{x}(t_{n+1}) = \begin{bmatrix} X_1(t_{n+1}) \\ X_2(t_{n+1}) \\ \vdots \\ X_k(t_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad (7.57)$$

$$\bar{b}(t_{n+1}) = \begin{bmatrix} d_1(t_n) + w_1^p(t_{n+1}) \\ d_2(t_n) + w_2^p(t_{n+1}) \\ \vdots \\ d_k(t_n) + w_k^p(t_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

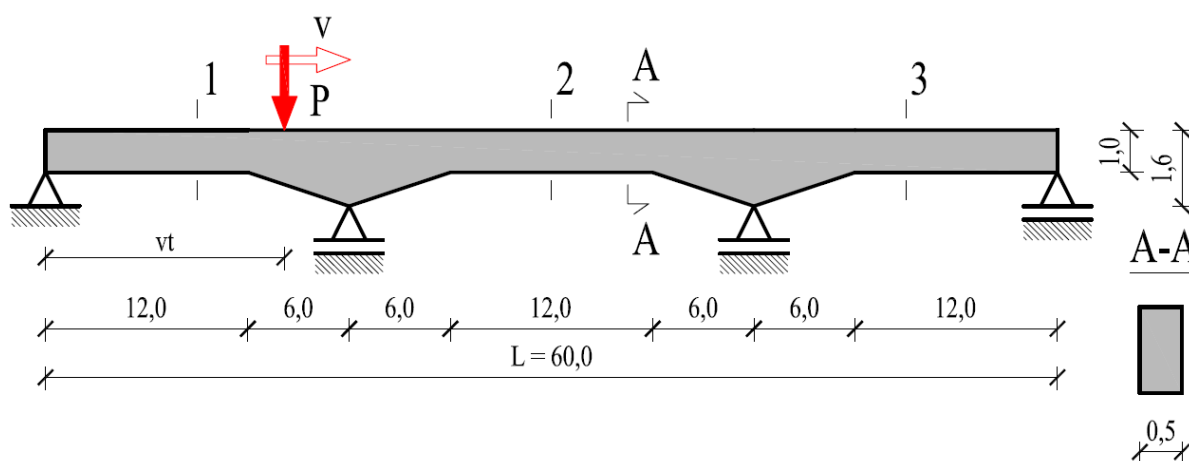
Poszukiwany wektor niewiadomych  $\bar{x}(t_{n+1})$  zawierający wartości obciążeń odpowiadających reakjom w więziach nadliczbowych otrzymamy przekształcając macierzowe równanie (7.56):

$$\bar{x}(t_{n+1}) = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \bar{b}(t_{n+1}) = \bar{0}. \quad (7.58)$$

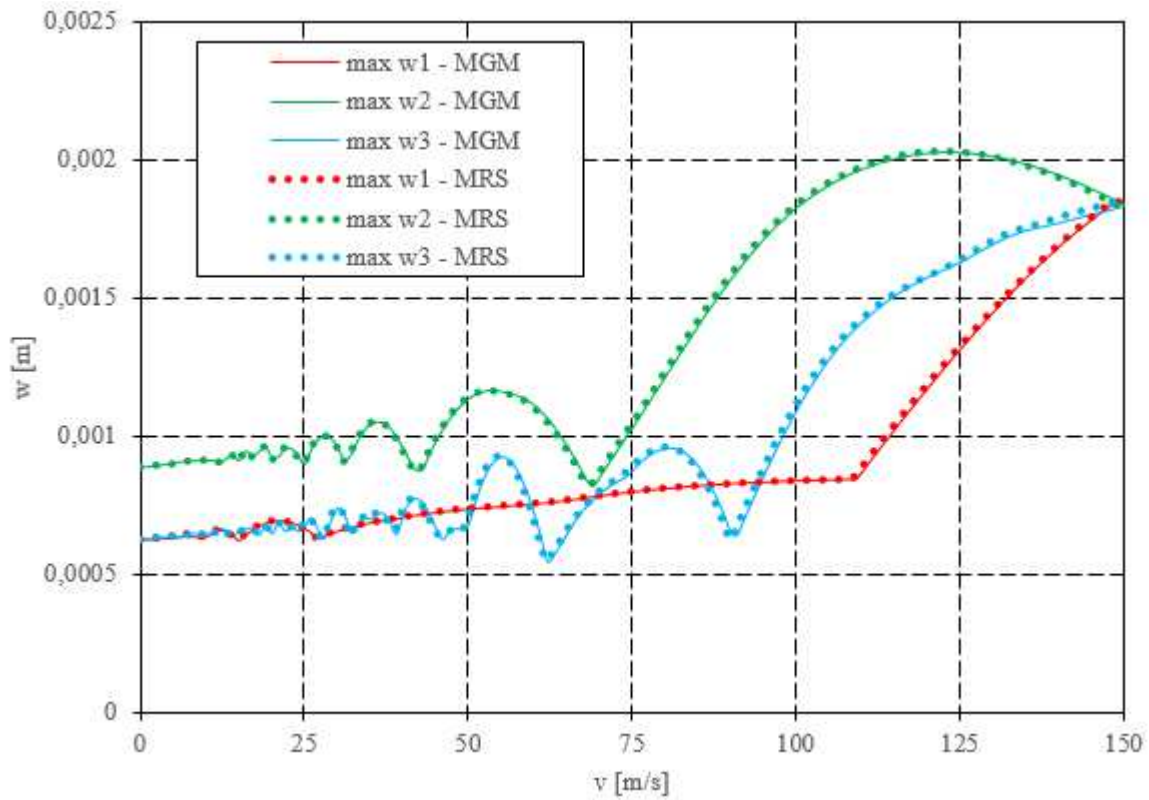
Czynność tą będziemy powtarzać dla każdego kolejnego kroku całkowania, co pozwoli nam uzyskać wartości sił  $X_i(t)$ , a następnie wyznaczyć wektor  $\bar{w}^x(t)$ . Ostatnim krokiem będzie superpozycja obydwu omawianych przypadków obciążeń.

### 7.3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Rozpatrzmy belkę trójprzęsłową o zmiennej sztywności giętnej oraz rozkładzie masy przedstawioną na rysunku 7.7. Sztywność giętna rozpatrywanej belki zmienia się w zakresie od  $EI = 1,25 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$  w przęśle do  $EI = 4,096 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2$  przy podporach pośrednich. Masa rozłożona belki wynosi od  $m = 1200 \text{ kg/m}$  w strefie przęsłowej do  $m = 1920 \text{ kg/m}$  przy podporach pośrednich. Belka poddana jest działaniu skupionej siły  $P = 10\,000 \text{ N}$  poruszającej się ze stałą prędkością  $v$ . Przeanalizowano drgania belki przy prędkościach przejazdu obciążenia w zakresie  $v = 0 \div 150 \text{ m/s}$ . Na rysunku 7.8 przedstawiono maksymalne wartości ugięć w środku lewego (przekrój "1"), centralnego (przekrój "2") oraz prawego przęsła (przekrój "3"). Przyjęto model numeryczny MRS dzieląc belkę na odcinki o równej długości  $\Delta x = 0,5 \text{ m}$  oraz model MGM o  $R=119$  masach skupionych. Dla obu modeli czas przejazdu obciążenia podzielono na  $N = 480$  kroków czasowych. Zaobserwowano bardzo dobrą zgodność między obiema metodami dyskretyzacji układu.



Rys. 7.7. Trójprzęsłowa belka o zmiennej sztywności obciążona ruchomą siłą skupioną



Rys. 7.8. Maksymalne ugięcia w środku lewego, centralnego oraz prawego przęsła w zależności od prędkości przejazdu obciążenia

## 8. RUCHOME OBCIĄŻENIA LOSOWE

W omawianych do tej pory zagadnieniach rozważaliśmy ruchome obciążenia traktowane jako proces deterministyczny o jednoznacznie określonych parametrach. Istnieje jednak szereg przypadków, dla których konieczne jest przyjęcie modelu stochastycznego, gdzie parametry takie jak wielkość obciążenia, jego prędkość jak również ilość, rodzaj oraz częstotliwość pojawiania się sił wzbudzających na analizowanej konstrukcji opisywana jest za pomocą zmiennych losowych. Przykładem takiego procesu może być ruch pojazdów na moście, ruch pieszych na kładce lub też obciążenie tłumem lub ruchem ulicznym stropów przejść podziemnych.

Rozwiązania w deterministycznych przypadkach obciążeń uzyskane w rozdziałach poprzednich mogą być wykorzystane do określenia charakterystyk probabilistycznych dynamicznej odpowiedzi konstrukcji poddanej działaniu ruchomego obciążenia losowego. W tym celu wprowadzimy dynamiczną funkcję wpływu  $H(\xi, T)$  w przypadku belek lub  $H(\xi, \zeta, T)$  w przypadku płyt, opisującą drgania konstrukcji poddane działaniu ruchomej siły jednostkowej  $P = 1$  poruszającej się ze stałą prędkością.

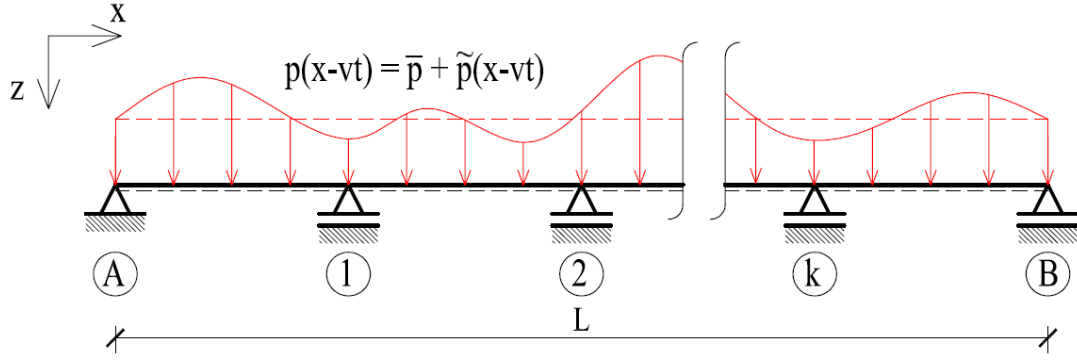
W tym rozdziale skupimy się na zastosowaniu dynamicznej funkcji wpływu w analizie dwóch przypadków ruchomych obciążeń losowych, mianowicie: czasoprzestrzennego stacjonarnego procesu stochastycznego oraz losowej serii ruchomych sił skupionych. Wyznaczenie rozwiązań przy użyciu bezpośredniej transformacji własnej, stosowanej w przypadku innych rodzajów obciążeń stochastycznych, jest trudne nawet w przypadku prostych układów jednoprzęsłowych. Z tego powodu uzasadnione jest wprowadzenie dynamicznej funkcji wpływu w analizie zagadnienia.

### 8.1. CZASOPRZESTRZENNY STACJONARNY PROCES STOCHASTYCZNY

Rozważmy belkę poddaną działaniu ruchomego obciążenia  $p(x - vt) = p[L(\xi - T)]$ , które może być traktowane jako czasoprzestrzenny stacjonarny proces stochastyczny (rys. 8.1). Przy takich założeniach funkcja opisująca siły wzbudzające będzie przedstawiona jako suma składników odpowiadających części deterministycznej oraz stochastycznej:

$$p(x - vt) = \bar{p} + \check{p}(x - vt) = \bar{p} + \check{p}[L(\xi - T)] = \bar{p} + \check{p}(L\tau), \quad (8.1)$$

gdzie  $\bar{p} = E[p(t)]$  const. oznacza wartość średnią natomiast  $\check{p}(x - vt)$  jest fluktuacją losową. Symbol  $E[ \ ]$  oznaczać będzie wartość oczekiwaną.



Rys. 8.1. Wieloprzęsłowa belka poddana działaniu czasoprzestrzennego procesu stochastycznego

Rozwiązania części deterministycznej przedstawiliśmy w rozdziałach poprzednich, stąd w tym punkcie skupimy się wyłącznie drganiach wynikających z obciążenia losowego. Przyjmijmy założenie, że znana jest funkcja kowariancji obciążenia, którą opiszemy następująco:

$$C_{PP}(\tau_1, \tau_2) = E[\tilde{p}(L\tau_1)\tilde{p}(L\tau_2)] = C_{PP}[L(\tau_1 - \tau_2)]. \quad (8.2)$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę wyłącznie obciążenie, które w zadanej chwili  $T$  znajduje się na belce, wtedy dynamiczną odpowiedź konstrukcji przedstawimy jako:

$$w(\xi, T) = \frac{L}{v} \int_{T-1}^T H(\xi, T - \tau) \tilde{p}(L\tau) d\tau, \quad (8.3)$$

a tym samym wariancja dynamicznego ugięcia belki będzie mogła być określona następująco:

$$\sigma_w^2(\xi, T) = \left(\frac{L}{v}\right)^2 \int_0^1 \int_0^1 H(\xi, \tau_1) H(\xi, \tau_2) C_{PP}[L(\tau_1 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (8.4)$$

Jeżeli założymy, że ruchome obciążenie losowe jest stacjonarnym „białym szumem”, funkcja kowariancji obciążenia będzie przedstawiona jako:

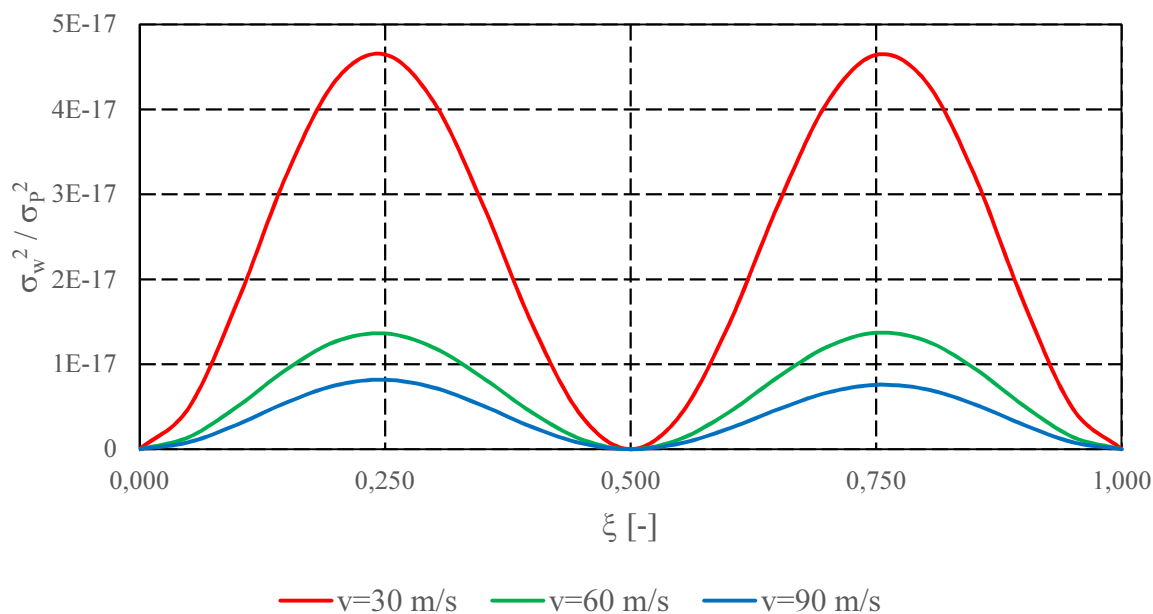
$$C_{PP}[L(\tau_1 - \tau_2)] = \sigma_p^2 \delta[L(\tau_1 - \tau_2)], \quad (8.5)$$

gdzie  $\sigma_p^2$  oznacza wariancję obciążenia natomiast  $\delta$  jest deltą Diraca. Podstawiając wyrażenie (8.5) do wzoru (8.4) otrzymamy formułę całkową opisującą wariancję ugięcia belki:

$$\sigma_w^2(\xi, T) = \frac{\sigma_p^2 L}{v^2} \int_0^1 H^2(\xi, T - \tau) d\tau, \quad (8.6)$$

Dla zilustrowania powyższych wzorów rozważmy belkę dwuprzęsłową z przykładu obliczeniowego opisanego w punkcie 4.4.1. poddaną działaniu czasoprzestrzennego procesu stochastycznego. Rysunek 8.2 przedstawia wariancję ugięcia belki dla różnych prędkości

obciążenia w chwili  $T = 1$ . Zaobserwowano, że wraz ze wzrostem prędkości, wariancja ugięcia belki maleje.

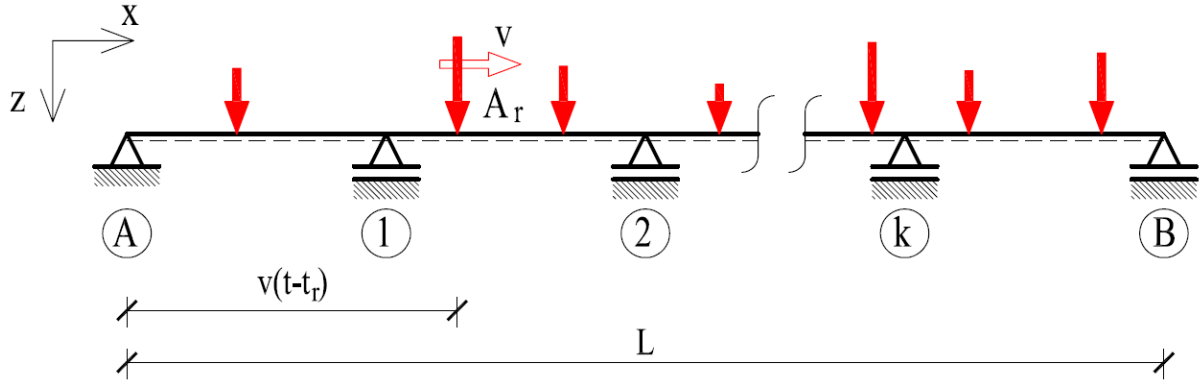


Rys. 8.2. Wariancja ugięcia belki dwuprzęsłowej w chwili  $T = 1$ .

## 8.2. LOSOWA SERIA RUCHOMYCH SIŁ SKUPIONYCH

Jako drugi przypadek ruchomego obciążenia losowego rozpatrzmy belkę wieloprzęsłową obciążoną serią sił o amplitudach  $A_r$  poruszających się w jednym kierunku ze stałą prędkością  $v$  (rysunek 8.3). Chwile  $t_r$ , w których siły pojawiają się na belce są zmiennymi losowymi opisanymi przez proces Poissona  $N(t)$  o parametrze  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} E[dN(t)] &= \lambda dt; \\ E[d^2N(t)] &= \lambda dt, \\ E[dN(t_1)dN(t_2)] &= \lambda^2 dt_1 dt_2 \text{ dla } t_1 \neq t_2, \end{aligned} \quad (8.7)$$



Rys. 8.3. Belka wieloprzęsłowa poddana działaniu losowej serii ruchomych sił skupionych

Dynamiczna odpowiedź belki wieloprzęsłowej obciążonej losową ruchomą serią sił skupionych może być przedstawiona w postaci całki Stjeltjesa w odniesieniu do procesu Poissona w bazie współrzędnych bezwymiarowych  $\xi$  oraz  $T$ :

$$w(\xi, T) = \frac{L}{v} \int_0^T A(\tau) H(\xi, T - \tau) dN(\tau), \quad (8.8)$$

gdzie amplitudy  $A(\tau)$  są zmiennymi losowymi, wzajemnie niezależnymi, a także niezależnymi od chwili  $\tau$ . Załóżmy, że wartości oczekiwane  $E[A^s(\tau)] = E[A^s] = \text{const.}$  dla  $s = 1, 2, 3 \dots$  są nam znane. Biorąc pod uwagę parametry procesu Poissona otrzymamy wzory określające wartość oczekiwaną  $E[w(\xi, T)]$ , wariancję  $\sigma_w^2(\xi, T)$  oraz kumulantę  $s$ -rzędu  $\kappa_w^s(\xi, T)$  dynamicznego ugięcia belki wieloprzęsłowej:

$$E[w(\xi, T)] = E[A] \lambda \frac{L}{v} \int_0^T H(\xi, T - \tau) d\tau, \quad (8.9)$$

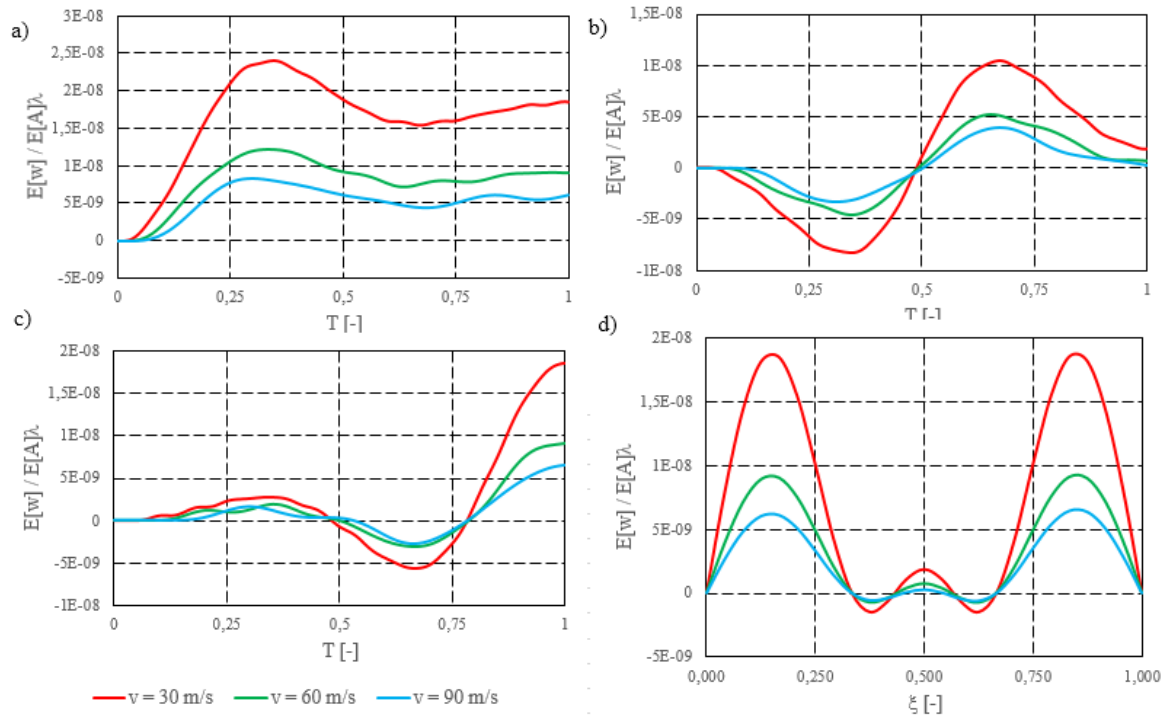
$$\sigma_w^2(\xi, T) = E[A^2] \lambda \frac{L}{v} \int_0^T H^2(\xi, T - \tau) d\tau, \quad (8.10)$$

$$\kappa_w^s(\xi, T) = E[A^s] \lambda \frac{L}{v} \int_0^T H^s(\xi, T - \tau) d\tau. \quad (8.11)$$

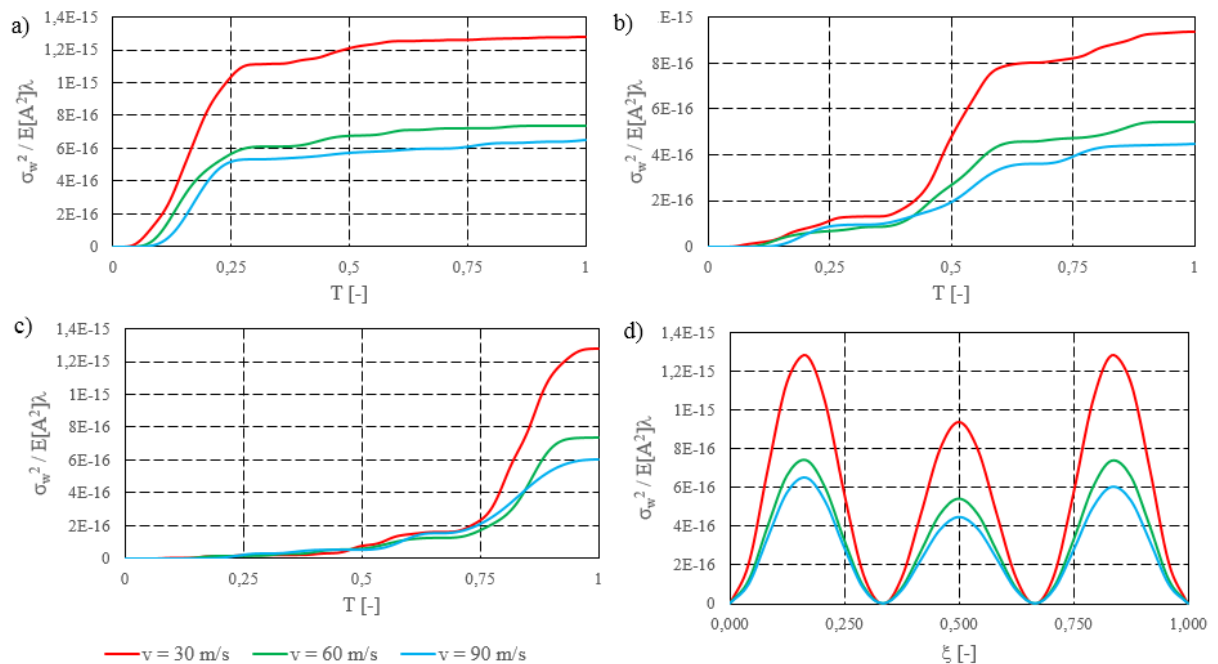
Rozpatrzmy przykład belki trójprzęsłowej przegubowo podpartej na podporach skrajnych, o rozpiętościach przęseł i parametrach geometryczno-materiałowych jak w przykładzie obliczeniowym opisanym w punkcie 4.4.2. Belka poddana jest działaniu losowej serii sił skupionych poruszających się ze stałą prędkością. Rysunki 8.4 oraz 8.5 przedstawiają wartość oczekiwaną oraz wariancję ugięcia belki przy trzech przyjętych prędkościach ruchu obciążenia.



## 8. RUCHOME OBCIĄŻENIA LOSOWE



Rys.8.4. wartość oczekiwana ugięcia belki trójprzęsłowej: a) w środku lewego przęsła; b) w środku centralnego przęsła; c) w środku prawego przęsła; d) w chwili  $T=1$



Rys.8.5. wariancja ugięcia belki trójprzęsłowej: a) w środku lewego przęsła; b) w środku centralnego przęsła; c) w środku prawego przęsła; d) w chwili  $T=1$

## 9. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono sposoby określania drgań belkowych oraz płytowych układów konstrukcyjnym z punktowymi podporami pośrednimi poddanych działaniu ruchomych obciążeń nieinercyjnych. Analizowane układy są obecnie powszechnie realizowane np. w postaci wieloprzęsłowych mostów drogowych lub stropów nad przejściami komunikacyjnym co uzasadnia chęć lepszego poznania omawianego problemu oraz opracowania nowych metod analizy zagadnienia. Przedstawione rozwiązania uzyskano przyjmując model belki Eulera-Bernoulliego oraz model cienkiej płyty izotropowej obciążonych ruchomą siłą skupioną oraz ruchomym obciążeniem rozłożonym. Założono, że w chwili wjazdu obciążenia na konstrukcję występują zerowe warunki początkowe, a sama prędkość z jaką porusza się obciążenie jest stała. Uwzględniono dowolną lokalizację podpór pośrednich, a w przypadku konstrukcji belkowych także dowolne warunki podparcia na podporach skrajnych. Przedstawiono pół-analityczne rozwiązanie bazujące na równaniach całkowych Volterry, a także rozwiązania numeryczne wykorzystujące dyskretyzację przestrzenną analizowanych układów wg procedur metody różnic skończonych oraz granulacji mas. Uzyskane rozwiązania w deterministycznych przypadkach obciążeń mogą być wykorzystane w analizie drgań losowych dzięki zastosowaniu dynamicznej funkcji wpływu opisującej drgania konstrukcji wynikające z ruchomej siły jednostkowej.

Najważniejszymi elementami pracy, noszącymi znamiona oryginalności są:

- zastosowanie równań całkowych Volterry 1 oraz 2 rodzaju w analizie drgań wieloprzęsłowych ciągłych belek pryzmatycznych poddanych działaniu ruchomych obciążeń nieinercyjnych;
- zastosowanie równań całkowych Volterry 2 rodzaju w analizie drgań złożonych układów powstałych przez sprzężenie dwóch dźwigarów belkowych dyskretnym układem więzi sprężystych;
- zastosowanie równań całkowych Volterry w analizie drgań cienkich płyt izotropowych, które oprócz podparcia na obwodzie podparte są układem dowolnie rozmieszczonych podpór punktowych reprezentujących np. słupy podpierające płytę stropu;
- zastosowanie dyskretyzacji przestrzennej układu wg procedur metody różnic skończonych oraz granulacji mas, a także przedstawienie formuł opisujących wektory obciążeń węzłowych dla przypadku ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia równomiernie rozłożonego;

- zastosowanie dynamicznej funkcji wpływu, opisującej drgania układu poddanego działaniu ruchomej siły jednostkowej, w analizie drgań losowych na przykładzie stacjonarnego czasoprzestrzennego procesu stochastycznego, a także losowej serii ruchomych sił skupionych.

Zasadniczym ograniczeniem metody bazującej na równaniach całkowych Volterra jest ograniczenie jej stosowalności jedynie do belek o jednakowej geometrii przekroju poprzecznego w każdym przęśle, jednak biorąc pod uwagę, że takiemu właśnie schematowi dynamicznemu odpowiada większość obecnie realizowanych mostów drogowych, jest to metoda mogąca stanowić alternatywę dla powszechnie stosowanych metod numerycznych, jak metoda elementów skończonych. Zaletą metody jest całkowite wyeliminowanie dyskretyzacji przestrzennej, a także prosta procedura numeryczna zastosowana przy wyznaczaniu zależnych od czasu reakcji w podporach pośrednich.

Przedstawione w pracy rozwiązania mogą mieć znaczenie w dynamice konstrukcji inżynierskich takich jak mosty drogowe oraz kolejowe, kładki dla pieszych, przejścia komunikacyjne czy też urządzenia mechaniczne narażone na wpływ obciążeń ruchomych.

**LITERATURA**

- [1] Abramovich, H., Eisenberger, M., Shulepov, O., 1995, Vibrations of multi-span non-symmetric composite beams, *Composites Engineering*, (5) s. 397-404.
- [2] Abu-Hilal M., 2006, Dynamic response of a double Euler-Bernoulli beam due to a moving constant load, *Journal of sound and vibration*, (297) s. 477-491.
- [3] Ariaei A., Ziaei-Rad, S., Malekzadeh, M., 2013, Dynamic response of a multi-span Timoshenko beam with internal and external flexible constraints subject to a moving mass, *Archive of Applied Mechanics*, (83) s. 1257-1272.
- [4] Ataman A., 2001. Analiza dynamiczna belki pod inercyjnym obciążeniem ruchomym, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, (93) s. 17-26.
- [5] Bajer C. I., Dyniewicz B., 2012, *Numerical Analysis of Vibrations of Structures under Moving Inertial Load*, Springer-Verlag.
- [6] Bołotin W.W., 1968, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa.
- [7] Bryja D., 1984, Drgania przestrzenne mostu wiszącego pod ruchomym obciążeniem inercyjnym, 30, (4) s. 607-627.
- [8] Bryja D., 2005, *Deterministyczne i stochastyczne metody analizy drgań mostów wiszących*, Oficyna Wydawnicza PWr.
- [9] Bryja D., Śniady P., 1991, Spatially coupled vibrations of a suspension bridge under random highway traffic, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, (20) s. 999-1010.
- [10] Bryja D., Śniady P., 1998, Stochastic non-linear vibrations of highway suspension bridge under inertial sprung moving load, *Journal of Sound and Vibration*, (216) s. 507-519.
- [11] Bryja D., Śniady P., 1988, Random vibration of a suspension bridge due to highway traffic, *Journal of Sound and Vibration*, 125 (2) s. 379-389.
- [12] Chatterjee P.K., Datta T.K., Surana C.S., 1994, Vibration of continuous bridges under moving vehicle, *Journal of Sound and Vibration*, (169) s. 619-632.

- 
- [13] Cheung Y. K., Au F.T.K., Zheng D.Y., Cheng Y.S., 1999, Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains by using modified beam vibration functions, *Journal of Sound and Vibration*, (228) s. 611-628.
- [14] Chmielewski T., Zembaty Z., 1998, *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa.
- [15] Ciurej H., 2012, Interakcja inercyjnych obciążeń ruchomych i kładki dla pieszych, *Czasopismo Techniczne*, 2, (109) s. 3-26.
- [16] Clough R.W., Penzien J., 1975, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill. New York.
- [17] Dmitrovova Z., 2011, Dynamic Analysis of Beam Structures under Moving Loads: A Review of the Modal Expansion Method, *Civil and Structural Engineering Computational Technology*, s. 99-130.
- [18] Dugush Y.A., Eisenberger M., 2002, Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, (245) s. 911-926.
- [19] Dyniewicz B., Bajer C. I., 2006, Moving loads - analytical and numerical approaches, *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, (14) s. 37-48.
- [20] Dyniewicz B., Bajer C. I., 2010, Symulacja komputerowa ruchomych obciążeń inercyjnych, *Drogi i mosty*, (1) s. 5-30.
- [21] Esen I., 2011, Dynamic Response of a Beam Due to an Accelerating Moving Mass Using Moving Finite Element Approximation, *Mathematical and Computational Applications*, 16, (1) s. 171-182.
- [22] Fryba L., 1999, *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Telford, London.
- [23] Fryba L., 1976, Non-stationary response of a beam to a random moving force, *Journal of Sound and Vibration*, 1 (46) s. 323-338.
- [24] Hayashikawa T., Watanabe N, 1981, Dynamic behavior of continuous beams with moving load, *Journal of Engineering Mechanics Division*, (107) s. 229-246.
- [25] He S., Rao M.D., 1993, Vibration and damping analysis of multi-span sandwich beams with arbitrary boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, (164) s. 125-142.
- [26] Henchi K, Fafard M, Dhatt G, Talbot M., 1997, Dynamic behaviour of multi-span beams under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, (199) s. 33-50.
-

- 
- [27] Ichikawa M., Miyakawa Y., Matsuda A., 2000, Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, (230) s. 493-506.
- [28] Iwankiewicz R., Śniady P., 1984, Vibration of a beam under a random stream of moving forces, 12 (1) s. 13-26.
- [29] Johansson C., Pacoste C., Karoumi R., 2013, Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads, *Computers and Structures*, (119) s. 85-94.
- [30] Kączkowski Z., 1980, *Płyty – obliczenia statyczne*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa.
- [31] Kączkowski Z., 1963, Vibration of a beam under a moving load, *Proceedings of Vibration Problems*, 4, (4) s. 357-373.
- [32] Klasztorny M., 2000, Spatial vibrations of a multi-span railway steel bridge under a train moving at high speed, 46, (2) s. 287–311.
- [33] Klasztorny M., Langer J., 1990, Dynamic response of single-span beam bridges to series of moving loads, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, s. 1107-1124.
- [34] Klasztorny M., Langer J., 1978, Dynamika belki mostowej obciążonej masą ruchomą rozłożoną nierównomiernie, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 26, (4), s. 657-667.
- [35] Klasztorny M., Langer J., 1981, Drgania złożonego układu belkowego pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 27, (2) s. 261-279.
- [36] Knowles J.K., 1968, On the dynamic response of a beam to a randomly moving load, *Journal of Applied Mechanics*, s. 1-6
- [37] Krylov A.N., 1995, *Mathematical Collection of Paper of the Academy of Sciences*, (61), Petersburg.
- [38] Langer J., 1973, Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem, (2) s. 255-262.
- [39] Langer J., 1974, Analiza dynamiczna przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 20, (4) s. 591-599.
- [40] Langer J., 1979, W sprawie numerycznego całkowania równań ruchu kolokacyjną metodą stałego przyśpieszenia, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 25, (1) s. 153-157.
-

- 
- [41] Langer J., 1980, *Dynamika budowli*, Politechnika Wrocławska, Wrocław.
- [42] Langer J., Klasztorny M., 1983, Dynamiczne wyężenie pomostów w belkowych mostach kolejowych, *Archiwum Inżynierii Ładowej*, 29, (3) s. 243-261.
- [43] Lee H.P., 1994, Dynamic response of a beam with intermediate point constraints subjected to a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, (171) s. 361–8.
- [44] Lee H.P., 1996, Dynamic response of a beam on multiple supports with a moving mass, *Structural Engineering Mechanics*.
- [45] Leissa A.W., 1969, *Vibrations of plates*, US Government Printing Office, Washington DC.
- [46] Linz P., 1969, Numerical solutions for Volterra integral equations of the first kind, *Computer Journal*, (12) s. 393-397.
- [47] Martinez-Castro A. E., Museros P., Castello-Linares A., 2006, Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli–Euler beams traversed by moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, (294) s. 278–97.
- [48] Mazur-Śniady K., Śniady P., Zielichowski-Haber W., 2009, Dynamic response of micro-periodic composite rods with uncertain parameters under moving random load, *Journal of Sound and Vibration*, (320) s. 273-288.
- [49] Michaltsos G., T., 2002, Dynamic behaviour of simple-span beam subjected to loads moving with variable speeds, *Journal of Sound and Vibration*, (258) s. 359-372.
- [50] Misiurek K., Śniady P., 2013, Vibrations of sandwich beam due to a moving force, *Composite Structures*, (104) s. 85-93.
- [51] Newmark N.M., 1959, A method of computation for structural dynamics, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM3, s. 67-95.
- [52] Oniszczyk Z., 2003, Forced transverse vibrations of an elastically connected simply supported double beam system, *Journal of sound and vibration*, (264) s. 273-286.
- [53] Oniszczyk Z., 2000, Transverse vibrations of an elastically connected complex double-string system, *Journal of Sound and Vibration*, (232) s. 367-386.
- [54] Podwórna M., 2017, Dynamic response of steel-concrete composite bridges loaded by high-speed train, *Structural Engineering and Mechanics*, 62, (2) s. 179-196.
-

- 
- [55] Podwórna M., 2011, Dynamics of a bridge beam under a stream of moving elements. Part 1 – Modelling and numerical integration, *Structural Engineering and Mechanics*, (38) s. 283-300.
- [56] Reipert Z., 1970, Vibration of frames under moving load, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 16, (3) s. 419- 447.
- [57] Reipert Z., 1969, Vibration of beam arbitrarily supported on its edges under a moving load, *Proceeding of Vibration Problems*, 2, (10) s. 249-260.
- [58] Riccardi G., 1994, Random vibration of beam under moving loads, *Journal of Engineering Mechanics*, 11, 2361-23-80.
- [59] Rusin J., Śniady P., Śniady P., 2011, Vibrations of double-string complex system under moving forces. Closed solutions, *Journal of Sound and Vibration*, (330) s. 404-415.
- [60] Rystwej A., Śniady P., 2007, Dynamic response of an infinite beam and plate to a stochastic train of moving forces, *Journal of Sound and Vibration*, (299) s. 1033-1048.
- [61] Salvo V.D., Muscolino G., Palmeri A., 2010, A substructure approach tailored to the dynamic analysis of multi-span continuous beams under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, (329) s. 3101-3120.
- [62] Sieniawska R., Śniady P., 1990, First passage problem of the beam under a random stream of moving forces, *Journal of Sound and Vibration*, 136 (2) s. 177-185.
- [63] Sieniawska R., Śniady P., 1990, Life expectancy of highway bridges due to traffic load, *Journal of Sound and Vibration*, (140) s. 31-38.
- [64] Stokes G.G., 1849, Discussion of a differential equation relating to breaking of railway bridges, *Transactions of the Cambridge Philosophical Soc.*, (85) s. 707-735.
- [65] Szafrąński M., 2016, Vibration of the bridge under moving singular loads - theoretical formulation and numerical solution, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 5, (1) s.169-180.
- [66] Szcześniak W., 2000, Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*, Warszawa.
-



- 
- [67] Szcześniak W., 1995, Dynamiczna stateczność belek Eulera i Timoshenki pod wpływem ruchomych obciążeń inercyjnych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.
- [68] Szyłko-Bigus O., Śniady P., 2015, Dynamic response of a Timoshenko beam to a continuous distributed moving load, 54 (4) s. 771-792.
- [69] Szyłko-Bigus O., Śniady P., Zakęś F., 2019, Application of Volterra integral equations in the dynamics of a multi-span Rayleigh beam subjected to a moving load, Mechanical Systems and Signal Processing, (121) s. 777-790.
- [70] Śniady P., 1984, Vibration of a beam due to a random stream of moving forces with random velocity, Journal of Sound and Vibration, 97 (1) s. 23-33
- [71] Śniady P., 2008, Dynamic response of a Timoshenko beam to a moving force, Journal of Applied Mechanics, 75 (3): 024503-1-024503-4.
- [72] Śniady P., 1976, Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [73] Śniady P., 2000, Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [74] Śniady P., Biernat S., Sieniawska R., Żukowski S., 2001, Vibrations of the beam due to a load moving with stochastic velocity, Probabilistic Engineering Mechanics, (16) s. 53-59.
- [75] Timoshenko S., Weaver W., 1974, Vibration Problems in Engineering, Wiley. New York.
- [76] Timoshenko S.P., 1959, Theory of plates and shells, Mc Graw-Hill, New York.
- [77] Tung CC., 1967, Random response of highway bridges to vehicle loads, Journal of the Engineering Mechanics Division, (93) s. 73-94.
- [78] Tung CC., 1969, Response of highway bridges to renewal traffic loads, Journal of Engineering Mechanics, 95 (1) s. 41-57.
- [79] Tung CC., 1969, Life expectance of highway bridges to vehicle loads, Journal of Engineering Mechanics, 93 (6) s. 1417-1428.
-

- 
- [80] Wang R.-T., 1997, Vibration of multi-span Timoshenko beams to a moving force, *Journal of Sound and Vibration*, (207) s. 731-742.
- [81] Wang, R.-T., Lin, T.-Y., 1998, Random vibration of multi-span Timoshenko beam due to a moving load, (213) s. 127-138.
- [82] Willis R., 1849, Preliminary essay to the Appendix B. Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures, Clowes and Sons.
- [83] Xu H., Li W., 2008, Dynamic behavior of multi span bridges under moving loads with focusing on the effect of the coupling conditions between spans, *Journal of Sound and Vibration*, (312) s. 736–53.
- [84] Yang B., Gao H., Liu S., 2018, Vibrations of a Multi-Span Beam Structure Carrying Many Moving, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol 18, nr 10
- [85] Yang Y.B., Liao S.S., Lin B., 1995, Impact formulas for vehicle moving over simple and continuous beams, *Journal of Structural Engineering*.
- [86] Zakęś F., 2016, Vibrations of point-supported rectangular thin plate subjected to a moving force, *Engineering Transactions*, 64 (4) s. 409-415.
- [87] Zakęś F., 2017, Zastosowanie metody różnic skończonych w dynamice cienkich płyt mostowych poddanych działaniu obciążeń ruchomych, *Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury*, 33 (64) s. 7-16.
- [88] Zakęś F., Śniady P., 2016, Application of Volterra Integral Equations in Dynamics of Multispan Uniform Continuous Beams Subjected to a Moving Load, *Shock and Vibration*.
- [89] Zakęś F., Śniady P., 2018, Vibrations of a Double-Beam System with Intermediate Elastic Restraints Due to a Moving Force, 67 (2) s. 243-252.
- [90] Zakęś F., Śniady P., 2018, Vibrations of a multi-span beam subjected to a moving stochastic load, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, s. 403-413
- [91] Zheng D.Y., Cheung Y.K., Au F.T.K., Cheng Y.S., 1998, Vibration of multi-span on uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions, *Journal of Sound and Vibration*, (212) s. 455-467.
-

- [92] Zibdeh H.S., Rackwitz R., 1995, Response moments of an elastic beam subjected to Poissonian moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, 188 (4) s. 479-495.
- [93] Zibdeh H.S., Rackwitz R., 1996, Moving loads on beam with general boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 195 (1) s. 85-102.

## STRESZCZENIE

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest zagadnieniom drgań konstrukcji belkowych oraz płytowych z punktowymi podporami pośrednimi poddanych działaniu obciążeń ruchomych.

Rozdziały pierwszy oraz drugi stanowią odpowiednio wprowadzenie, zawierające przegląd literatury poświęconej analizowanemu zagadnieniu oraz omówienie celu i zakresu pracy, w tym określenie oraz uzasadnienie przyjętej metodyki rozwiązania problemu.

Rozdział trzeci poświęcony jest drganiom belek jednoprzęsłowych w oparciu o model Eulera-Bernoulliego. Uzyskano rozwiązania opisujące drgania belki wynikające z ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia rozłożonego, przy uwzględnieniu zróżnicowanych warunków podparcia, jak również przy uwzględnieniu oraz pominięciu wpływu tłumienia.

Rozdział czwarty opisuje drgania belek wieloprzęsłowych swobodnie podpartych lub sztywno utwierdzonych na podporach skrajnych oraz podpartych pośrednio dowolną liczbą podpór punktowych o skończonej lub nieskończonej sztywności, rozmieszczonych w dowolnym rozstawie. Rozwiązanie problemu uzyskano analogicznie do statycznej metody sił, tworząc jednoprzęsłową belkę podstawową poddaną działaniu zadanego obciążenia ruchomego oraz sił nadliczbowych działających w miejscach usuniętych podpór pośrednich, a następnie zastępując układ równań zgodności przemieszczeń układem równań całkowych Volterry. Z uwagi na trudności w uzyskaniu w pełni analitycznego rozwiązania, przedstawiono prostą procedurę numeryczną, której efektywność zilustrowano dwoma przykładami obliczeniowymi.

Rozdział piąty przedstawia drgania układu dwóch belek sprzężonych ze sobą dyskretnym układem więzi sprężystych. W analizie zagadnienia uwzględniono zróżnicowane parametry geometryczno-materiałowe obu belek, jak również zróżnicowane warunki podparcia, a także dowolną ilość, rozstaw oraz sztywność więzi sprężystych. Rozwiązanie uzyskano rozwijając procedury uzyskane w rozdziałach poprzednich, a rozdział zakończono przykładem obliczeniowym.

W rozdziale szóstym omówiono dynamikę cienkich prostokątnych płyt izotropowych swobodnie podpartych na swoim obwodzie oraz punktowo za pośrednictwem dowolnej liczby dowolnie rozmieszczonych podpór pośrednich, poddanych działaniu ruchomej siły skupionej oraz ruchomego obciążenia rozłożonego. Przyjęto metodykę rozwiązania problemu analogiczną do procedur przedstawionych w rozdziale czwartym w przypadku belek

wieloprzęślowych, która z powodzeniem może być zastosowana również w przypadku układów płytowych. Rozdział zakończono przykładem obliczeniowym.

Rozdział siódmy opisuje dynamikę układów o dyskretnym rozkładzie masy. Takie podejście do tematu stanowi alternatywę wobec przyjęcia modelu ciągłego, którego dokładna analiza często jest bardziej pracochłonna od strony obliczeniowej. W rozdziale przedstawiono metodę dyskretyzacji przestrzennej układu za pomocą procedur metody różnic skończonych w przypadku układów belkowych oraz płytowych, a także metody granulacji mas w przypadku belek. W rozdziale przedstawiono przykład obliczeniowy, w którym wykorzystano obie wymienione wcześniej metody.

Rozdział ósmy poświęcony jest zagadnieniom ruchomych obciążeń losowych. Analizując zagadnienie wykorzystano dynamiczną funkcję wpływu opisującą drgania deterministyczne konstrukcji wynikające z działania ruchomej siły jednostkowej. Tak uzyskane rozwiązanie zastosowano do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych drgań konstrukcji poddanych działaniu czasoprzestrzennego stacjonarnego procesu stochastycznego oraz serii ruchomych sił skupionych.

Rozdział dziewiąty stanowi podsumowanie pracy.

## SUMMARY

The subject of this doctoral dissertation are vibrations of beam and plate structures with intermediate point supports subjected to various types of moving loads.

The first and the second chapter constitute an introduction containing a review of literature concerning analyzed issue and an overview of the purpose and the scope of the work including the definition and justification of the proposed methodology of solving the problem, respectively.

The third chapter is focused on vibrations of single-span beams according to Euler-Bernoulli's beam model. Solutions describing dynamic response of the beam resulting from moving concentrated force and moving distributed load, taking into account various boundary conditions, as well as taking into account or omitting the influence of damping, were obtained.

The fourth chapter describes vibrations of multi-span beams simply supported or rigidly fixed on the extreme supports and intermediately supported by a number of point supports with finite or infinite stiffness situated arbitrarily. The solution to the problem was obtained in analogical way to the static force method, creating a single-span basic beam subjected to a given moving load and a number of redundant forces acting at the points of removed intermediate supports, and then replacing the displacement compatibility equations with a system of Volterra integral equations. In order to avoid the difficulties of obtaining a fully analytical solution a simple numerical procedure was presented. The effectiveness of the proposed method was illustrated by two numerical examples.

The fifth chapter presents vibrations of a system of two beams coupled with a discrete system of elastic restraints. In the analysis of the problem various geometrical and material parameters of both beams were taken into account as well as various boundary conditions and number, spacing and stiffness of elastic restraints. Solution of the problem was obtained by developing procedures introduced in previous chapters. Chapter ends with a numerical example.

The sixth chapter discusses the dynamics of thin rectangular isotropic plates simply supported on their edges and having a number of point supports arbitrarily spaced in their area, subjected to a moving concentrated force and moving distributed load. The methodology of solving the problem was similar to the procedures presented in chapter four in the case of multi-

span beams, which shows that this approach can also be applied in the case of plate structures. A numerical example was presented at the end of the chapter.

The seventh chapter describes dynamic of systems with discrete mass distribution. This approach can be an alternative to the continuous model which in many cases is more complicated on the computational side. In the chapter two methods of spatial discretization of the system was presented, namely the finite difference method applied for beam and plate structures, as well as mass granulation method applied for the case of multi-span beam. The chapter presents a numerical example in which both methods was used.

In the eight chapter the problem of moving random loads is discussed. A dynamic influence function was used to describe deterministic vibrations resulting from a moving unitary concentrated force. This function can be used in order to determine probabilistic characteristics of structural vibrations resulting from stochastic moving loads such as time-space stationary stochastic process and a random series of moving concentrated forces.

The ninth chapter is the summary of the work.